

# EXAMEN

7 JANVIER 2021

INSTRUCTIONS. La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, *la clarté et la précision des raisonnements* entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Toute réponse non justifiée ne recevra aucun point. Les notes de cours ainsi que tout document papier sont autorisés. Tout le reste, incluant les téléphones portables, est interdit.



### Exercice 1 (Fibre et lacet).

- (1) Soit  $(X, x_0)$  un espace topologique pointé. Montrer que l'application

$$\text{Path}(X) := \{\varphi : I \rightarrow X \mid \varphi(0) = x_0\} \rightarrow X, \quad \varphi \mapsto \varphi(1)$$

est une fibration avec  $\text{Path}(X)$  contractible.

Le premier point est une application directe du cours. Il suffit de voir que  $\text{Path}(X)$  est homéomorphe à  $\text{Path}(f)$  pour  $f : \{x_0\} \rightarrow X$  l'inclusion du point de base et que l'application en question correspond alors à la fibration  $\text{Path}(f) \rightarrow X$  qui envoie  $\varphi$  sur  $\varphi(1)$ . Pour le second point, il suffit de considérer l'homotopie  $H : \text{Path}(X) \times I \rightarrow \text{Path}(X)$  qui envoie  $(\varphi, s)$  vers l'application  $t \mapsto \varphi(st)$ . Alors  $H(\varphi, 0) = \text{cst}_{x_0}$  est l'application constante et  $H(\varphi, 1) = \text{id}$ .

- (2) Soit  $F \rightarrow E \rightarrow B$  une fibration où  $(B, b_0)$  est un espace topologique pointé connexe par arcs, où  $F := p^{-1}(b_0)$  est la fibre et où  $E$  est contractible. Montrer qu'il existe une équivalence d'homotopie faible  $F \xrightarrow{\sim} \Omega B$ .

INDICATION : On admettra la functorialité de la longue suite exacte associée à une fibration.

Soit  $e_0 \in F$  et soit  $H : E \times I \rightarrow E$  l'homotopie contractante de  $E$  où  $H(e, 0) = e$  et  $H(e, 1) = e_*$ , pour un certain  $e_* \in E$  et pour tout  $e \in E$ . On considère l'application  $\Phi : E \rightarrow \text{Path}(B)$  qui envoie  $e \in E$  sur le chemin de  $B$  donné par  $p(H(e_0, 2t))$ , pour  $1 \leq t \leq \frac{1}{2}$ , et par  $p(H(e, 2(1-t)))$ , pour  $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$ . Ceci fournit un morphisme de fibrations, c'est-à-dire un diagramme commutatif de la forme suivante.

$$\begin{array}{ccccc} F & \longrightarrow & E & \longrightarrow & B \\ \downarrow \Phi|_F & & \downarrow \Phi & & \downarrow \text{id} \\ \Omega B & \longrightarrow & \text{Path}(B) & \longrightarrow & B \end{array}$$

La functorialité de la longue suite exacte d'homotopie et la contractibilité de  $E$  et  $\text{Path}(B)$  donnent

$$\begin{array}{ccccccccc} \pi_{n+1}(E) = * & \longrightarrow & \pi_{n+1}(B) & \longrightarrow & \pi_n(F) & \longrightarrow & \pi_n(E) = * & \longrightarrow & \pi_n(B) \\ \downarrow \cong & & \downarrow \text{id} & & \downarrow \pi_n(\Phi|_F) & & \downarrow \cong & & \downarrow \text{id} \\ \pi_{n+1}(\text{Path}(B)) = * & \longrightarrow & \pi_{n+1}(B) & \longrightarrow & \pi_n(\Omega B) & \longrightarrow & \pi_n(\text{Path}(B)) = * & \longrightarrow & \pi_n(B) \end{array}$$

Le lemme des cinq implique alors que  $\Phi|_F : F \xrightarrow{\sim} \Omega B$  est une équivalence d'homotopie faible.

(3) Montrer que  $\Omega \mathbb{P}^\infty \mathbb{C}$  est homotopiquement équivalent à  $S^1$ .

INDICATION : On pourra utiliser le théorème de Moore qui affirme que l'espace de lacets d'un CW-complexe est homotopiquement équivalent à un CW-complexe.

Par passage à la colimite, la fibration de Hopf complexe

$$S^1 \rightarrow S^{2d+1} \rightarrow \mathbb{P}^d \mathbb{C}$$

s'étend en une fibration

$$S^1 \rightarrow S^\infty \rightarrow \mathbb{P}^\infty \mathbb{C} .$$

Le passage aux colimites respectives montrent que ces applications sont bien définies. La topologie faible utilisée pour la colimite définissant le CW-complexe  $\mathbb{P}^\infty \mathbb{C}$  montre qu'on a là une fibration de Serre (car les hypercubes  $I^n$  sont compacts donc leur image par une application continue dans  $\mathbb{P}^\infty \mathbb{C}$  est en fait contenue dans un  $\mathbb{P}^d \mathbb{C}$ ). On a vu dans la feuille d'exercices 3 que la sphère infinie est contractible.

