Dualité de Poincaré en homologie d'intersection [Sylvain Douteau, Montpellier, 2016]

Cohomologie de Thom-Whitney :

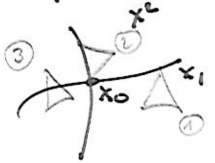
$$H^i_{TW,p}(X,R) \cong H^i_p(X;R)$$

$\big\|\!\!\int$ dualité de Poincaré

$$H^p_{n-i}(X,R)$$

I – Cohomologie de Thom-Whitney

simplexe filtré $X^0 \subset X^1 \subset X^2$



Déf : [Joint] X, Y esp. topo

$X * Y$ = les segments reliant un pt x de X à un pt y de Y.

Ex : $\Delta^n * \Delta^m = \Delta^{n+m+1}$

$\emptyset * \Delta^n = \Delta^n$

$\underset{(\Delta^{-1}}{\emptyset} * X = X$

$\sigma : \Delta^2 \longrightarrow X$

$\Delta^{j_0} * \Delta^{j_1} * \Delta^{j_2}$

$\sigma^{-1}(X_i) = \Delta_0 * \dots * \Delta_i$

$\sigma(X_0) \subset X_0$

(1) $\Delta^2 = \emptyset * \Delta^0 * \Delta^1$

$\Delta^{j_0} * \Delta^{j_1} * \Delta^{j_2}$

(2) $\Delta^2 = \Delta^0 * \Delta^0 * \Delta^0$

(3) pas possible

Sur un espace filtré

$X^0 \subset \dots \subset X^n$

$\Delta^{j_0} * \dots * \Delta^{j_n}$

Déf : [Simplexe filtré] est une application

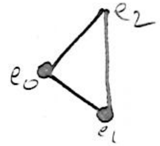
$\sigma : \Delta^{j_0} * \dots * \Delta^{j_n} \xrightarrow{C^0} X$ tq

$\sigma^{-1}(X_i) = \Delta^{j_0} * \dots * \Delta^{j_i}$ ("régulier" si $\Delta^{j_n} \neq \emptyset$)

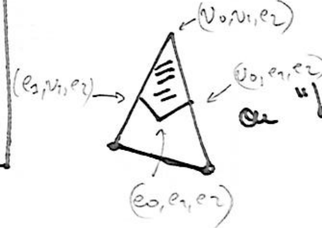
→ Plus facile de calculer I^pH comme cela.

Déf : Éclaté d'un simplexe filtré régulier

$\Delta = \Delta^{j_0} * \dots * \Delta^{j_n}$



$[e_0] * [e_1] * [e_2]$



ou "blow up"

On considère $c\Delta^{j_0} \times \dots \times c\Delta^{j_{n-1}} \times \Delta^{j_n} =: \tilde{\Delta}$

$[e_0] * [e_1] * [e_2] := \Delta$

$\downarrow$

$c[e_0] \times c[e_1] \times e_2 = \tilde{\Delta}$

une face de $\tilde{\Delta}$ (F, Σ)

$(F_0, \varepsilon_0) \times (F_1, \varepsilon_1) \times \dots \times (F_{n-1}, \varepsilon_{n-1}) \times F_n$

$\underset{\text{face}}{F_i \triangleleft \Delta^{j_i}}$ et $(F_i, 0)$ représente $F_i \triangleleft \Delta^{j_i} \triangleleft c\Delta^{j_i}$

$(F_i, 1)$ ——— $cF_i \triangleleft c\Delta^{j_i}$

Ex : toutes les faces de l'ex

$([e_0], 0) \times ([e_1], 0) \times [e_2]$ (e_0, e_1, e_2)

$(\emptyset, 1) \times ([e_1], 0) \times [e_2]$ (v_0, e_1, e_2)

