EXAMEN

INSTRUCTIONS. La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, *la clarté et la précision des raisonnements* entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Toute réponse non justifiée ne recevra aucun point. Tous les documents papier sont autorisés ; les appareils électroniques sont interdits.

———— ✍ ————

Exercice 1 (Espaces de configurations). Pour $n \geqslant 1$, l'*espace de configurations* de n-points d'un espace topologique X est le sous-espace

$$\mathrm{Conf}_n(X) \coloneqq \{(x_1, \ldots, x_n) \in X^n \,;\, x_i \neq x_j \text{ pour } i \neq j\}$$

de X^n.

(1) Décrire le type d'homotopie des espaces de configurations de points $\mathrm{Conf}_n(\mathbb{R})$ de $\mathbb{R}$, pour $n \geqslant 1$.

(2) Montrer que l'application continue

$$\begin{array}{rcl} p_i \colon \mathrm{Conf}_n\left(\mathbb{R}^d\right) & \to & \mathrm{Conf}_{n-1}\left(\mathbb{R}^d\right) \\ (x_1, \ldots, x_n) & \mapsto & (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, x_n)\,, \end{array}$$

qui oublie le i$^{\mathrm{e}}$ point, est une fibration, pour $n, d \geqslant 1$ et décrire sa fibre.

(3) Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, les espaces de configurations $\mathrm{Conf}_n\left(\mathbb{R}^2\right)$ sont connexes par arcs et que leurs groupes d'homotopie supérieurs $\pi_k\left(\mathrm{Conf}_n\left(\mathbb{R}^2\right)\right) \cong \{0\}$ sont triviaux, pour $k \geqslant 2$.

(4) Montrer que l'espace de configurations de points $\mathrm{Conf}_2\left(\mathbb{R}^d\right) \sim S^{d-1}$ est homotopiquement équivalent à la sphère de dimension $d-1$, pour tout $d \geqslant 1$.

(5) Montrer que la fibration $p_i \colon \mathrm{Conf}_n\left(\mathbb{R}^d\right) \twoheadrightarrow \mathrm{Conf}_{n-1}\left(\mathbb{R}^d\right)$ admet une section, c'est-à-dire une application continue $s \colon \mathrm{Conf}_{n-1}\left(\mathbb{R}^d\right) \to \mathrm{Conf}_n\left(\mathbb{R}^d\right)$ telle que $p_i \circ s = \mathrm{id}_{\mathrm{Conf}_{n-1}\left(\mathbb{R}^d\right)}$.

(6) Montrer qu'il existe un isomorphisme (bijection dans le cas $k = 0$)

$$\pi_k\left(\mathrm{Conf}_n\left(\mathbb{R}^d\right)\right) \cong \prod_{j=1}^{n-1} \pi_k\left(\bigvee_j S^{d-1}\right),$$

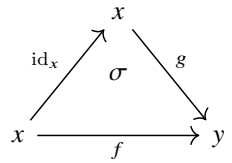
pour $d \geqslant 3$, $n \geqslant 1$ et $k \geqslant 0$.

———— ✍ ————

Exercice 2 (∞-catégorie). Dans une ∞-catégorie $\mathfrak{X}$, on appelle ***objets*** ses 0-simplexes $x \in X_0$ et ***morphismes*** ses 1-simplexes $f \in X_1$. Un morphisme $f \in X_1$ a pour ***source*** $x \coloneqq d_1(f)$ et ***but*** $y \coloneqq d_0(f)$; on le note alors $f \colon x \to y$. Pour tout objet $x \in X_0$, on appelle ***morphisme identité de*** x le 1-simplexe $\mathrm{id}_x \coloneqq s_0(x) : x \to x$ image de x par l'application de dégénérescence $s_0 : X_0 \to X_1$.

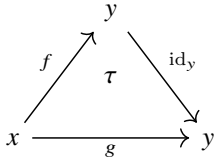
Deux morphismes $f, g \colon x \to y$ sont ***homotopes à gauche***, noté $f \sim_G g$, s'il existe un 2-simplexe $\sigma \in X_2$ tel que

$$\partial\sigma = (g, f, \mathrm{id}_x)$$



et ils sont ***homotopes à droite***, noté $f \sim_D g$, s'il existe un 2-simplexe $\tau \in X_2$ tel que

$$\partial\tau = (\mathrm{id}_y, g, f)$$



.

Dans la suite, on admettra que ces deux relations sont équivalentes.

(1) Montrer que la relation d'homotopie à gauche sur l'ensemble les morphismes de x vers y est une relation d'équivalence, pour toute paire d'objets $x, y \in X_0$.

