

HOMOTOPY THEORIES

BRUNO VALLETTE

*“In the 20th century, any mathematical theory was built upon set theory.
In the 21th century, new mathematical theories will be built upon a homotopy theory.”*

Yuri I. Manin

ABSTRACT. These are lecture notes of a 5th-year course given at the universities of Paris during the academic years 2018-2019, 2020-2021, 2021-2022, and 2024-2025. The purpose is to develop the first two examples of homotopy theories: topological spaces and simplicial sets. The approach chosen is to present them in a certain uniform way that will lead to their abstractization, as performed by Quillen under the notion of a model category structure. The second goal is to provide the audience with enough material on simplicial sets to open the gates to the study of higher category theory via the notion of an ∞ -category.

CONTENTS

Introduction	2
1. Homotopy theory of topological spaces	4
1.1. Homotopy equivalence and category theory	4
1.2. Categorical topological constructions	9
1.3. Higher homotopy groups	17
1.4. Fibre and cofibre sequences	21
1.5. Fibrations and cofibrations	26
1.6. Computations of homotopy groups	36
1.7. Cell complexes	39
2. Ensembles simpliciaux	48
2.1. Espaces topologiques triangulés	48
2.2. La catégorie des simplexes	54
2.3. Ensembles simpliciaux	55
2.4. Réalisation géométrique	59
2.5. La catégorie des ensembles simpliciaux	60
2.6. Exemples conceptuels	65
2.7. Complexes de Kan et ∞ -catégories	69
2.8. Homotopie simpliciale	73
Appendix A. Théorie des catégories	80
A.1. Préfaisceaux	80
A.2. Extensions de Kan	82
References	88

Date: December 11, 2024.

Key words and phrases. Homotopy theory, topological spaces, simplicial sets, ∞ -category.

First notes of Section 1 taken by Johan Leray: thank you!

INTRODUCTION

The study of topological spaces is that of sets equipped with a way to compare how points are close from one another. We do not care here whether this can be done in a smooth way, so we will leave geometry aside. Examples of topological spaces abound in nature: circle, surfaces, cup of coffee, doughnut, etc. One can study their properties like connectivity, number of holes, etc.

What does it mean to say that two topological spaces are “the same” or “equivalent”, which would imply that they have the same properties? The general mathematical method to answer such a question is to coin the group of “symmetries”, whose action encodes the way to pass from one to another. Given such an action, one identifies the similar objects to be the ones lying in the same orbit.

The first definition that comes to mind is rather categorical in nature: the canonical notion of maps between topological spaces is the one of continuous maps, and one can consider the associated class of “isomorphisms”, that is homeomorphisms. Alright ... but this is actually too strong. For instance, a circle and a doughnut are actually the “same thing” for us since, when the latter one is made up of dough before passing in the oven, one can shrink it to a circle. But, removing two distinct points from the circle, one gets two connected components, which will never happen for the doughnut, so they cannot be homeomorphic ...

A group action induces an equivalence relation, so we can try to weaken this tentative first definition by considering a well chosen equivalence relation. Pursing the above analogy, we view topological spaces as made up of clay that we can stretch, compress but not cut, namely as objects that we can continuously deform. We would like to declare equivalent two spaces obtained from one another in this way and this would definitely preserve the connectivity, number of holes, etc.

In order to make this precise, one has to focus on maps, not on objects, and to introduce the notion of a homotopy for continuous maps. This leads to the notion of homotopy equivalent spaces, that are spaces related by a map which admits an inverse *up to homotopy*. We just opened Pandora’s box! Indeed, this seemingly simple move from “strong” equivalence relation (homeomorphism) to “weak” equivalence relation (homotopy equivalence) will have drastic and exciting consequences.

