

CORRIGÉ

INSTRUCTIONS. La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, *la clarté et la précision des raisonnements* entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Toute réponse non justifiée ne recevra aucun point. Seuls les notes de cours et les documents papier sont autorisés. Tout le reste, dont les appareils électroniques, est interdit.



Exercice 1 (Espaces de configurations). Pour $n \geq 1$, l'espace de configurations de n -points d'un espace topologique X est le sous-espace

$$\text{Conf}_n(X) := \{(x_1, \dots, x_n) \in X^n ; x_i \neq x_j \text{ pour } i \neq j\}$$

de X^n .

- (1) Décrire le type d'homotopie des espaces de configurations de points $\text{Conf}_n(\mathbb{R})$ de $\mathbb{R}$, pour $n \geq 1$.

Le sous-espace $\text{Conf}_n(\mathbb{R})$ de $\mathbb{R}^n$ est le sous-espace ne contenant pas les hyperplans d'équations $x_i = x_j$, pour $1 < i < j < n$. Il est donc l'union disjointe des sous-espaces

$$\text{Conf}_n(\mathbb{R})_\sigma := \{(x_1, \dots, x_n) \in X^n ; x_{\sigma(1)} < \dots < x_{\sigma(n)}\}$$

pour toute permutation $\sigma \in \mathbb{S}_n$:

$$\text{Conf}_n(\mathbb{R}) = \bigsqcup_{\sigma \in \mathbb{S}_n} \text{Conf}_n(\mathbb{R})_\sigma .$$

Comme chaque des sous-espaces $\text{Conf}_n(\mathbb{R})_\sigma \sim *$ est contractile, on obtient que l'espace de configurations de points $\text{Conf}_n(\mathbb{R})$ de $\mathbb{R}$ est homotopiquement équivalent à l'espace discret d'ensemble sous-jacent $\mathbb{S}_n$.

- (2) Montrer que l'application continue

$$\begin{aligned} p_i : \text{Conf}_n(\mathbb{R}^d) &\rightarrow \text{Conf}_{n-1}(\mathbb{R}^d) \\ (x_1, \dots, x_n) &\mapsto (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, x_n), \end{aligned}$$

qui oublie le i^{e} point, est une fibration, pour $n, d \geq 1$ et décrire sa fibre.

On montre que c'est un espace fibré, c'est-à-dire localement trivialisable. Sans perte de généralité, on traite le cas $i = n$. La fibre de p_n en $(x_1, \dots, x_{n-1}) \in \text{Conf}_{n-1}(\mathbb{R}^d)$ est $F := \mathbb{R}^d \setminus \{x_1, \dots, x_{n-1}\}$. Comme les points $x_1, \dots, x_{n-1}$ sont distincts, il existe $\varepsilon > 0$ tel que les boules ouvertes $B(x_i, \varepsilon) \cap B(x_j, \varepsilon) = \emptyset$ ne s'intersectent pas, pour $i \neq j$. On considère alors l'ouvert

$$U := B(x_1, \varepsilon) \times \dots \times B(x_{n-1}, \varepsilon)$$

de $\text{Conf}_{n-1}(\mathbb{R}^d)$ qui vérifie

$$p_n^{-1}(U) = \{(y_1, \dots, y_n) \in (\mathbb{R}^d)^n ; \|y_i - x_i\| < \varepsilon, y_n \neq y_i \ \forall i = 1, \dots, n-1\} .$$

L'homéomorphisme $\Psi : p_n^{-1}(U) \rightarrow U \times F$ suivant trivialisé localement cet espace fibré au-dessus de l'ouvert U :

$$\Psi(y_1, \dots, y_n) := \begin{cases} (y_1, \dots, y_n) & \text{lorsque } y_n \notin \bigcup_{i=1}^{n-1} \bar{B}(x_i, \varepsilon) \\ (y_1, \dots, y_{n-1}, \theta(y_i, y_n)) & \text{lorsque } y_n \in \bar{B}(x_i, \varepsilon), \end{cases}$$

où $\theta : B(x_i, \varepsilon) \times \bar{B}(x_i, \varepsilon) \rightarrow \bar{B}(x_i, \varepsilon)$ est une application continue telle que

$$\theta(z, -)|_{\partial \bar{B}(x_i, \varepsilon)} = \text{id}_{\partial \bar{B}(x_i, \varepsilon)} \quad \text{et} \quad \theta(z, z) = x_i, \quad \forall z \in B(x_i, \varepsilon) .$$

- (3) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, les espaces de configurations $\text{Conf}_n(\mathbb{R}^2)$ sont connexes par arcs et que leurs groupes d'homotopie supérieurs $\pi_k(\text{Conf}_n(\mathbb{R}^2)) \cong \{0\}$ sont triviaux, pour $k \geq 2$.