La question précédente donne alors l'existence d'une équivalence faible  $S^1 \xrightarrow{\sim} \Omega \mathbb{P}^\infty \mathbb{C}$ . Comme  $\mathbb{P}^\infty \mathbb{C}$  est un CW-complexe (par définition), le théorème de Moore nous fournit une équivalence d'homotopie  $\mathbb{P}^\infty \mathbb{C} \sim X$  vers un CW-complexe  $X$ . Par le théorème de Whitehead, la composée  $S^1 \rightarrow X$  est une équivalence d'homotopie faible entre CW-complexes, il s'agit donc d'une équivalence d'homotopie. Comme cette dernière notion définit une relation d'équivalence sur les espaces topologiques, on conclut que  $\mathbb{P}^\infty \mathbb{C}$  est homotopiquement équivalent à  $S^1$ .

(4) Calculer les groupes d'homotopie de  $\mathbb{P}^\infty \mathbb{C}$ .

La question précédente, le fait que  $\pi_n(X, x_0) \cong \pi_{n-1}(\Omega X, x_0)$  et le calcul des groupes d'homotopie du cercle  $S^1$  vus en cours montrent que les groupes d'homotopie de  $\mathbb{P}^\infty \mathbb{C}$  sont triviaux sauf  $\pi_2(\mathbb{P}^\infty \mathbb{C}) \cong \mathbb{Z}$ .



**Exercice 2 (Résolution fibrante).**

À tout ensemble partiellement ordonné  $(P, \leq)$ , on associe le complexe simplicial

$$\Delta(P, \leq) := (P, \{\lambda_0 < \dots < \lambda_k\})$$

composé des chaînes  $\lambda_0 < \dots < \lambda_k$  d'éléments de  $P$ , pour tout  $k \geq 0$ .

(1) Pour tout  $n \geq 0$ , on considère l'ensemble totalement ordonné  $[n] := (\{0, \dots, n\}, \leq)$ . À quoi correspond le complexe simplicial  $\Delta([n])$  ?

Le complexe simplicial  $\Delta([n], \leq)$  correspond au complexe simplicial associé aux simplexes géométriques standards  $|\Delta^n|$ . Par exemple, on a

$$\Delta([2], \leq) = (\{0, 1, 2\}, \{\{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}\}) .$$

À tout complexe simplicial  $(V, \mathfrak{X})$ , on associe un ensemble simplicial  $\text{bary}(V, \mathfrak{X})$  dont les  $k$ -simplexes

$$\text{bary}(V, \mathfrak{X})_k := \{F_0 \subseteq \dots \subseteq F_k\}$$

sont les chaînes de faces  $F_i \in \mathfrak{X}$  et dont les applications faces et dégénérescences sont données par

$$d_i(F_0 \subseteq \dots \subseteq F_k) := (F_0 \subseteq \dots \subseteq F_{i-1} \subseteq F_{i+1} \subseteq \dots \subseteq F_k) \quad \text{et}$$

$$s_i(F_0 \subseteq \dots \subseteq F_k) := (F_0 \subseteq \dots \subseteq F_i \subseteq F_i \subseteq \dots \subseteq F_k) .$$

(2) Pour tout  $n \geq 0$ , on considère l'image de  $[n]$  par la composée de ces deux constructions :

