La catégorie des chemins sortants [Damien, Montpellier, 2016]
d'après Treumann et Lurie

1) Faisceaux

X : top

<u>Déf</u>: <u>faisceau</u>: $F : \mathrm{Ouv}(X)^{op} \longrightarrow \mathrm{Ens}$

satisfaisant une propriété de recollement:

$\forall (U_i)_{i\in I}$ recouvrement ouvert de U

$$F(U) \xrightarrow[\text{eq}]{\text{restriction}\ \sim} \left(\prod_{i\in I} F(U_i) \rightrightarrows \prod_{j,k\in I} F(U_j \cap U_k)\right)$$

<u>Ex</u>: $F(U) = C^0(U,S)$

$\to$ <u>faisceaux localement constants</u>

<u>Déf</u>: — si $\forall x\in X$, $\exists U_x$ voisinage ouvert de x tq $F_{|U_x}$ est constant.
(isomorphe à un faisceau)

<u>Rappel</u>: fais. constant : $F(U) = C^0(U,S)$
$S \in \mathrm{Ens}$

$\mathcal{Z} \neq$ foncteur constant (mais oui si U connexe)

mais $\overset{1-1}{\longleftrightarrow}$ composantes connexes.

<u>Rq</u>: faisceaux local^t cst "sont" les revêtements
: faisceau des sections du revêtement.

<u>Rq</u>: faisceaux $\Leftrightarrow$ espaces étalés.

<u>Lemme</u>: Si F loc^t cst et X local^t connexe alors $\forall x\in X$, $\exists U_x$ voisinage ouvert de x connexe tq $F(U_x) = F_x$ $\leftarrow$ <u>tige</u>

<u>Rappel</u>: $F_x = \coprod_{U\ni x} F(U) /\sim \; = \operatorname{colim}_{U\ni x} F(U)$

<u>Obs</u>: La tige en un point x d'un faisc.
un cas particulier de pullbacks.

<u>Rappel</u>: <u>pullback</u>: Soit $f : Y \longrightarrow X$ continue

F : faisc. sur X

On définit un pré faisceau $f^{-1}F$ sur Y:

Soit $V \in \mathrm{Ouv}(Y)$.

$$f^{-1}F(V) := \coprod_{U\supset f(V)} F(U) /\sim \; = \operatorname{colim}_{U\supset f(V)} F(U)$$

$\triangle\!\!\!\mathcal{Z}$ pas nécessairement un faisceau.

$\hookrightarrow$ on note $f^*F := \widehat{f^{-1}F}$ $\leftarrow$ faisceautisé

$\exists \; \overset{\wedge}{\longleftarrow}$

$\mathrm{Fais}(X) \underset{\perp}{\hookrightarrow} \mathrm{PreFais}(X)$: fidèle.

Si $F : \mathrm{Ouv}(X) \longrightarrow \mathrm{Ens}$ constant
$U \longmapsto S$

alors $\hat{F}(U) = C^0(U,S)$ (ne change pas la tige)

Si $x : * \longrightarrow X$
alors $F_x = x^*F = x^{-1}F$

(préfaisceau $(\emptyset) = \{pt\}$
~~faisceau $(\emptyset) = \emptyset$~~)

En particulier, si $\gamma : [0,1] \longrightarrow X$

$\hookrightarrow$ faisceau γ^*F sur $[0,1]$.

<u>Obs</u>: faisc. loc^t cst sont préservés par pullbacks.

<u>Dém</u>: Soit $f : Y \to X$

F faisc loc^t cst sur X

f^*F loc^t cst.

Soit $y\in Y$, $x := f(y)$

$\exists V_x$ tq $F_{|V_x}$ ~~(loc)~~ cst

Soit $U_y := f^{-1}(V_x)$

Pour $U \underset{\text{ouvert}}{\subset} U_y$

$F_{|V_x}(U) \simeq C^0(U, S)$

1

$f_{|U_y}^{*} F^{(U)}_{|V_x} \simeq (f^* \mathcal{F})^{(U)}_{|U_y}$

$\parallel$

$C^0(\overset{\cup}{-}, S^1)$ $\square$

③ → Compatible à la composition des chemins.