When one says equivalence relation, one often tries to classify the associated equivalence classes. A proper mathematical way to do this is by introducing invariants, that is “something” (number, group, vector spaces, etc.) which is invariant under the equivalence relation. Then one hopes to get a *complete set* of invariants. For instance, a complete set of invariant of finite dimensional vector spaces under isomorphisms is given by the dimensions. Since at least Poincaré, algebraic topologists have tried to coin such faithful invariants characterising the homotopy type of topological spaces like Betti numbers, (co)homology groups, homotopy groups, etc. Over the 20th century ... they failed! Then they considered some higher algebraic structures made up of collections of operations of any arity, now called E_∞ -algebras. And, at the beginning of the 21st century, they showed [Man06] that they have reached here a rich enough world which detects with accuracy the homotopy type of topological spaces.

Does this “solve” the entire question of classifying topological spaces? No! And, in some sense, it cannot: keep in mind that nobody knows how to compute the homotopy groups of the first topological spaces that are the spheres. So there was no hope to turn this transcendental problem into a simple one. However, since this was a relevant programme of study, algebraic topologists developed many revolutionary mathematical tools along the way. First, category theory, created by Eilenberg–MacLane [EM45] in 1942-45, provides us with the right setting to express the functoriality of constructions, like the invariants of topological spaces. (Grothendieck, the master of categories, introduced and developed extensively this notion in algebraic geometry). In order to uniformise algebraically homotopy theories (topological spaces, simplicial sets, differential graded algebras, rational homotopy theory, etc.), Quillen came up with the conceptual notion of a model category [Qui67]. Operad theory [LV12] (shameless self promotion) arose from the study of iterated loop spaces. At the beginning of the 21th century, it was finally understood how a certain homotopy property imposed on simplicial sets was giving rise to a suitable notion of higher category: ∞ -categories [Lur09]. Notice that already the work of Eilenberg–MacLane was motivated by higher categorical questions: they came up with the notion of a category in order to compare topological invariants, which is achieved by natural transformations that are some kind of 2-morphisms.

The present course will not be viewed by its author as a way to teach once again any new material, but rather as a way to introduce his young fellows to the current methods of mathematical research in order to help them upgrade from students to researchers. We will present the two homotopy theories of topological spaces and simplicial sets in order exhibit their common underlying structures and to ease the way to model category structures, that will be developed extensively in the forthcoming course “Homotopy II” by Grégory Ginot and that will be used in the specialized course “How homotopy theory helps algebraic geometry” by Maria Yakerson, and to ∞ -categories. The topics of this course will also be used in the specialized course “Operads, graph complexes and applications” by Benoit Fresse. In Section 1, we will make explicit the main tools and properties of the homotopy theory for topological spaces, for which we refer to classical references like [May99, tD08, Hat02]. These three manuscripts have different bright advantages. J.P. May’s book [May99] provides the literature with a very concise treatment and focuses on the important points. The long book [tD08] by T. tom Dieck gives full details and proofs. And the clear book [Hat02] of A. Hatcher offers many pictures. In these notes, we tried to merge these respective three main points. Also the categorical presentation giving here follows the development of the algebraic topology during the second half of the 20th century. Category theory was created by algebraic topologists as a need to have a suitable language to express their ideas. In the other way round, algebraic topology was then developed using the universal properties of category theory. The way Section 2 on the homotopy theory of simplicial sets is developed is rather new as it is guided by the quest of a suitable definition of higher category. Here again, we tried to merge the various advantages of the existing texts on the subject: introduce the notion of a simplicial set from simplicial complexes *with pictures*, provide combinatorial descriptions, and fully use the categorical language.

Why should future algebraic geometers or representation theorists, for instance, follow this course: because the recent developments of the ideas triggered by homotopy theory ultimately lead to suitable notions of higher category theory which will provide them with the required framework for their own domains of research. To name but a few, the notion of stable ∞ -category bypasses that of a triangulated category, the main goals of the Langlands programme can finally be formulated using the language of ∞ -categories, derived algebraic geometry can give a meaning to the notion of a tangent space at a singular point, and algebraic ∞ -groupoids give rise to the salient tools of Lie theory and deformation theory.