On note $\iota\colon \Delta^0 \sqcup \Delta^0 \to \Delta^1$ le morphisme d'ensembles simpliciaux défini par le coproduit $\iota \coloneqq \iota_0 \sqcup \iota_1$ des deux morphismes $\iota_i\colon \Delta^0 \to \Delta^1$ définis par $0 \in \Delta^0_0 \mapsto i \in \Delta^1_0$, pour $i = 0, 1$. On note $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}} = \mathfrak{Hom}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}) = \mathrm{Hom}_{\Delta\mathsf{Ens}}(\mathfrak{X} \times \Delta^\bullet, \mathfrak{Y})$ l'espace des morphismes de $\mathfrak{X}$ vers $\mathfrak{Y}$. Pour toute paire d'objets $x, y \in X_0$, on définit l'*espace des morphismes de x vers y* comme l'ensemble simplicial $\mathfrak{X}(x, y)$ obtenu par le produit fibré (pullback)

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{X}(x,y) & \longrightarrow & \mathfrak{X}^{\Delta^1} \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle \iota^*} \\ \Delta^0 & \xrightarrow{(x,y)} & \mathfrak{X}^{\Delta^0 \sqcup \Delta^0} \end{array},$$

où le morphisme (x, y) d'ensembles simpliciaux envoie le 0-simplexe de Δ^0 sur le 0-simplexe $\Delta^0 \sqcup \Delta^0 \to \mathfrak{X}$ dont l'image de la copie de gauche Δ^0_0 est envoyée sur x et la copie de droite de Δ^0_0 est envoyée sur y.

(2) Donner une description des 0-simplexes de $\mathfrak{X}(x, y)$ en terme de morphismes de la ∞-catégorie $\mathfrak{X}$.

(3) Donner une description des 1-simplexes de $\mathfrak{X}(x, y)$.

On admettra que $\mathfrak{X}(x, y)$ est un complexe de Kan, pour toute paire d'objets $x, y \in X_0$.

(4) Décrire la relation d'homotopie $\sim$ des 0-simplexes de l'espace $\mathfrak{X}(x, y)$ des morphismes de x vers y.

(5) Montrer que la relation d'homotopie $\sim$ est équivalente à la relation d'homotopie gauche $\sim_G$.

On définit la *catégorie homotopique* $\mathsf{Ho}(\mathfrak{X})$ d'une ∞-catégorie $\mathfrak{X}$ de la manière suivante. Ses objets sont les objets X_0 de $\mathfrak{X}$ et ses morphismes sont les classes d'équivalence $[f]$ de morphismes $f\colon x \to y$ pour la relation d'homotopie mentionnée aux questions précédentes. On définit la *composition* $[g] \circ [f]\colon x \to z$ en remplissant le Λ^2_1-cornet $(g, -, f)$ de $\mathfrak{X}$ par un 2-simplexe $\omega \in X_2$ et en posant

$$[g] \circ [f] \coloneqq [d_1(\omega)] .$$

(6) Montrer que cette composition est bien définie et associative.

Les *morphismes identités* de la catégorie homotopique sont les classe d'équivalence $[\mathrm{id}_x] = [s_0(x)]$ des identités de la ∞-cartégorie $\mathfrak{X}$. On supposera dans la suite que ces données forment bien une catégorie. La *catégorie fondamentale d'une ∞-catégorie* $\mathfrak{X}$ est la catégorie fondamental $\tau_1(\mathfrak{X})$ de son ensemble simplicial sous-jacent.

(7) Montrer qu'il existe un isomorphisme naturel $\tau_1(\mathfrak{X}) \cong \mathsf{Ho}(\mathfrak{X})$ entre la catégorie fondamentale et la catégorie homotopique des ∞-catégories.

Un *foncteur* entre deux ∞-catégories $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{Y}$ est un morphisme d'ensembles simpliciaux $F\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$. On admettra que l'*espace des foncteurs* $\mathfrak{Y}^{\mathfrak{X}}$ est une ∞-catégorie. Une *transformation naturelle* $\alpha\colon F \to G$ entre deux foncteurs $F, G\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ est un morphisme de F vers G dans l'espace des foncteurs $\mathfrak{Y}^{\mathfrak{X}}$.

(8) Montrer qu'il existe un isomorphisme naturel d'ensembles simpliciaux

$$\mathfrak{N}\mathsf{Fun}(\mathsf{C}, \mathsf{D}) \cong \mathfrak{N}\mathsf{D}^{\mathfrak{N}\mathsf{C}} ,$$

où C, D sont deux catégories, où $\mathsf{Fun}(\mathsf{C}, \mathsf{D})$ est la catégorie des foncteurs de C vers D et où $\mathfrak{N}$ est le nerf d'une catégorie.