$\tau_{\gamma\gamma'} = \tau_\gamma \circ \tau_{\gamma'}$

$\Longrightarrow \tau : \Pi_1(X) \longrightarrow (\mathrm{Ens}, \mathrm{bij})$

foncteur

$x \longmapsto F_x$

$[\gamma] \longmapsto \tau_\gamma$

Exemple:

$X = S^1$

$\mathrm{Fais}(S^1)^{l.c} \simeq \mathrm{Fun}(\Pi_1(X), \mathrm{Ens})$

$\simeq \mathrm{Fun}(B\mathbb{Z}; \mathrm{Ens})$

où $B\mathbb{Z}$: $\circlearrowleft^{*}$ $\mathbb{Z}$: groupe libre sur 1 ∋.

$\simeq \{(S, a)\}$

Sens. $a : S \xrightarrow{\sim} S$.

$\mathbb{Z} \xrightarrow{+1} \mathbb{Z}$ si on prend le revêtement $\mathbb{R} \to S^1$ fibre $= \mathbb{Z}$.

$Y = [0,1]$ ⇝ transport le long d'un lacet.

$\mathrm{Fais}([0,1])^{l.c} \simeq \mathrm{Fais}.([0,1])^{cst}$

F loc^t cst sur $X \Rightarrow \gamma^* F$ loc^t cst.

$\gamma^* F \simeq \gamma^* F_0$

$\exists U_0 = [0, b_1)$

$U_1 = (a_1, b_2)$ $\quad a_i < b_i$

$\vdots$ $\quad$ tq $\gamma^* F_{|U_i}$ cst

$U_n = (a_n; 1]$

U_0 U_1 ... U_n

$(\gamma^* F)_0 \xleftarrow{\sim} \gamma^{-1} F([0, b_1)) \xrightarrow{\sim} \gamma^* F((a_1; b_1))$

$\uparrow s$

$\gamma^* F((a_1, b_2)) \dots \xrightarrow{\sim} (\gamma^* F)_1$

$F_x \parallel$ $\quad$ $\parallel F_y$

$\xrightarrow{\cancel{(\tau_{x,y})}\ \tau_\gamma}$ $\sim$ bij ensembliste

où $\begin{cases} \gamma(0) = x \\ \gamma(1) = y \end{cases}$

(// revêtements) ① → $\perp$ du choix des a_i, b_i

On a "donc" ② → ne dépend que de la classe d'homotopie de γ (dém: carré... idem)

Prop: X loc^t connexe par arcs et (semi) loc^t simplement connexe

$\mathrm{Fais}(X)^{l.c.} \longrightarrow \mathrm{Fun}(\Pi_1(X), \mathrm{Ens})$

est une équivalence de catégories

Rq: $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$

$\boxed{\text{Thm}}$ [Seifert-Van-Kampen]

$X = U_1 \cup U_2$

$$\begin{array}{ccc} \Pi_1(U_1 \cap U_2) & \longrightarrow & \Pi_1(U_1) \\ \downarrow & \ulcorner & \downarrow \\ \Pi_1(U_2) & \longrightarrow & \Pi_1(X) \end{array}$$

Rq: X loc^t contractile, les pssé

(a) F loc^t cst

(b) $\forall V \subset U$ équiv d'homotopie $F(U) \xrightarrow{\sim} F(V)$

(c) —— avec V et U contractiles

(d) —— —— et faisant partie d'un syst. de voisinages

2) Stratifications

["Treumann"]

X séparé, para compact

Déf:

- espace stratifié de dim 0 = espace discret dénombrable
- $n > 0$ —— dim n

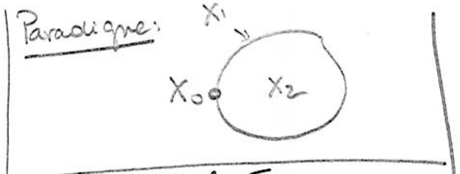
("profondeur de stratification")

$\emptyset = X_{-1} \subset X_0 \subset \dots \subset X_n = X$

X_i fermés dans X

Ex: Var

. $\forall x \in \underbrace{X_i \setminus X_{i-1}}$ "strate"



$\exists U \ni x$, un compact L stratifié de dim $n-i-1$ (i.e. $\emptyset = L_{-1} \subset L_0 \subset \dots \subset L_{n-i-1} = L$)

et un homéomorphisme

$U \simeq C(L) \times \mathbb{R}^i$ et x sommet du cône

cône sur $L := [0,1) \times L / \{0\} \times L \sim x$

tq $U \cap X_j \simeq C(L_{j-i-1}) \times \mathbb{R}^i \quad \forall\, i+1 \leq j \leq n$