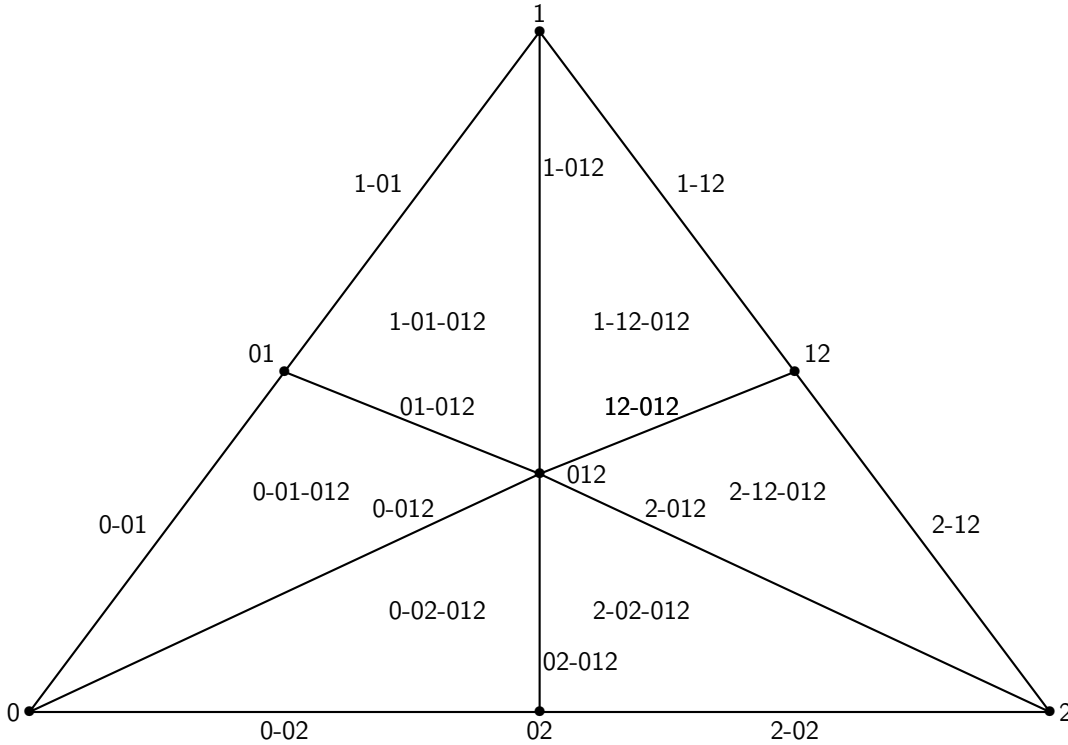
$$\text{sd } \Delta^n := \text{bary}(\Delta([n])) .$$

Décrire l'ensemble simplicial  $\text{sd } \Delta^n$  et représenter graphiquement sa réalisation géométrique  $|\text{sd } \Delta^2|$  avec sa structure cellulaire.

Les simplexes de l'ensemble simplicial  $\text{sd } \Delta^n$  sont les chaînes de sous-ensembles de  $\{0, 1, \dots, n\}$ , comme

$$\{1\} \subseteq \{1, 2\} \subseteq \{1, 2\} \subseteq \{0, 1, 2\} \subseteq \{0, 1, 2\}$$

par exemple. Les simplexes non-dégénérés sont les chaînes de sous-ensembles distincts. Dans le cas  $n = 2$ , l'ensemble simplicial  $\text{sd } \Delta^2$  admet donc 7 0-simplexes non-générés, 12 1-simplexes non-générés et 6 2-simplexes non-générés, comme le montre sa réalisation géométrique.



(3) Montrer que les applications  $\delta_i : [n-1] \rightarrow [n]$  et  $\sigma_i : [n+1] \rightarrow [n]$ , définies par

$$\delta_i(j) := \begin{cases} j & \text{pour } j < i, \\ j+1 & \text{pour } j \geq i, \end{cases} \quad \text{et} \quad \sigma_i(j) = \begin{cases} j & \text{pour } j \leq i, \\ j-1 & \text{pour } j > i, \end{cases}$$

induisent une structure d'ensemble simplicial cosimplicial sur les ensembles simpliciaux  $\text{sd } \Delta^n$ , pour  $n \geq 0$ , par la formule

$$\bar{\delta}_i(F_0 \subseteq \dots \subseteq F_k) = (\delta_i(F_0) \subseteq \dots \subseteq \delta_i(F_k)) \quad \text{et} \quad \bar{\sigma}_i(F_0 \subseteq \dots \subseteq F_k) = (\sigma_i(F_0) \subseteq \dots \subseteq \sigma_i(F_k)).$$

Il est automatique de voir que les applications  $\bar{\delta}_i : \text{sd } \Delta^{n-1} \rightarrow \text{sd } \Delta^n$  et  $\bar{\sigma}_i : \text{sd } \Delta^{n+1} \rightarrow \text{sd } \Delta^n$  sont individuellement de morphismes d'ensembles simpliciaux et que, dans leur ensemble, elles vérifient les relations "cosimpliciales". Plus conceptuellement, on peut remarquer que les deux constructions précédentes définissent chacune un foncteur :

$$\text{Posets} \xrightarrow{\Delta(-)} \text{Complexes Simpliciaux} \xrightarrow{\text{bary}} \text{Ensembles Simpliciaux}.$$