Pour toute paire $(x_1, \dots, x_n)$ et $(y_1, \dots, y_n)$ de points de $\mathbb{R}^2$, on peut trouver des chemins $\gamma_i: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, pour $1 \leq i \leq n$, tels que $\gamma_i(0) = x_i$, $\gamma_i(1) = y_i$ et $\gamma_i(t) \neq \gamma_j(t)$, pour $t \in [0, 1]$ et $i \neq j$. (On le montre facilement par récurrence sur i). Cela montre que l'espace de configurations $\text{Conf}_n(\mathbb{R}^2)$ est connexe par arcs.

On montre le second point par récurrence sur $n \geq 1$. Pour $n = 1$, on a $\text{Conf}_1(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$ qui est contractile. Pour le passage de $n - 1$ à n , on utilise la longue suite exacte de groupes d'homotopie associée à la fibration de la question précédente (car sa base est connexe par arcs), ce qui donne pour $k \geq 2$:

$$\pi_k(\mathbb{R}^2 \setminus \{x_1, \dots, x_{n-1}\}) \cong \{0\} \rightarrow \pi_k(\text{Conf}_n(\mathbb{R}^2)) \hookrightarrow \pi_k(\text{Conf}_{n-1}(\mathbb{R}^2)) \cong \{0\}$$

car la fibre $\mathbb{R}^2 \setminus \{x_1, \dots, x_{n-1}\} \sim \bigvee_{n-1} S^1$ est homotopiquement équivalente à un bouquet de $n - 1$ cercles dont les groupes d'homotopie supérieurs sont triviaux, pour $k \geq 2$.

- (4) Montrer que l'espace de configurations de points $\text{Conf}_2(\mathbb{R}^d) \sim S^{d-1}$ est homotopiquement équivalent à la sphère de dimension $d - 1$, pour tout $d \geq 1$.

L'application

$$\begin{aligned} \text{Conf}_2(\mathbb{R}) &\rightarrow S^{d-1} \times \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}^d \\ (x_1, x_2) &\mapsto \left(\frac{x_2 - x_1}{\|x_2 - x_1\|}, \|x_2 - x_1\|, \frac{x_1 + x_2}{2} \right), \end{aligned}$$

est un homéomorphisme et les deux espaces $\mathbb{R}_{>0}$ et $\mathbb{R}^d$ sont contractiles.

- (5) Montrer que la fibration $p_i: \text{Conf}_n(\mathbb{R}^d) \rightarrow \text{Conf}_{n-1}(\mathbb{R}^d)$ admet une section, c'est-à-dire une application continue $s: \text{Conf}_{n-1}(\mathbb{R}^d) \rightarrow \text{Conf}_n(\mathbb{R}^d)$ telle que $p_i \circ s = \text{id}_{\text{Conf}_{n-1}(\mathbb{R}^d)}$.

Comme à la question 2, on nous traitons que le cas $i = n$. On considère l'application s définie par

$$s(x_1, \dots, x_{n-1}) := \left(x_1, \dots, x_{n-1}, \left(1 + \sum_{i=1}^{n-1} \|x_i\| \right) e_1 \right),$$

où e_1 est le vecteur unité $(1, 0, \dots, 0)$. En comparant les normes, on voit que ce dernier élément vit bien dans l'espace de configurations de n points de $\mathbb{R}^d$. La relation $p_i \circ s = \text{id}_{\text{Conf}_{n-1}(\mathbb{R}^d)}$ est immédiate.

- (6) Montrer qu'il existe un isomorphisme (bijection dans le cas $k = 0$)

$$\pi_k(\text{Conf}_n(\mathbb{R}^d)) \cong \prod_{j=1}^{n-1} \pi_k \left(\bigvee_j S^{d-1} \right),$$

pour $d \geq 3$, $n \geq 1$ et $k \geq 0$.