Ex. $\overset{n=1}{X_0 \subset X_1 = X}$ X_0 fermé dans $X_1 = X$

Condition 0

$\forall x \in X_0$: au voisinage de x, $U \simeq$ 

et

L : nbre fini de pts

Condition 1

L ..... dim $-1 \Rightarrow L = \emptyset$ $\quad \Rightarrow$ graphe à noeuds finis

$U \simeq \{x\} \times \mathbb{R}$

Rq: on écrit cela comme une application $X \longrightarrow \mathbb{N}$ (← topo qui vient du poset) [Lurie]

Ex: . Bouquets de variétés.

~~(Contre-Ex: var topo)~~ . Var alg.

(Var topo: stratifiée mais non triangulée)

Conséquences

(1) $X_i \setminus X_{i-1}$ est un var topo de dim i

(2) $U \subset X$ ouvert $\Rightarrow U \cap X_i$ stratification de même dim. que U.

Déf: $f : X \longrightarrow Y$ stratifiés

. f préserve les strates si: $\forall k, \forall Z \subset X_k / X_{k-1}$ comp. connexe

$f(Z) \subset Y_l / Y_{l-1}$ pour un certain l.

Déf: homotopie entre 2 telles fonctions:

$H(t,-)$: homotopie classique tq

$\forall t \in]0,1[$, $H(t,-)$ préserve les strates

Déf: Un faisceau (F sur X) est constructible si:

$i_k^* F$ est loc. cst $\forall$ strate

$i_k : X_k \setminus X_{k-1} \hookrightarrow X$.

$\boxed{\text{Thm}}$ F est constructible ssi

(a) $V \hookrightarrow U$ équiv. d'homotopie stratifiée $\Rightarrow F(U) \xrightarrow{\sim} F(V)$

ou

(b) même chose avec les ouverts coniques.

↳ Ex: . $\mathcal{D}$-modules holonomes [Kashiwara]

. Tore pincé

Ex: faisceaux constructibles sur $[0, +\infty[$

 $\overset{1-1}{\longleftrightarrow}$ $s_0 \longrightarrow s_1$

Proposition si $f : X \longrightarrow Y$ préserve les strates et si F est constructible sur Y alors $f^* F$ est constructible sur X.

Déf: Applications (fortement) stratifiées

$f : X \longrightarrow Y$ si

. $\forall k, \forall Z$ compo connexe de $Y_k \setminus Y_{k-1}$, $f^{-1}(Z)$ est une union de compo connexes de strates de X.

. $\forall y \in Y_i \setminus Y_{i-1}$, $\exists U$ vois. de y dans Y_i, $\exists G$ esp. stratifié $\emptyset = G_{-1} \subset G_0 \subset \dots \subset G_e = G$. et un homéo $G \times U \simeq f^{-1}(U)$ qui préserve la filtration

$$\begin{tikzcd} G \times U \arrow[rr, "\simeq"] \arrow[dr, "\pi_2"'] & & f^{-1}(U) \arrow[dl, "f"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

(fibration triviale)

Ex:

Prop: f stratifiée, alors f_* : constructible $\to$ constructible

Rappel: $f_* F(V) := F(f^{-1}(V))$

3) Chemins sortants

Def. . $\gamma : [0,1] \to X$ est un chemin sortant si $t_1 \leq t_2 \Rightarrow \gamma(t_1)$ est dans la clôture d'une strate contenant $\gamma(t_2)$

. Homotopie entre ——— : homotopie tq $\exists$ triangulation de $\square$ pour laquelle l'intérieur de chaque triangle s'envoie sur une strate

Def: catégorie $EP(X)$:= obj: pts de X
(Exit Path)
morph: classes d'homotopie de chemins sortants

4_ Version ∞-catégorique [Lurie]

Ex: $X =$ •———
$EP(X) \simeq \bullet \to \bullet$

Modèle pour les ∞-catégories = quasi-cat
$(\infty,1)$-cat

A : poset muni de la topologie : $U \subset A$ ouvert si stable par majoration
$(x \leq y, x \in U \Rightarrow y \in U)$

Thm [1] [MacPherson] $\to$ catégorie,
[2] [Treumann] $\to$ 2-catégorie avec les homotopies
[3] [Lurie] : ∞-cat.