Les applications  $\delta_i$  et  $\sigma_i$  munissent les ensembles partiellement ordonnés  $[n]$ , pour  $n \geq 0$ , d'une structure cosimpliciale. Leurs images par la composée de ces deux foncteurs munissent les  $\text{sd } \Delta^n$ , pour  $n \geq 0$ , d'une structure d'ensemble simplicial cosimplicial, donnée explicitement par

$$\bar{\delta}_i(F_0 \subseteq \dots \subseteq F_k) = (\delta_i(F_0) \subseteq \dots \subseteq \delta_i(F_k)) \quad \text{et} \quad \bar{\sigma}_i(F_0 \subseteq \dots \subseteq F_k) = (\sigma_i(F_0) \subseteq \dots \subseteq \sigma_i(F_k)).$$

(4) On note cet ensemble simplicial cosimplicial par  $\text{sd } \Delta^\bullet : \Delta \rightarrow \text{sSet}$ . Montrer que ce foncteur s'étend en un endofoncteur  $\text{sd} : \text{sSet} \rightarrow \text{sSet}$  via le plongement de Yoneda et qu'il admet un adjoint à droite  $\text{Ex} : \text{sSet} \rightarrow \text{sSet}$  donné par  $\text{Ex } \mathfrak{X} := \text{Hom}_{\text{sSet}}(\text{sd } \Delta^\bullet, \mathfrak{X})$ .

On applique le théorème d'adjonction depuis la catégorie des ensembles simpliciaux. Dans ce cas, l'autre catégorie, notée  $\mathcal{C}$  dans le cours, est encore la catégorie des ensembles simpliciaux. Elle est localement petite (pour toute paire  $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$  d'ensembles simpliciaux,  $\text{Hom}_{\text{sSet}}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$  est un ensemble) et cocomplète (elle admet toutes les colimites). L'ensemble simplicial cosimplicial  $\text{sd } \Delta^\bullet$  induit un endofoncteur de représentation

$$\begin{aligned} \text{Ex} = R_{\text{sd}\Delta^\bullet} : \text{sSet} &\rightarrow \text{sSet} \\ \mathfrak{X} &\mapsto \text{Hom}_{\text{sSet}}(\text{sd } \Delta^\bullet, \mathfrak{X}) . \end{aligned}$$

Il admet un adjoint à gauche  $\text{sd } \Delta^\bullet : \Delta \rightarrow \text{sSet}$  qui est l'extension du foncteur  $\text{sd } \Delta^\bullet$  par le plongement de Yoneda :

$$\begin{array}{ccc} \Delta & \xrightarrow{\text{sd } \Delta^\bullet} & \text{sSet} \\ \text{Y} \downarrow & \nearrow \text{sd} & \\ \text{sSet} & & . \end{array}$$

(5) Décrire l'ensemble simplicial  $\text{sd}(\Delta^2/\partial\Delta^2)$  et représenter graphiquement sa réalisation géométrique  $|\text{sd}(\Delta^2/\partial\Delta^2)|$  avec sa structure cellulaire. Est-ce que  $\text{sd}(\Delta^2/\partial\Delta^2)$  fournit une triangulation de la sphère?

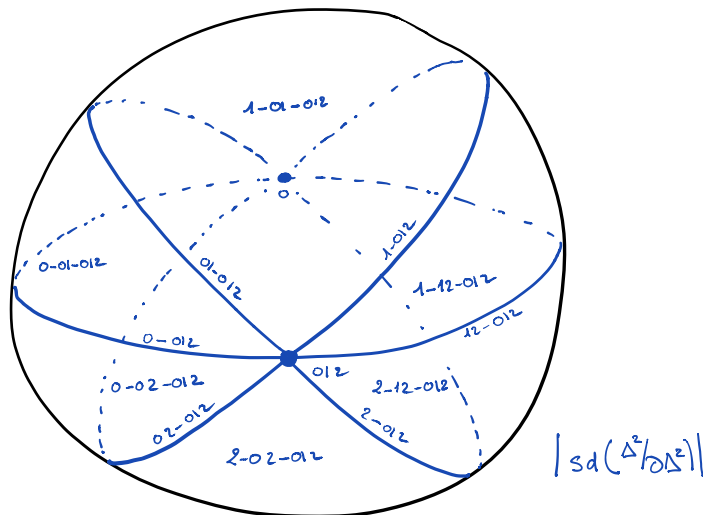
Par définition, le foncteur  $\text{sd}$  est un adjoint à gauche, il préserve donc les colimites. Les colimites suivantes

$$\coprod_{0 \leq i < j \leq 2} \Delta^0 \rightrightarrows \coprod_{0 \leq l \leq 2} \Delta^1 \twoheadrightarrow \partial\Delta^2 \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \partial\Delta^2 & \longrightarrow & \Delta^0 \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ \Delta^2 & \longrightarrow & \Delta^2/\partial\Delta^2 \end{array}$$

donnent donc

$$\coprod_{0 \leq i < j \leq 2} \text{sd } \Delta^0 \rightrightarrows \coprod_{0 \leq l \leq 2} \text{sd } \Delta^1 \twoheadrightarrow \text{sd } \partial\Delta^2 \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \text{sd}(\partial\Delta^2) & \longrightarrow & \text{sd } \Delta^0 \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ \text{sd } \Delta^2 & \longrightarrow & \text{sd}(\Delta^2/\partial\Delta^2) \end{array} .$$