Prerequisites. The following notions have been studied in the previous course on “Homologie, cohomologie et faisceaux” by Bernhard Keller and will thus be used without recollection here.

CATEGORY THEORY: category, functor, adjunction, limits and colimits, homotopy category (of chain complexes).

ALGEBRAIC TOPOLOGY: topological space, homeomorphism, homotopy equivalence, fundamental group(oid).

Convention. To simplify the presentation of these notes, “space” will mean “topological space” and “map” will mean “continuous map”. In the core of these notes, we will go from the more general to the more particular as we will start by working with any topological spaces, to restrict ourself to locally compact or compactly generated weak Hausdorff spaces from Section 1.4. Finally, we will consider CW-complexes and then simplicial complexes and simplicial sets. The main topic of the present notes is algebraic topology. As a consequence, some point-set topology issues will arise but the treatment we will give them will be far from being exhaustive.

Acknowledgement. These notes would not exist without Johan Lera who decided to type the first version of Section 1. The numerous comments from many students helped correcting many mistakes and to improve the text. We want to express our sincere appreciation to all of them.

1.1. Homotopy equivalence and category theory.

1.1.1. Homotopy categories. The underlying category we will be working in is that of topological spaces (objects) with continuous maps (morphisms). We will denote it by Top . In this category, the isomorphisms are the homeomorphisms, that is continuous maps $f: X \rightarrow Y$ which admit a continuous inverse $g: Y \rightarrow X$ satisfying $gf = \text{id}_X$ and $fg = \text{id}_Y$.

EXAMPLE. Let us recall the following classical topological spaces, for $n \in \mathbb{N}$:

- ◊ the n -dimensional real vector space $\mathbb{R}^n$,
- ◊ the n -dimensional disk D^n ,
- ◊ the n -dimensional sphere $\partial D^{n+1} = S^n$,
- ◊ the cubes I^n , where $I := [0, 1]$ stands for the interval,
- ◊ the geometrical n -simplex $|\Delta^n|$,
- ◊ the boundary of the geometrical n -simplex $\partial|\Delta^n|$,
- ◊ the n -dimensional real projective space $\mathbb{P}^n\mathbb{R}$,
- ◊ the $2n$ -dimensional complex projective space $\mathbb{P}^n\mathbb{C}$.

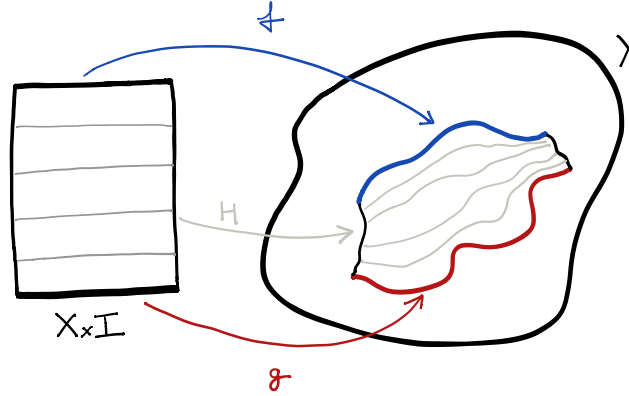
As explained in the introduction, comparing topological spaces under homeomorphisms is too restrictive. Instead, we will use the following more relaxed notion which will meet our needs.

Definition 1.1.1 (Homotopy). Let $f, g: X \rightarrow Y$ be two continuous maps in $\text{Top}(X, Y)$. A *homotopy* from f to g is a continuous map $H: X \times I \rightarrow Y$ such that $H(-, 0) = f$ and $H(-, 1) = g$, which is equivalent to the following commutative diagram:

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{i_0} & X \times I & \xleftarrow{i_1} & X \\ & \searrow f & \downarrow H & \swarrow g & \\ & & Y & & \end{array}$$

Two maps f and g are *homotopic* if there exists a homotopy from f to g ; in this case, we use the notation $f \sim g$. A continuous map $f: X \rightarrow Y$ is *null homotopic* if it is homotopic to a constant map.