$Constr(X) \simeq Fun(EP(X); Ens)$

Ex: •——|——
0 1

$F_0 \xleftarrow{\sim} F([0,1)) \to F_1$

$(F([0,s)) \xleftarrow{\sim} F([0,s+t)))$

Ex: $A = [\![0,n]\!]$

$X_i = X_{\leq i}$
[Treumann] [Lurie]

$X_i - X_{i-1} = X_i$
[Treumann] [Lurie]

Def: Une A-stratification de X est une application C^0 $f : X \to A$.

$a \in A$, $X_a := f^{-1}(a)$: strate
$X_{<a} = f^{-1}(<a)$: ~~adhérence~~ frontière de strate
$X_{\leq a} = f^{-1}(\leq a)$: adhérence

Def: $A^{\triangleleft}$: A augmenté d'un plus petit élément "$-\infty$".

Prop: X : A stratifié, séparé, para-compact

$\Rightarrow C(X)$ est $A^{\triangleleft}$-stratifiée :
Soit $f : X \to A$, $\bar{f} : C(X) \to A$

$[x;0] \to -\infty$

$[x;t] \to f(x)$, $t>0$

$\sigma(0) \subset X_a$

$\sigma(t) \subset X_b$ pour $t>0$

X : A-stratifié

Déf : $x \in X_a$, X coniquement stratifié en x

si $\exists\, Y$ $A_{>a}$-stratifié, $\exists Z$ topo

$$\begin{array}{ccc} Z \times C(Y) & \xhookrightarrow{\text{plong}^t \text{ ouvert}} & X \ni x \\ \downarrow & & \downarrow \\ (A_{>a})^{\triangleleft} = A_{\geq a} & \longrightarrow & A \end{array}$$

Rq : [Treumann] $Z = \mathbb{R}^i$

Déf

$\mathrm{Sing}^A(X) \subset \mathrm{Sing}(X)$

ss-ens. simplicial des n-simplexes

$\sigma : \Delta^n \to X$ t.q

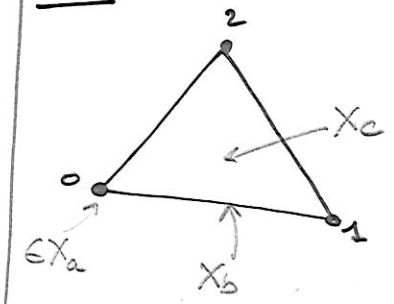
$\{(t_0, \dots, t_n) \in [0,1]^{n+1} \mid \sum_i t_i = 1\}$

$\exists\, a_0 \leq \dots \leq a_n$ dans A tq

$f \circ \sigma(t_0, \dots, t_i, 0, \dots 0) = a_i$ si $t_i > 0$

Ex : $n=1$ $a \leq b$

$n=2$ $a \leq b \leq c$



Rq : engendre les mêmes homotopies que Treumann avec les "trucs" triangulés

$\boxed{\text{Thm}}$ [Lurie]

- $\mathrm{Sing}^A(X)$ est une ∞-cat.
- $\mathrm{Sing}^A(X) \longrightarrow N(A)$ fibration interne (pr les horns internes).
- un morphisme de $\mathrm{Sing}^A(X)$ est inversible ssi son image dans $N(A)$ est dégénérée

Rq : $N(A) \longrightarrow \mathrm{Sing}^A(X)$

$a_0 \leq \dots \leq a_n \longmapsto \sigma(t_0, \dots, t_i, 0, \dots 0) = a_i$, $t_i > 0$

$\mathrm{Sing}^A(X) = \mathrm{Sing}(X) \times_{\mathrm{Sing}(A)} N(A)$

$\boxed{\text{Thm}}$ [Lurie] X A-stratifié, para-compact,

local^t de forme singulière, coniquement stratifié,
(Variétés ou variétés stratifiées)

toute partie non-vide de A a un élément max

$\Longrightarrow \mathrm{Fun}^{\infty}(\mathrm{Sing}^A(X), \mathrm{Top}) \simeq \mathrm{Fais}^{\infty}(X)^{A\text{-constr.}}$

sSet au-dessus de Top ; type "champ"

Rq : pour de bons espaces, $\exists$ un thm de Seifert-Van Kampen pour $\mathrm{Sing}^A(X)$ (compliqué à écrire)