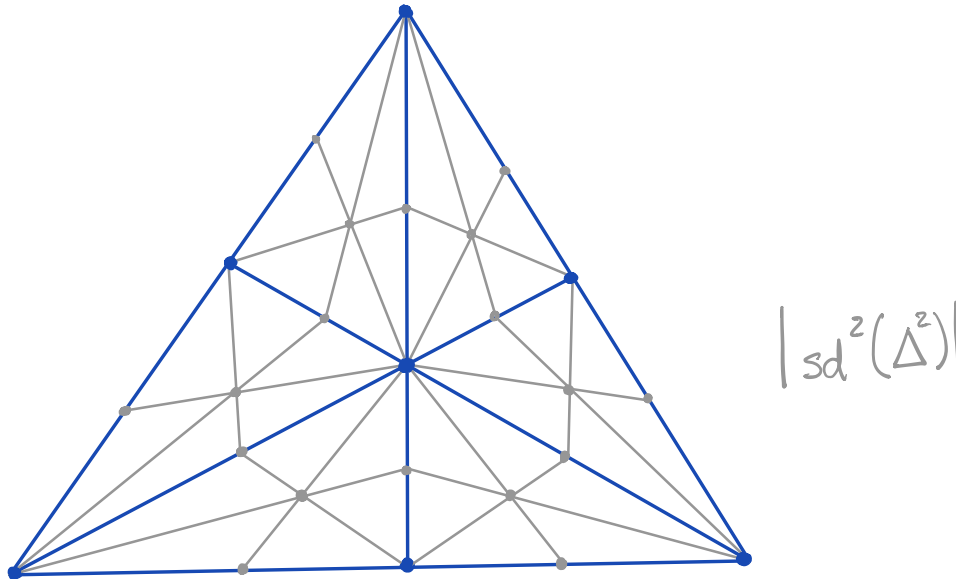
Ceci montre que les simplexes de l'ensemble simplicial  $\text{sd}(\Delta^2/\partial\Delta^2)$  sont formés des chaînes  $F_0 \subseteq \dots \subseteq F_k$  de sous-ensembles de  $\{0, 1, 2\}$  tels que soit au moins un  $F_i = \{0, 1, 2\}$  est l'ensemble tout entier soit tous les  $F_i = \{0\}$  sont égaux à l'ensemble composé uniquement de 0. Les dégénérescences restent les mêmes, à savoir  $s_i(F_0 \subseteq \dots \subseteq F_k) := (F_0 \subseteq \dots \subseteq F_i \subseteq F_i \subseteq \dots \subseteq F_k)$ . Les faces sont données en général par  $d_i(F_0 \subseteq \dots \subseteq F_k) := (F_0 \subseteq \dots \subseteq F_{i-1} \subseteq F_{i+1} \subseteq \dots \subseteq F_k)$  sauf lorsque  $F_{k-1} \subsetneq F_k = \{0, 1, 2\}$ , auquel cas on a  $d_k(F_0 \subseteq \dots \subseteq F_k) = (\{0\} \subseteq \dots \subseteq \{0\})$ . Sa réalisation géométrique  $|\text{sd}(\Delta^2/\partial\Delta^2)|$  est la suivante.



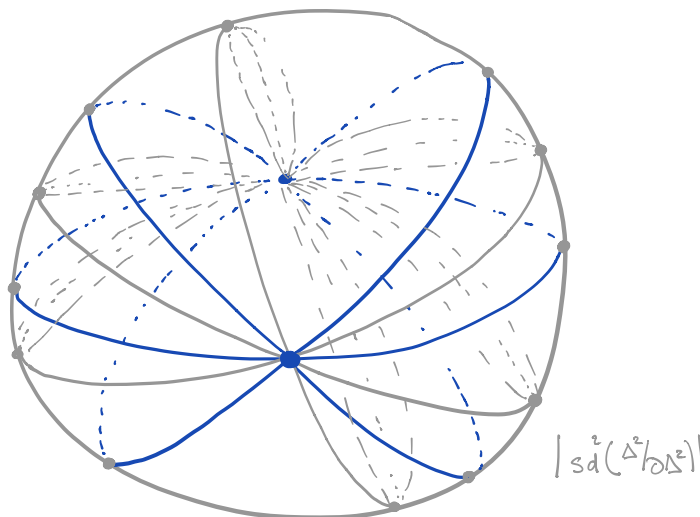
Il ne s'agit pas là d'une triangulation de la sphère car ce CW-complexe n'est pas la réalisation géométrique d'un complexe simplicial : les 6 arêtes ont toutes les deux mêmes sommets, ce qui ne saurait être le cas pour un complexe simplicial.