Le cas $n = 1$ est clair car $\text{Conf}_1(\mathbb{R}^d) = \mathbb{R}^d$ et le cas $k = 0$ aussi car les espaces de configuration $\text{Conf}_n(\mathbb{R}^d)$ sont connexes par arcs. On montre le résultat par récurrence sur n . Comme à la question (3), on utilise la longue suite exacte de groupes d'homotopie associée à la fibration de la question (2), dont la base est connexe par arcs. (Pour $k = 1$, on peut utiliser le fait que le groupe fondamental d'un bouquet de sphères de dimension S^{d-1} est trivial car $d - 1 \geq 2$; ceci montre que les espaces de configurations $\text{Conf}_n(\mathbb{R}^d)$ sont simplement connexes.) Pour $k \geq 1$, on considère la section de la question précédente qui induit une section $\pi_k(\text{Conf}_{n-1}(\mathbb{R}^d)) \rightarrow \pi_k(\text{Conf}_n(\mathbb{R}^d))$ de groupes abéliens.



Exercice 2 (∞ -catégorie). Dans une ∞ -catégorie $\mathfrak{X}$, on appelle *objets* ses 0-simplexes $x \in X_0$ et *morphismes* ses 1-simplexes $f \in X_1$. Un morphisme $f \in X_1$ a pour *source* $x := d_1(f)$ et *but* $y := d_0(f)$; on le note alors $f: x \rightarrow y$. Pour tout objet $x \in X_0$, on appelle *morphisme identité* de x le 1-simplexe $\text{id}_x := s_0(x): x \rightarrow x$ image de x par l'application de dégénérescence $s_0: X_0 \rightarrow X_1$.

Deux morphismes $f, g : x \rightarrow y$ sont *homotopes à gauche*, noté $f \sim_G g$, s'il existe un 2-simplexe $\sigma \in X_2$ tel que

$$\partial\sigma = (g, f, \text{id}_x)$$

et ils sont *homotopes à droite*, noté $f \sim_D g$, s'il existe un 2-simplexe $\tau \in X_2$ tel que

$$\partial\tau = (\text{id}_y, g, f)$$

Dans la suite, on admettra que ces deux relations sont équivalentes.

- (1) Montrer que la relation d'homotopie à gauche sur les morphismes de x vers y est une relation d'équivalence, pour toute paire d'objets $x, y \in X_0$.

La réflexivité $f \sim_G f$ est donnée par le 2-simplexe $s_0(f)$ car $\partial s_0(f) = (f, f, \text{id}_x)$. Soit $\sigma \in X_2$ une homotopie gauche de $f : x \rightarrow y$ vers $g : x \rightarrow y$. On considère le Λ_2^3 -cornet de $\mathfrak{X}$ défini par $(\sigma, s_0(g), -, s_0^2(x))$. Comme $\mathfrak{X}$ est une ∞ -catégorie, on peut le remplir avec un 3-simplexe $\Theta \in X_3$ qui vérifie $\partial d_2(\Theta) = (f, g, \text{id}_x)$, d'où la symétrie. Pour la transitivité, on commence avec $\sigma, \tau \in X_2$ tels que $\partial\sigma = (g, f, \text{id}_x)$ et $\partial\tau = (h, g, \text{id}_x)$. On considère alors le Λ_1^3 -cornet de $\mathfrak{X}$ défini par $(\tau, -, \sigma, s_0^2(x))$. Comme $\mathfrak{X}$ est une ∞ -catégorie, on peut le remplir avec un 3-simplexe $\Theta \in X_3$ qui vérifie $\partial d_1(\Theta) = (h, f, \text{id}_x)$, d'où $f \sim_G h$.

On note $\iota : \Delta^0 \sqcup \Delta^0 \rightarrow \Delta^1$ le morphisme d'ensembles simpliciaux défini par le coproduit $\iota := \iota_0 \sqcup \iota_1$ des deux morphismes $\iota_i : \Delta^0 \rightarrow \Delta^1$ définis par $0 \in \Delta_0^0 \mapsto i \in \Delta_0^1$, pour $i = 0, 1$. On note $\mathfrak{Y}^{\mathfrak{X}} = \mathfrak{Hom}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}) = \text{Hom}_{\Delta\text{Ens}}(\mathfrak{X} \times \Delta^\bullet, \mathfrak{Y})$ l'espace des morphismes de $\mathfrak{X}$ vers $\mathfrak{Y}$. Pour toute paire d'objets $x, y \in X_0$, on définit l'*espace des morphismes de x vers y* comme l'ensemble simplicial $\mathfrak{X}(x, y)$ obtenu par le produit fibré (pullback)

