EXAMEN

19 DÉCEMBRE 2018

INSTRUCTIONS. La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, *la clarté et la précision des raisonnements* entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Toute réponse non justifiée ne recevra aucun point.

Les notes de cours sont autorisées. Tout le reste, incluant les téléphones portables, est interdit.

✍

Exercice 1 (Type d'homotopie d'un produit).

(1) Soient (X, x_0) et (Y, y_0) deux espaces topologiques pointés. Montrer que, pour tout $n \geqslant 0$, il existe une bijection canonique
$$\pi_n\big(X \times Y, (x_0, y_0)\big) \cong \pi_n(X, x_0) \times \pi_n(Y, y_0) ,$$
qui est un isomorphisme de groupes pour $n \geqslant 1$.

On rappelle que *l'espace projectif réel* est défini par
$$\mathbb{P}^d\mathbb{R} := \left\{x \in \mathbb{R}^{d+1}\backslash\{0\}\right\} / \sim ,$$
où la relation d'équivalence est donnée par $x \sim \lambda.x$, pour $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

(2) Montrer que, pour tout $d \geqslant 1$, il existe un revêtement de la forme
$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathrm{S}^d \to \mathbb{P}^d\mathbb{R} .$$

(3) Comparer les groupes d'homotopie $\pi_n\left(\mathrm{S}^2 \times \mathbb{P}^3\mathbb{R}\right)$ et $\pi_n\left(\mathrm{S}^3 \times \mathbb{P}^2\mathbb{R}\right)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(4) Est-ce que les deux espaces $\mathrm{S}^2 \times \mathbb{P}^3\mathbb{R}$ and $\mathrm{S}^3 \times \mathbb{P}^2\mathbb{R}$ sont homotopiquement équivalents ?

INDICATION. On pourra utiliser les calculs suivants des groupes d'homologie à coefficients dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$:
$$\mathrm{H}_*\left(\mathrm{S}^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\right) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} , & \text{pour } * = 0, n , \\ 0 , & \text{sinon} . \end{cases}$$
$$\mathrm{H}_*\left(\mathbb{P}^3\mathbb{R}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\right) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} , & \text{pour } * = 0, 1, 2, 3 , \\ 0 , & \text{sinon} . \end{cases}$$
$$\mathrm{H}_*\left(\mathbb{P}^2\mathbb{R}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\right) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} , & \text{pour } * = 0, 1, 2 , \\ 0 , & \text{sinon} . \end{cases}$$

(5) Qu'est-ce que cet exemple nous dit par rapport au théorème de Whitehead ?

Exercice 2 (Compatibilité entre la suite de fibre et la suite de cofibre).

(1) Décrire l'unité $\eta : X \to \Omega\Sigma X$ et la counité $\varepsilon : \Sigma\Omega X \to X$ de l'adjonction Σ-Ω dans la catégorie des espaces topologiques pointés.

(2) Soit $f : X \to Y$ une application continue pointée. Montrer que la formule suivante
$$(x, \varphi) \mapsto \begin{cases} \varphi(2t) & \text{for } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2} , \\ (x, 2(1-t)) & \text{for } \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1 , \end{cases}$$
définit une application continue pointée
$$\tilde{\eta} : \mathrm{Path}(f) \to \Omega\mathrm{Cone}(f) .$$

(3) Décrire l'application adjointe

$$\tilde{\varepsilon} : \Sigma\mathrm{Path}(f) \to \mathrm{Cone}(f)\ .$$

(4) Montrer que le diagramme suivant est commutatif à homotopie près.

$$\begin{tikzcd}
 & \Sigma\Omega\mathrm{Path}(f) \arrow[r, "\Sigma\Omega f^1"] \arrow[d, "\varepsilon"] & \Sigma\Omega X \arrow[r, "\Sigma\Omega f"] \arrow[d, "\varepsilon"] & \Sigma\Omega Y \arrow[r, "\Sigma i(f)"] \arrow[d, "\varepsilon"] & \Sigma\mathrm{Path}(f) \arrow[r, "\Sigma f_1"] \arrow[d, "\tilde{\varepsilon}"] & \Sigma X \arrow[d, equal] \\
\Omega Y \arrow[r, "i(f)"] \arrow[d, equal] & \mathrm{Path}(f) \arrow[r, "f^1"] \arrow[d, "\tilde{\eta}"] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\eta"] & Y \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\eta"] & \mathrm{Cone}(f) \arrow[r, "p(f)"] \arrow[d, "\eta"] & \Sigma X \\
\Omega Y \arrow[r, "i(f)"] & \Omega\mathrm{Cone}(f) \arrow[r, "f^1"] & \Omega\Sigma X \arrow[r, "f"] & \Omega\Sigma Y \arrow[r, "f_1"] & \Omega\Sigma\mathrm{Cone}(f) &
\end{tikzcd}$$