(6) Représenter graphiquement les réalisations géométriques  $|sd^2(\Delta^2)|$  et  $|sd^2(\Delta^2/\partial\Delta^2)|$  avec leurs structures cellulaires. Est-ce que  $sd^2(\Delta^2/\partial\Delta^2)$  fournit une triangulation de la sphère ?

Les questions précédentes montrent que le foncteur  $sd$  préserve les colimites et que  $sd\Delta^2$  est une triangulation du 2-simplexe (sous-division barycentrique). On obtient donc  $|sd^2(\Delta^2)|$  en sous-divisant chaque 2-simplexe de  $|sd\Delta^2|$  de cette manière. Ceci donne.



De la même manière qu'à la question précédente, on obtient de  $sd^2(\Delta^2/\partial\Delta^2)$  à partir de  $sd^2(\Delta^2)$  en identifiant son bord à un point, ce qui donne la réalisation géométrique suivante.



Il ne s'agit pas d'une triangulation de la sphère car on a le même problème que précédemment : plusieurs arêtes différentes ont les mêmes sommets.

REMARQUE : Pour obtenir une triangulation de la réalisation géométrique d'un ensemble simplicial, il ne faut en général pas appliquer deux fois la sous-division barycentrique mais appliquer la foncteur de Barrat (nerf du poset des simplexes non-dégénérés d'un ensemble simplicial) à la sous-division barycentrique; on renvoie à [Cur71, Chapitre 12] pour plus de détails.

(7) Décrire les  $n$ -simplexes de  $\text{Ex } \mathfrak{X}$  en termes des  $n$ -simplexes de  $\mathfrak{X}$ .

INDICATION : On pourra écrire l'ensemble simplicial  $\text{sd } \Delta^n$  comme un coégalisateur de la forme

$$\coprod_{?} \Delta^{n-1} \begin{array}{c} \xrightarrow{?} \\ \xrightarrow{?} \end{array} \coprod_{\omega \in \mathbb{S}_{[n]}} \Delta^n \twoheadrightarrow \text{sd } \Delta^n,$$

où  $\mathbb{S}_{[n]} \cong \mathbb{S}_{n+1}$  est l'ensemble des bijections de  $[n]$ .

Il est rapide de voir que l'on peut écrire  $\text{sd } \Delta^n$  comme le coégalisateur suivant.

$$\coprod_{0 \leq i \leq n-1} \coprod_{\mathbb{S}_{[n]}/\sim_i} \Delta^{n-1} \begin{array}{c} \xrightarrow{\delta_i} \\ \xrightarrow{\delta_i} \end{array} \coprod_{\omega \in \mathbb{S}_{[n]}} \Delta^n \twoheadrightarrow \text{sd } \Delta^n,$$

où  $\omega \sim_i \omega \circ (i \ i+1)$ . Avec le lemme de Yoneda, cela montre que les  $n$ -simplexes de  $(\text{Ex } \mathfrak{X})_n$  correspondent aux collections  $\{x_\omega \in X_n\}_{\mathbb{S}_{[n]}}$  vérifiant  $d_i(x_\omega) = d_i(x_{\omega \circ (i \ i+1)})$ .

(8) Pour tout  $n \geq 0$ , on considère le morphisme  $\varepsilon_n : \text{sd } \Delta^n \rightarrow \Delta^n$  d'ensembles simpliciaux défini par

$$\varepsilon_n(F_0 \subseteq \cdots \subseteq F_k) := (\max F_0 \leq \cdots \leq \max F_k).$$

Montrer que c'est une équivalence d'homotopie simpliciale.