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{X}(x, y) & \longrightarrow & \mathfrak{X}^{\Delta^1} \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow (\iota \times \text{id}_{\Delta^\bullet})^* \\ \Delta^0 & \xrightarrow{(x, y)} & \mathfrak{X}^{\Delta^0 \sqcup \Delta^0}, \end{array}$$

où le morphisme (x, y) d'ensembles simpliciaux correspond envoie le 0-simplexe de Δ^0 sur le 0-simplexe $\Delta^0 \sqcup \Delta^0 \rightarrow \mathfrak{X}$ dont l'image de la copie de gauche Δ_0^0 est envoyée sur x et la copie de droite de Δ_0^0 est envoyée sur y .

- (2) Donner une description des 0-simplexes de $\mathfrak{X}(x, y)$ en terme de morphismes de la ∞ -catégorie $\mathfrak{X}$.

Comme les (co)limites des ensembles simpliciaux sont données par les (co)limites ensemblistes degré par degré, on a

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{X}(x, y)_0 & \longrightarrow & \text{Hom}_{\Delta\text{Ens}}(\Delta^1, \mathfrak{X}) \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \iota^* \\ \{0\} & \xrightarrow{(x, y)} & \text{Hom}_{\Delta\text{Ens}}(\Delta^0 \sqcup \Delta^0, \mathfrak{X}). \end{array}$$

Ceci donne

$$\mathfrak{X}(x, y)_0 \cong \{\varphi : \Delta^1 \rightarrow \mathfrak{X} ; \varphi_0(0) = x, \varphi_0(1) = y\} \cong \{f \in X_1 ; d_1(f) = x, d_0(f) = y\},$$

c'est-à-dire que les 0-simplexes de $\mathfrak{X}(x, y)$ sont en bijection avec les morphismes de la ∞ -catégorie $\mathfrak{X}$ de x vers y .

- (3) Donner une description des 1-simplexes de $\mathfrak{X}(x, y)$.

On utilise le même argument pour obtenir

$$\begin{array}{ccc}
\mathfrak{X}(x, y)_1 & \longrightarrow & \text{Hom}_{\Delta\text{Ens}}(\Delta^1 \times \Delta^1, \mathfrak{X}) \\
\downarrow & \lrcorner & \downarrow (\iota \times \text{id}_{\Delta^1})^* \\
\{00\} & \longrightarrow & \text{Hom}_{\Delta\text{Ens}}((\Delta^0 \sqcup \Delta^0) \times \Delta^1, \mathfrak{X}) .
\end{array}$$

Ceci donne

$$\mathfrak{X}(x, y)_1 \cong \{\varphi: \Delta^1 \times \Delta^1 \rightarrow \mathfrak{X} ; \varphi_0(0, i) = x, \varphi_0(1, i) = y, i = 0, 1\} .$$

On admettra que $\mathfrak{X}(x, y)$ est un complexe de Kan, pour toute paire d'objets $x, y \in X_0$.

(4) Décrire la relation d'homotopie $\sim$ des 0-simplexes de l'espace $\mathfrak{X}(x, y)$ des morphismes de x vers y .

Deux morphismes $f, g: x \rightarrow y$ de la ∞ -catégorie $\mathfrak{X}$ sont homotopes $f \sim g$ s'il existe un morphisme $\varphi: \Delta^1 \times \Delta^1 \rightarrow \mathfrak{X}$ tel que $\varphi_0(0, i) = x$ et $\varphi_0(1, i) = y$, pour $i = 0, 1$, et

$$\begin{aligned}
f = \Delta^1 &\cong \Delta^1 \times \Delta^0 \xrightarrow{\text{id} \times \delta_1} \Delta^1 \times \Delta^1 \xrightarrow{\varphi} \mathfrak{X} & \& \quad g = \Delta^1 \cong \Delta^1 \times \Delta^0 \xrightarrow{\text{id} \times \delta_0} \Delta^1 \times \Delta^1 \xrightarrow{\varphi} \mathfrak{X} . \\
&\quad \begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{g} & y \\ \parallel & \varphi & \parallel \\ x & \xrightarrow{f} & y \end{array}
\end{aligned}$$

(5) Montrer que la relation d'homotopie $\sim$ est équivalente à la relation d'homotopie gauche $\sim_G$.