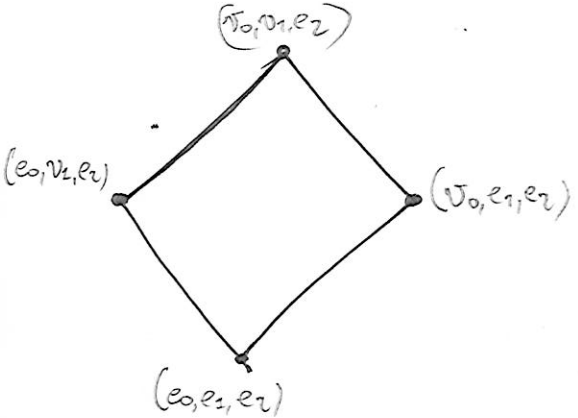
$([e_0], 0) \times (\emptyset, 1) \times [e_2]$ (e_0, v_1, e_2)

$(\emptyset, 1) \times (\emptyset, 1) \times [e_2]$ (v_0, v_1, e_2)

$([e_0, 1]) \begin{cases} \times (\emptyset, 1) \times [e_2] \\ \times ([e_1], 1) \times [e_2] \end{cases}$

$\left.\begin{array}{l}(\phi,1)\\ ([e_0],p)\end{array}\right\} \cancel{\times}\, ([e_1],1) \times [e_2]$

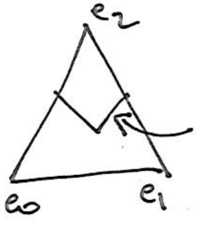
$([e_0],1) \times ([e_1],1) \times [e_2].$



$\widetilde{N}^k(\Delta,R) = N^\circ(c\Delta^{j_0}) \otimes \dots \otimes N^\circ(c\Delta^{j_{n-1}}) \otimes N^\circ(\Delta^{j_n})$

$$\dim(F,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{n-1}\left(\dim F_i + \varepsilon_i\right) + \dim F_n$$

$\dim \phi := -1$



$([e_0],1)\times([e_1],0)\times[e_2]$

$$\delta \mathbb{1}_{(F,\varepsilon)} = \sum_i \pm \mathbb{1}_{(F_0,\varepsilon_0)} \otimes \dots \otimes \delta \mathbb{1}_{(F_i,\varepsilon_i)} \otimes \dots \otimes \mathbb{1}_{F_n}$$

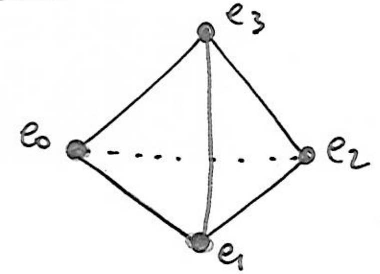
$\widetilde{N}^\circ(X,R)$

$\ni \omega$ c'est se donner

$\omega_\sigma \in N^\circ(\Delta^{j_0} * \dots * \Delta^{j_n}, R)$

$\widetilde{N}^\circ(X,R) = \operatorname{colim} \widetilde{N}(\Delta,R)$
$\sigma : \Delta = \Delta^{j_0} * \dots * \Delta^{j_n} \to X$

$=$ extension de Kan de $\widetilde{N}(-;R)$: simplexes filtrés $\to$ dg R-mod dans la cat. des espaces stratifiés.

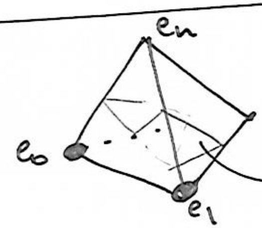


$\Delta = [e_0] * [e_1] * [e_2,e_3]$

<u>Prop</u>
$\widetilde{N}^\circ(\Delta,R)$: dg R-mod

$\mathbb{1}_{(F,\varepsilon)} \in \widetilde{N}^\circ(\Delta,R)$

$$\|\mathbb{1}_{(F,\varepsilon)}\|_\ell := \begin{cases} \sum_{i>n-\ell} \dim F_i + \varepsilon_i & \text{si } \varepsilon_{n-\ell}=0 \\ -\infty & \text{si } \varepsilon_{n-\ell}=1 \end{cases}$$



$\mathbb{1}_{(F,\varepsilon)} = \mathbb{1}_{(\phi,1)} \otimes \mathbb{1}_{(e_1,0)} \otimes \mathbb{1}_{[e_2,e_3]}$