Pour tout  $n \geq 0$ , on considère le morphisme  $\theta_n : \Delta^n \rightarrow \text{sd } \Delta^n$  d'ensembles simpliciaux défini par

$$\theta_n(i_0 \leq \cdots \leq i_k) := ([i_0] \subseteq \cdots \subseteq [i_k]).$$

Il est clair que  $\varepsilon_n \theta_n = \text{id}_{\Delta^n}$ . Dans l'autre sens, on considère l'homotopie  $H : \text{sd } \Delta^n \times \Delta^1 \rightarrow \text{sd } \Delta^n$  définie par

$$(F_0 \subseteq \cdots \subseteq F_k, \underbrace{0 \cdots 0}_{i+1} \underbrace{1 \cdots 1}_{k-i}) \mapsto (F_0 \subseteq \cdots \subseteq F_i \subseteq [\max F_{i+1}] \subseteq \cdots \subseteq [\max F_k]).$$

On vérifie rapidement qu'il s'agit bien d'un morphisme d'ensembles simpliciaux. Il vérifie  $H(-, 0) = \text{id}_{\text{sd } \Delta^n}$  et  $H(-, 1) = \varepsilon_n \theta_n$ .

On note  $\varepsilon_\bullet : \text{sd } \Delta^\bullet \rightarrow \Delta^\bullet$  le morphisme induit d'ensembles simpliciaux cosimpliciaux. En tirant en arrière par ce dernier, on obtient une transformation naturelle de foncteurs

$$\begin{array}{ccc} \eta & : & \text{id}_{\text{sSet}} \rightarrow \text{Ex} \\ \eta_{\mathfrak{X}} := (\varepsilon_\bullet)^* & : & \mathfrak{X} \cong \text{Hom}_{\text{sSet}}(\Delta^\bullet, \mathfrak{X}) \rightarrow \text{Hom}_{\text{sSet}}(\text{sd } \Delta^\bullet, \mathfrak{X}) = \text{Ex } \mathfrak{X}. \end{array}$$

(9) En déduire que, pour tout ensemble simplicial  $\mathfrak{X}$  et pour tout morphisme  $\lambda : \Lambda_k^n \rightarrow \text{Ex } \mathfrak{X}$ , il existe un morphisme  $\Delta^n \rightarrow \text{Ex}^2 \mathfrak{X}$  d'ensembles simpliciaux rendant le diagramme suivant commutatif

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_k^n & \xrightarrow{\lambda} & \text{Ex } \mathfrak{X} \\ \downarrow & & \downarrow \eta_{\text{Ex } \mathfrak{X}} \\ \Delta^n & \dashrightarrow & \text{Ex}^2 \mathfrak{X}. \end{array}$$

INDICATION : On pourra admettre qu'il existe un morphisme d'ensembles simpliciaux  $\text{sd } \Delta^n \rightarrow \text{Ex } \text{sd } \Lambda_k^n$  factorisant le morphisme  $\eta_{\text{sd } \Lambda_k^n}$  de la manière suivante

$$\begin{array}{ccc} \text{sd } \Lambda_k^n & \xrightarrow{\eta_{\text{sd } \Lambda_k^n}} & \text{Ex } \text{sd } \Lambda_k^n \\ \downarrow & \nearrow \gamma & \\ \text{sd } \Delta^n & & \end{array}.$$

On commence par remarquer que  $\eta_{\text{Ex } \mathfrak{X}} = \text{Ex}(\eta_{\mathfrak{X}})$ . Avec la functorialité de la bijection d'adjonction, ceci implique que l'adjoint à gauche de la composée  $\eta_{\text{Ex } \mathfrak{X}} \circ \lambda$  est égal à la composée

$$\text{sd } \Lambda_k^n \xrightarrow{\bar{\lambda}} \mathfrak{X} \xrightarrow{\eta_{\mathfrak{X}}} \text{Ex } \mathfrak{X},$$

où  $\bar{\lambda}$  est l'adjoint à gauche de  $\lambda$ . En utilisant l'identification canonique  $\mathfrak{Y} \cong \text{Hom}_{\text{sSet}}(\Delta^\bullet, \mathfrak{Y})$  donnée par le lemme de Yoneda, cette composée est égale à

$$\begin{array}{ccccc} \text{Hom}_{\text{sSet}}(\Delta^\bullet, \text{sd } \Lambda_k^n) & \xrightarrow{\bar{\lambda}_*} & \text{Hom}_{\text{sSet}}(\Delta^\bullet, \mathfrak{X}) & \xrightarrow{(\varepsilon_*)^*} & \text{Hom}_{\text{sSet}}(\text{sd } \Delta^\bullet, \mathfrak{X}) \\ & \searrow^{(\varepsilon_*)^*} & & \nearrow_{\bar{\lambda}_*} & \\ & & \text{Hom}_{\text{sSet}}(\text{sd } \Delta^\bullet, \text{sd } \Lambda_k^n) & & \end{array}$$

en faisant commuter le "tiré en arrière" et le "poussé en avant". Cela donne  $\eta_{\mathfrak{X}} \circ \bar{\lambda} = \text{Ex } \bar{\lambda} \circ \eta_{\text{sd } \Lambda_k^n}$ . Au final, l'"adjoint à gauche" du diagramme