La décomposition prismatique de $\Delta^1 \times \Delta^1$ comme recollement de deux copies de Δ^1 donne que $f \sim g$ si et seulement si il existe $h: x \rightarrow y$ tel que $f \sim_D h$ et $h \sim_G g$.

$$\begin{array}{ccc}
x & \xrightarrow{g} & y \\
\uparrow \text{id}_x & \nearrow h & \uparrow \text{id}_x \\
x & \xrightarrow{f} & y
\end{array}$$

On conclut avec l'équivalence entre l'homotopie gauche et l'homotopie droite de la question (2).

On définit la *catégorie homotopique* $\text{Ho}(\mathfrak{X})$ d'une ∞ -catégorie $\mathfrak{X}$ de la manière suivante. Ses objets sont les objets X_0 de $\mathfrak{X}$ et ses morphismes sont les classes d'équivalence $[f]$ de morphismes $f: x \rightarrow y$ pour la relation d'homotopie mentionnée aux questions précédentes. On définit la *composition* $[g] \circ [f]: x \rightarrow z$ en remplissant le Λ_1^2 -cornet $(g, -, f)$ de $\mathfrak{X}$ par un 2-simplexe $\omega \in X_2$ et en posant

$$[g] \circ [f] := [d_1(\omega)] .$$

(6) Montrer que cette composition est bien définie et associative.

Montrons d'abord que la définition ne dépend pas du choix du remplissage du Λ_1^2 -cornet $(g, -, f)$: soit $\omega' \in X_2$ un autre tel 2-simplexe. On considère le Λ_1^3 -cornet $(s_1(g), -, \omega', \omega)$ que l'on remplit par un 3-simplexe $\Theta \in X_3$ vérifiant $\partial d_1(\Theta) = (\text{id}_y, d_1(\omega'), d_1(\omega))$, c'est-à-dire $d_1(\omega) \sim_D d_1(\omega')$ et donc $d_1(\omega) \sim_G d_1(\omega')$.

Soient $g: y \rightarrow z$ et soient $f, f': x \rightarrow y$ homotopes à gauche par l'homotopie $\sigma \in X_2$, i.e. $\partial \sigma = (f', f, \text{id}_x)$. On remplit le Λ_1^2 -cornet $(g, -, f)$ par $\omega \in X_2$ et le Λ_1^2 -cornet $(g, -, f')$ par $\omega' \in X_2$. Pour conclure, on considère le Λ_2^3 -cornet $(\omega', \omega, -, \sigma)$ que l'on remplit par un 3-simplexe $\Theta \in X_3$ vérifiant $\partial d_2(\Theta) = (d_1(\omega'), d_1(\omega), \text{id}_x)$. Ceci implique bien que $d_1(\omega) \sim_G d_1(\omega')$. On procède de la même manière avec le choix de représentant de la classe $[g]$.

Soient trois morphismes $f: x \rightarrow y$, $g: y \rightarrow z$ et $h: y \rightarrow z$. On remplit le Λ_1^2 -cornet $(g, -, f)$ de $\mathfrak{X}$ par le 2-simplexe $\omega \in X_2$ et on remplit le Λ_1^2 -cornet $(h, -, g)$ de $\mathfrak{X}$ par le 2-simplexe $\zeta \in X_2$, d'où

$$[g] \circ [f] = [d_1(\omega)] \quad \& \quad [h] \circ [g] = [d_1(\zeta)] .$$

Enfin, on remplit le Λ_1^2 -cornet $(h, -, d_1(\omega))$ de $\mathfrak{X}$ par le 2-simplexe $\eta \in X_2$ de sorte que

$$[h] \circ ([g] \circ [f]) = d_1(\eta) .$$

Pour démontrer l'associativité de la composition, on considère le Λ_2^3 -cornet $(\zeta, \eta, -, \omega)$ que l'on remplit par un 3-simplexe $\Theta \in X_3$ vérifiant $\partial d_2(\Theta) = (d_1(\zeta), d_1(\eta), f)$, ce qui montre

$$[h] \circ ([g] \circ [f]) = ([h] \circ [g]) \circ [f] .$$

Les morphismes «identités» de la catégorie homotopique sont les classe d'équivalence $[\text{id}_x] = [s_0(x)]$ des identités de la ∞ -catégorie $\mathfrak{X}$. On supposera dans la suite que ces données forment bien une catégorie. La *catégorie fondamentale d'une ∞ -catégorie $\mathfrak{X}$* est la catégorie fondamentale $\tau_1(\mathfrak{X})$ de son ensemble simplicial sous-jacent.