$\|-\|_2 = -\infty$

$\|-\|_1 = \sum_{i>1} = 1$

<u>Déf:</u>
$H^\circ_{\overline{p},TW}(X,R)$
$::$
$H^\circ(\widetilde{N}_{\overline{p}}(X,R)).$

$\|\mathbb{1}_{(F,\varepsilon)}\|_i \leq \overline{p}(i) \quad \forall i \geq 1$

<u>Déf:</u> $N^*(\Delta, R) :=$ R-mod (anneau) engendré par les indicatrices des faces $\mathbb{1}_{(F,\varepsilon)}$ de $\widetilde{\Delta}$ $= \mathbb{1}_{(F_0,\varepsilon_0)} \otimes \dots \otimes \mathbb{1}_{(F_{n-1},\varepsilon_{n-1})} \otimes \mathbb{1}_{F_n}$

<u>Déf:</u> perversité : $\overline{p} : \mathbb{N}_{\geq 1} \to \mathbb{Z}$

<u>Déf:</u> $\widetilde{N}^\circ_{\overline{p}}(\Delta,R) \subset \widetilde{N}(\Delta,R)$:
$\begin{cases} c = \sum \lambda\, \mathbb{1}_{(F,\varepsilon)} \leftarrow \text{cochaînes } \overline{p}\text{-admissibles} \\ \text{et } \delta c \text{ aussi.} \end{cases}$

X espace stratifié (+)

$\mathcal{F}_X$: obj: ouverts de X

morph: engendrés par les inclusions et les homéo stratifiés.

Soit $F^*, G^* : \mathcal{F}_X \to Ab.$ et une transfo $F^* \xrightarrow{\Phi} G^*$

Si Φ (...) vérifie les hypothèses alors

$\Phi_X : F^*(X) \xrightarrow{\simeq} G^*(X)$

(1) F^* et G^* ont des suites de Mayer-Vietoris et Φ en fait un diag comm. pour $U_1 \cup U_2 = X$

$$\begin{array}{ccccccc} F^*(U_1 \cup U_2) & \longrightarrow & F^*(U_1) \oplus F^*(U_2) & \longrightarrow & F^*(\quad) & \longrightarrow \\ \downarrow \Phi & & \downarrow \Phi \oplus \Phi & & & \\ G^*(\quad) & \longrightarrow & G^*(-) & \ldots & & \end{array}$$

(2) $\{U_\alpha\}_\alpha$ famille de voisinages d'ouverts

si: $\Phi : F^*(U_\alpha) \xrightarrow{\simeq} G^*(U_\alpha)$

alors $F^*(\bigcup_\alpha U_\alpha) \xrightarrow{\simeq} G^*(\bigcup_\alpha U_\alpha)$

(3) si $F^*(\mathbb{R}^i \times c(L)^\circ) \xrightarrow{\simeq} G^*(\quad)$

alors $F^*(\mathbb{R}^i \times c(L)) \xrightarrow{\simeq} G^*(\quad)$

(4) $U \underset{\text{ouvert}}{\subset} X^n - X^{n-1}$ alors

$F^*(U) \xrightarrow{\simeq} G^*(U)$

Thm X esp stratifié

- $\bar{p}$ perversité ≥ 0
- R anneau de Dedekind.

$\exists\ \tilde{N}^{\bullet}_{\bar{p}}(X,R) \xrightarrow{\chi} C^{\bullet}_{\bar{q}}(X,R)$

qui est un qi si:

- R est un corps (fonctionne pour un espace filtré)

ou $\bar{q} = \bar{t} - \bar{p}$

- $\mathrm{Ext}^1(H^{\bar{p}}_{\bar{q}(\mathrm{codim}\, S)}(L,R),R) = 0$

$\forall S$: compo connexe d'une strate singulière de X

L est un entrelac de S.

Thm R com, X pseudo var, paracompacte, dim n, orientée

On a un iso

$\underset{\mathcal{D}}{[\text{classe fond}]} \cap - : H^k_{TW,\bar{p}}(X,R) \longrightarrow H^{\bar{p}}_{n-k}(X,R)$

Rq: . On récupère la dualité de l'exposé de Christophe.

. Proviens d'une opération sur les cxs de chaînes.