$$\begin{array}{ccccc} \Lambda_k^n & \xrightarrow{\lambda} & \text{Ex } \mathfrak{X} & \xrightarrow{\eta_{\text{Ex } \mathfrak{X}}} & \text{Ex}^2 \mathfrak{X} \\ \downarrow & & \nearrow & & \\ \Delta^n & & & & \end{array}$$

est le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} \text{sd } \Lambda_k^n & \xrightarrow{\eta_{\text{sd } \Lambda_k^n}} & \text{Ex } \text{sd } \Lambda_k^n & \xrightarrow{\text{Ex } \bar{\lambda}} & \text{Ex } \mathfrak{X} \\ \downarrow & \nearrow & \nearrow & & \\ \text{sd } \Delta^n & & & & \end{array}$$

où le morphisme en pointillé existe par l'indication.

(10) On pose

$$\text{Ex}^\infty \mathfrak{X} := \text{colim} \left( \mathfrak{X} \xrightarrow{\eta_{\mathfrak{X}}} \text{Ex } \mathfrak{X} \xrightarrow{\eta_{\text{Ex } \mathfrak{X}}} \text{Ex}^2 \mathfrak{X} \xrightarrow{\eta_{\text{Ex}^2 \mathfrak{X}}} \dots \right).$$

Montrer que  $\text{Ex}^\infty \mathfrak{X}$  est un complexe de Kan, pour tout ensemble simplicial  $\mathfrak{X}$ .

Soit  $\mathfrak{X}$  un ensemble simplicial et soit  $f: \Lambda_k^n \rightarrow \text{Ex}^\infty \mathfrak{X}$  un morphisme d'ensembles simpliciaux. On sait que cette donnée est équivalente à la donnée de  $n$  simplexes  $x_0, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n \in (\text{Ex}^\infty \mathfrak{X})_{n-1}$  vérifiant  $d_i(x_j) = d_{j-1}(x_i)$ , pour  $i < j$  différents de  $k$ . Comme les colimites d'ensembles simpliciaux sont données par les colimites ensemblistes sous-jacentes, pour tout  $i = 0, \dots, k-1, k+1, \dots, n$ , il existe  $m_i \in \mathbb{N}$  et  $\bar{x}_i \in (\text{Ex}^{m_i} \mathfrak{X})_{n-1}$  tel que son image  $\bar{x}_i \mapsto x_i \in (\text{Ex}^\infty \mathfrak{X})_{n-1}$  par l'application canonique soit égale à  $x_i$ . En posant  $m := \max_i m_i$ , le morphisme  $f$  se factorise par  $\text{Ex}^m \mathfrak{X}$  :

$$f: \Lambda_k^n \rightarrow \text{Ex}^m \mathfrak{X} \rightarrow \text{Ex}^\infty \mathfrak{X}.$$

En appliquant la question précédente, on a

$$\begin{array}{ccccc} \Lambda_k^n & \longrightarrow & \text{Ex}^m \mathfrak{X} & \longrightarrow & \text{Ex}^\infty \mathfrak{X} \\ \downarrow & & \downarrow \eta_{\text{Ex}^m \mathfrak{X}} & & \nearrow \\ \Delta^n & \dashrightarrow & \text{Ex}^{m+1} \mathfrak{X} & & \end{array}$$

où les morphismes de droite vers  $\text{Ex}^\infty \mathfrak{X}$  sont les applications canoniques vers la colimite.

(11) [BONUS] Montrer l'indication de la question (9).

À faire ... (Utiliser la question (7)).

(11) [BONUS] Montrer que le morphisme canonique  $\theta: \mathfrak{X} \xrightarrow{\sim} \text{Ex}^\infty \mathfrak{X}$  est une équivalence faible d'homotopie, pour tout ensemble simplicial  $\mathfrak{X}$ , c'est-à-dire  $\pi_n(|\theta|): \pi_n(|\mathfrak{X}|, x) \cong \pi_n(|\text{Ex}^\infty \mathfrak{X}|, |f|(x))$  sont des isomorphismes, pour  $n \geq 1$  et  $x \in |\mathfrak{X}|$ , et une bijection pour  $n = 0$ .

On renvoie à [GJ09, Chapter IV, Section 4].

## RÉFÉRENCES

- [Cur71] Edward B. Curtis, *Simplicial homotopy theory*, Adv. Math. **6** (1971), 107–209.
- [GJ09] Paul G. Goerss and John F. Jardine, *Simplicial homotopy theory*, Modern Birkhäuser Classics, Birkhäuser Verlag, Basel, 2009, Reprint of the 1999 edition [MR1711612].