EXAMEN

7 JANVIER 2021

INSTRUCTIONS. La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, *la clarté et la précision des raisonnements* entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Toute réponse non justifiée ne recevra aucun point. Seuls les notes de cours et les documents papier sont autorisés.

✍

Exercice 1 (Fibre et espace de lacets).

(1) Soit (X, x_0) un espace topologique pointé. Montrer que l'application

$$\mathrm{Path}(X) \coloneqq \{\varphi : I \to X \mid \varphi(0) = x_0\} \to X \ , \quad \varphi \mapsto \varphi(1)$$

est une fibration avec $\mathrm{Path}(X)$ contractible.

(2) Soit $F \to E \to B$ une fibration où (B, b_0) est un espace topologique pointé connexe par arcs, où $F := p^{-1}(b_0)$ est la fibre et où E est contractible. Montrer qu'il existe une équivalence d'homotopie faible $F \xrightarrow{\sim} \Omega B$.

INDICATION : On admettra la fonctorialité de la longue suite exacte associée à une fibration.

(3) Montrer que $\Omega\, \mathbb{P}^\infty\mathbb{C}$ est homotopiquement équivalent à S^1.

INDICATION : On pourra utiliser le théorème de Moore qui affirme que l'espace de lacets d'un CW-complexe est homotopiquement équivalent à un CW-complexe.

(4) Calculer les groupes d'homotopie de $\mathbb{P}^\infty\mathbb{C}$.

✍

Exercice 2 (Résolution fibrante).
À tout ensemble partiellement ordonné $(P, \leqslant)$, on associe le complexe simplicial

$$\Delta(P, \leqslant) \coloneqq (P, \{\lambda_0 < \cdots < \lambda_k\})$$

composé des chaînes $\lambda_0 < \cdots < \lambda_k$ d'éléments de P, pour tout $k \geqslant 0$.

(1) Pour tout $n \geqslant 0$, on considère l'ensemble totalement ordonné $[n] \coloneqq (\{0, \ldots, n\}, \leqslant)$. À quoi correspond le complexe simplicial $\Delta([n])$?

À tout complexe simplicial $(V, \mathfrak{X})$, on associe un ensemble simplicial $\mathrm{bary}(V, \mathfrak{X})$ dont les k-simplexes

$$\mathrm{bary}(V, \mathfrak{X})_k \coloneqq \{F_0 \subseteq \cdots \subseteq F_k\}$$

sont les chaînes de faces $F_i \in \mathfrak{X}$ et dont les applications faces et dégénérescences sont données par

$$d_i(F_0 \subseteq \cdots \subseteq F_k) \coloneqq (F_0 \subseteq \cdots \subseteq F_{i-1} \subseteq F_{i+1} \subseteq \cdots \subseteq F_k) \quad \text{et}$$
$$s_i(F_0 \subseteq \cdots \subseteq F_k) \coloneqq (F_0 \subseteq \cdots \subseteq F_i \subseteq F_i \subseteq \cdots \subseteq F_k) \ .$$

Pour tout $n \geqslant 0$, on considère l'image de $[n]$ par la composée de ces deux constructions :

$$\mathrm{sd}\, \Delta^n \coloneqq \mathrm{bary}(\Delta([n])) \ .$$

(2) Décrire l'ensemble simplicial $\mathrm{sd}\, \Delta^n$, pour $n \geqslant 0$, et représenter graphiquement sa réalisation géométrique $|\mathrm{sd}\, \Delta^2|$ avec sa structure cellulaire.

(3) Montrer que les applications $\delta_i\colon [n-1] \to [n]$ et $\sigma_i\colon [n+1] \to [n]$, définies par

$$\delta_i(j) := \begin{cases} j & \text{pour} \quad j < i\,, \\ j+1 & \text{pour} \quad j \geqslant i\,, \end{cases} \quad \text{et} \quad \sigma_i(j) = \begin{cases} j & \text{pour} \quad j \leqslant i\,, \\ j-1 & \text{pour} \quad j > i\,, \end{cases}$$

induisent une structure d'ensemble simplicial cosimplicial sur les ensembles simpliciaux $\mathrm{sd}\,\Delta^n$, pour $n \geqslant 0$, par la formule

$$\bar{\delta}_i(F_0 \subsetneq \cdots \subsetneq F_k) = \big(\delta_i(F_0) \subsetneq \cdots \subsetneq \delta_i(F_k)\big) \quad \text{et} \quad \bar{\sigma}_i(F_0 \subsetneq \cdots \subsetneq F_k) = \big(\sigma_i(F_0) \subseteq \cdots \subseteq \sigma_i(F_k)\big)\,.$$

(4) On note cet ensemble simplicial cosimplicial par $\mathrm{sd}\,\Delta^\bullet\colon \Delta \to \mathsf{sSet}$. Montrer que ce foncteur s'étend en un endofoncteur $\mathrm{sd}\colon \mathsf{sSet} \to \mathsf{sSet}$ via le plongement de Yoneda et qu'il admet un adjoint à droite $\mathrm{Ex}\colon \mathsf{sSet} \to \mathsf{sSet}$ donné par $\mathrm{Ex}\,\mathfrak{X} := \mathrm{Hom}_{\mathsf{sSet}}(\mathrm{sd}\,\Delta^\bullet, \mathfrak{X})$.