- (7) Montrer qu'il existe un isomorphisme naturel $\tau_1(\mathfrak{X}) \cong \text{Ho}(\mathfrak{X})$ entre la catégorie fondamentale et la catégorie homotopique des ∞ -catégories.

Il existe un unique foncteur $F_{\mathfrak{X}} : \tau_1(\mathfrak{X}) \rightarrow \text{Ho}(\mathfrak{X})$ qui soit l'identité sur les objets et qui envoie un morphisme $f : x \rightarrow y$ sur sa classe $[f]$: ce morphisme est bien défini grâce à la question précédente. Sa définition montre qu'il est naturel par rapport aux morphismes $\mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}$ d'ensembles simpliciaux. Il reste à montrer qu'il s'agit d'un isomorphisme, c'est-à-dire qu'il induit des bijections au niveaux des ensembles de morphismes respectifs. Par définition, il est plein. Comme $\mathfrak{X}$ est une ∞ -catégorie, en itérant par le remplissage des Λ_1^2 -cornets, on voit rapidement que tout morphisme de la catégorie fondamentale $\tau_1(\mathfrak{X})$ admet un représentant simple de la forme $f : x \rightarrow y$, avec $f \in X_1$. Soient maintenant deux morphismes $f, g : x \rightarrow y$ tels que $F_{\mathfrak{X}}(f) = F_{\mathfrak{X}}(g)$. Cela implique $f \sim_G g$ et donc qu'il existe un 2-simplexe $\sigma \in X_2$ tel que $\partial \sigma = (g, f, \text{id}_x)$. On obtient donc que $f = g \circ \text{id}_x = g$ dans la catégorie fondamentale $\tau_1(\mathfrak{X})$.

Un *foncteur* entre deux ∞ -catégories $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{Y}$ est un morphisme d'ensembles simpliciaux $F : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}$. On admettra que l'*espace des foncteurs* $\mathfrak{Y}^{\mathfrak{X}}$ est une ∞ -catégorie. Une *transformation naturelle* $\alpha : F \rightarrow G$ entre deux foncteurs $F, G : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}$ est un morphisme de F vers G dans l'espace des foncteurs $\mathfrak{Y}^{\mathfrak{X}}$.

- (8) Montrer qu'il existe un isomorphisme naturel d'ensembles simpliciaux

$$\mathfrak{N}\text{Fun}(\mathbf{C}, \mathbf{D}) \cong \mathfrak{N}\mathbf{D}^{\mathfrak{N}\mathbf{C}} ,$$

où $\mathbf{C}, \mathbf{D}$ sont deux catégories et où $\text{Fun}(\mathbf{C}, \mathbf{D})$ est la catégorie des foncteurs de $\mathbf{C}$ vers $\mathbf{D}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a des bijections naturelles

$$\begin{aligned} \mathfrak{N}\text{Fun}(\mathbf{C}, \mathbf{D})_n &\cong \text{Hom}_{\text{Cat}}(\text{Cat}[n], \text{Fun}(\mathbf{C}, \mathbf{D})) \\ &\cong \text{Hom}_{\text{Cat}}(\text{Cat}[n] \times \mathbf{C}, \mathbf{D}) \\ &\cong \text{Hom}_{\Delta\text{Ens}}(\mathfrak{N}(\text{Cat}[n] \times \mathbf{C}), \mathfrak{N}\mathbf{D}) \quad \text{car } \mathfrak{N} \text{ est plein et fidèle} \\ &\cong \text{Hom}_{\Delta\text{Ens}}(\mathfrak{N}\text{Cat}[n] \times \mathfrak{N}\mathbf{C}, \mathfrak{N}\mathbf{D}) \quad \text{car } \mathfrak{N} \text{ préserve les produits (adjoint à droite)} \\ &\cong \text{Hom}_{\Delta\text{Ens}}(\Delta^n \times \mathfrak{N}\mathbf{C}, \mathfrak{N}\mathbf{D}) \quad \text{car } \mathfrak{N}\text{Cat}[n] \cong \Delta^n \\ &\cong \left(\mathfrak{N}\mathbf{D}^{\mathfrak{N}\mathbf{C}} \right)_n . \end{aligned}$$