Exercice 3 (Espaces d'Eilenberg-MacLane simpliciaux).
Soit $n \geqslant 1$ un entier et G un groupe qui est supposé abélien lorsque $n \geqslant 2$. Un *espace d'Eilenberg–MacLane* de type $K(G, n)$ est un espace topologique connexe X tel que

$$\pi_k(X) \cong \begin{cases} G\ , & \text{pour } k = n\ , \\ 0\ , & \text{sinon}\ . \end{cases}$$

(1) Donner un exemple d'espace d'Eilenberg–MacLane de type $K(\mathbb{Z}, 1)$, de type $K(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, 1)$, de type $K(\mathbb{Z}^2, 1)$, et de type $K(\mathbb{Z}, 2)$.

On rappelle que le *nerf* $\mathrm{B}G$ d'un groupe $(G, \cdot, \mathbb{1})$ est un ensemble simplicial défini par

$$(\mathrm{B}G)_n \coloneqq G^{\times n}$$

avec pour faces et dégénérescences

$$\begin{aligned}
d_i[g_1|\dots|g_n] &\coloneqq \begin{cases} [g_2|\dots|g_n]\ , & \text{pour } i = 0\ , \\ [g_1|\dots|g_i g_{i+1}|\dots|g_n]\ , & \text{pour } 1 \leqslant i \leqslant n-1\ , \\ [g_1|\dots|g_{n-1}]\ , & \text{pour } i = n\ , \end{cases} \\
s_i[g_1|\dots|g_n] &\coloneqq [g_1|\dots|g_i|\mathbb{1}|g_{i+1}|\dots|g_n] \quad \text{et} \quad s_0(*) \coloneqq [\mathbb{1}]\ .
\end{aligned}$$

(2) Calculer les groupes d'homotopie simpliciaux du nerf $\mathrm{B}G$.

(3) Montrer que $|\mathrm{B}G|$ est un CW-complexe d'Eilenberg–MacLane de type $K(G, 1)$.

À chaque groupe $(G, \cdot, \mathbb{1})$, on associe la collection d'ensembles $(\mathrm{E}G)_n \coloneqq G^{n+1}$ munis des faces et dégénérescences suivantes

$$\mathrm{d}_i(g_0, \dots, g_n) \coloneqq (g_0, \dots, \widehat{g_i}, \dots, g_n) \quad \text{et} \quad \mathrm{s}_i(g_0, \dots, g_n) \coloneqq (g_0, \dots, g_i, g_i, \dots, g_n)\ .$$

On note cette donnée par $\mathrm{E}G$.

(4) Montrer que $\mathrm{E}G$ définit un foncteur de la catégorie des groupes vers celle des ensembles simpliciaux.

(5) Montrer que $\mathrm{E}G$ admet un adjoint à gauche et le décrire.

(6) Montrer que $\mathrm{E}G$ est contractible, c'est-à-dire qu'il existe deux applications simpliciales $f : \mathrm{E}G \to *$ et $g : * \to \mathrm{E}G$ telles que $fg \sim \mathrm{id}_*$ et $gf \sim \mathrm{id}_{\mathrm{E}G}$.

(7) Tout n-simplexe $(\mathrm{E}G)_n = G^{n+1}$ admet une action (à gauche) du groupe G par la formule

$$g.(g_0, \dots, g_n) \coloneqq (gg_0, \dots, gg_n)\ .$$

Montrer que cela munit $\mathrm{E}G$ d'une structure de G-module simplicial.

(8) On considère les orbites sous ces actions avec les faces et dégénérescences induites

$$\mathrm{E}G/G \coloneqq \left((\mathrm{E}G)_n/G = G^{n+1}/G, \bar{\mathrm{d}}_i, \bar{\mathrm{s}}_i\right)\ .$$

(9) Montrer que $\mathrm{E}G/G$ est un ensemble simplicial isomorphe au nerf $\mathrm{B}G$.

(10) Montrer que l'application simpliciale $\mathrm{E}G \twoheadrightarrow \mathrm{E}G/G \cong \mathrm{B}G$ est un fibration de Kan.

(11) Calculer la fibre de cette fibration $\mathrm{E}G \twoheadrightarrow \mathrm{B}G$.

(12) Donner une autre démonstration du fait que $|\mathrm{B}G|$ est un espace d'Eilenberg–MacLane de type $K(G, 1)$.