(5) Décrire l'ensemble simplicial $\mathrm{sd}\left(\Delta^2/\partial\Delta^2\right)$ et représenter graphiquement sa réalisation géométrique $\left|\mathrm{sd}\left(\Delta^2/\partial\Delta^2\right)\right|$ avec sa structure cellulaire. Est-ce que $\mathrm{sd}\left(\Delta^2/\partial\Delta^2\right)$ fournit une triangulation de la sphère ?

(6) Représenter graphiquement les réalisations géométriques $\left|\mathrm{sd}^2\left(\Delta^2\right)\right|$ et $\left|\mathrm{sd}^2\left(\Delta^2/\partial\Delta^2\right)\right|$ avec leurs structures cellulaires. Est-ce que $\mathrm{sd}^2\left(\Delta^2/\partial\Delta^2\right)$ fournit une triangulation de la sphère ?

(7) Décrire les n-simplexes de $\mathrm{Ex}\,\mathfrak{X}$ en termes des n-simplexes de $\mathfrak{X}$.
Indication : On pourra écrire l'ensemble simplicial $\mathrm{sd}\,\Delta^n$ comme un coégalisateur de la forme

$$\coprod_{?} \Delta^{n-1} \underset{?}{\overset{?}{\rightrightarrows}} \coprod_{\omega \in \mathbb{S}_{[n]}} \Delta^n \twoheadrightarrow \mathrm{sd}\,\Delta^n\,,$$

où $\mathbb{S}_{[n]} \cong \mathbb{S}_{n+1}$ est l'ensemble des bijections de $[n]$.

(8) Pour tout $n \geqslant 0$, on considère le morphisme $\varepsilon_n\colon \mathrm{sd}\,\Delta^n \to \Delta^n$ d'ensembles simpliciaux défini par

$$\varepsilon_n\left(F_0 \subsetneq \cdots \subsetneq F_k\right) := \big(\max F_0 \leqslant \cdots \leqslant \max F_k\big)\,.$$

Montrer que c'est une équivalence d'homotopie simpliciale.

On note $\varepsilon_\bullet$: $\mathrm{sd}\,\Delta^\bullet \to \Delta^\bullet$ le morphisme induit d'ensembles simpliciaux cosimpliciaux. En tirant en arrière par ce dernier, on obtient une transformation naturelle de foncteurs $\eta\colon \mathrm{id}_{\mathsf{sSet}} \to \mathrm{Ex}$:

$$\eta_{\mathfrak{X}} := (\varepsilon_\bullet)^* \quad : \quad \mathfrak{X} \cong \mathrm{Hom}_{\mathsf{sSet}}(\Delta^\bullet, \mathfrak{X}) \quad \to \quad \mathrm{Hom}_{\mathsf{sSet}}(\mathrm{sd}\,\Delta^\bullet, \mathfrak{X}) = \mathrm{Ex}\,\mathfrak{X}\,.$$

(9) Montrer que, pour tout ensemble simplicial $\mathfrak{X}$ et pour tout morphisme $\lambda\colon \Lambda^n_k \to \mathrm{Ex}\,\mathfrak{X}$, il existe un morphisme $\Delta^n \to \mathrm{Ex}^2\,\mathfrak{X}$ d'ensembles simpliciaux rendant le diagramme suivant commutatif

$$\begin{tikzcd} \Lambda^n_k \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, hook] & \mathrm{Ex}\,\mathfrak{X} \arrow[d, "\eta_{\mathrm{Ex}\,\mathfrak{X}}"] \\ \Delta^n \arrow[r, dashed] & \mathrm{Ex}^2\,\mathfrak{X}\,. \end{tikzcd}$$

Indication : On pourra admettre qu'il existe un morphisme d'ensembles simpliciaux $\mathrm{sd}\,\Delta^n \to \mathrm{Ex}\,\mathrm{sd}\,\Lambda^n_k$ factorisant le morphisme $\eta_{\mathrm{sd}\,\Lambda^n_k}$ de la manière suivante

$$\begin{tikzcd} \mathrm{sd}\,\Lambda^n_k \arrow[r, "\eta_{\mathrm{sd}\,\Lambda^n_k}"] \arrow[d, hook] & \mathrm{Ex}\,\mathrm{sd}\,\Lambda^n_k \\ \mathrm{sd}\,\Delta^n \arrow[ur, dotted] & \end{tikzcd} .$$

(10) On pose

$$\mathrm{Ex}^\infty\,\mathfrak{X} := \mathrm{colim}\left(\mathfrak{X} \xrightarrow{\eta_{\mathfrak{X}}} \mathrm{Ex}\,\mathfrak{X} \xrightarrow{\eta_{\mathrm{Ex}\,\mathfrak{X}}} \mathrm{Ex}^2\,\mathfrak{X} \xrightarrow{\eta_{\mathrm{Ex}^2\,\mathfrak{X}}} \cdots \right)\,.$$

Montrer que $\mathrm{Ex}^\infty\,\mathfrak{X}$ est un complexe de Kan, pour tout ensemble simplicial $\mathfrak{X}$.

(11) [BONUS] Montrer l'indication de la question (9).

(12) [BONUS] Montrer que le morphisme canonique $\theta\colon \mathfrak{X} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ex}^\infty\,\mathfrak{X}$ est une équivalence faible d'homotopie, pour tout ensemble simplicial $\mathfrak{X}$, c'est-à-dire $\pi_n(|\theta|)\colon \pi_n(|\mathfrak{X}|, x) \cong \pi_n(|\mathrm{Ex}^\infty\,\mathfrak{X}|, |f|(x))$ sont des isomorphismes, pour $n \geqslant 1$ et $x \in |\mathfrak{X}|$, et une bijection pour $n = 0$.