We denote the homotopy equivalence class of a continuous map f by $[f]$.



Proposition 1.1.2. For any pair of topological spaces X and Y , the homotopy relation $\sim$ is an equivalence relation on the set $\text{Top}(X, Y)$.

Proof. A homotopy from a map f to itself is given by $H(x, t) := f(x)$. If $H: X \times I \rightarrow Y$ stands for a homotopy from f to g , then a homotopy from g to f is given by $(x, t) \mapsto H(x, -t)$. Let $H: X \times I \rightarrow Y$ be a homotopy from f to g and let $K: X \times I \rightarrow Y$ be a homotopy from g to h , then a direct homotopy from f to h is given by

$$(x, t) \mapsto \begin{cases} H(x, 2t) & \text{for } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ K(x, 2t - 1) & \text{for } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

□

Here is the naive first definition of a category of topological spaces up to the homotopy equivalence relations on continuous maps.

Definition-Proposition 1.1.3 (Homotopy category hoTop). The *homotopy category* hoTop is defined by

OBJECTS: topological spaces,
MORPHISMS: cosets $[X, Y] := \text{Top}(X, Y) / \sim$.

The composite is defined on representatives of classes:

$$\begin{array}{ccc} [X, Y] \times [Y, Z] & \xrightarrow{\circ} & [X, Z] \\ ([f], [g]) & \mapsto & [gf] . \end{array}$$

Proof. It is enough to show that the composite is well defined since then the associativity and unital axioms are straightforward consequences of the associativity and unital axioms of the category Top . It is well defined, because, if one considers $f, f', g, g' : X \rightarrow Y$ such that $[f] = [f']$ and $[g] = [g']$, then $gf \sim g'f'$. Indeed, if we denote by $H : X \times I \rightarrow Y$ a homotopy from f to f' and by $K : Y \times I \rightarrow Z$ a homotopy from g to g' , then $(x, t) \mapsto K(H(x, t), t)$ defines a homotopy from gf to $g'f'$. $\square$

Like in the definition of the group structure on the coset G/N of a group G by a normal subgroup N , the above definition satisfies the following property: the category structure on hoTop is the unique one which makes the assignment $\text{Top} \rightarrow \text{hoTop}$ given by

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & X \\ f \downarrow & & \downarrow [f] \\ Y & \longrightarrow & Y \end{array}$$

into a functor.

One might now ask what are the isomorphisms in the homotopy category hoTop ?

Definition 1.1.4 (Homotopy equivalence). A *homotopy equivalence* is a continuous map denoted by $f : X \xrightarrow{\sim} Y$ such that the induced map $[f]$ is an isomorphism in the homotopy category hoTop , i.e. there exists a continuous map $g : Y \rightarrow X$ such that $gf \sim \text{id}_X$ and $fg \sim \text{id}_Y$.

Definition 1.1.5 (Homotopy equivalent spaces). Two topological spaces X and Y are *homotopy equivalent* if they are isomorphic in the homotopy category hoTop ; this means that there exists a homotopy equivalence $f : X \xrightarrow{\sim} Y$. In this case, we use the notation $X \sim Y$ and we say that X and Y have *the same homotopy type*.

This defines an equivalence relation among topological spaces. A topological space X is *contractible* if it is homotopy equivalent to a point: $X \sim *$.

EXAMPLE (DEFORMATION RETRACT). Here is a practical way to prove that two spaces are homotopy equivalent. Let $X \subset Y$ be a pair of topological spaces. The space X is a *deformation retract* of Y if there exists a *retraction* r

$$X \xhookrightarrow{i} Y \xrightarrow{r} X,$$

satisfying

$$ri = \text{id}_X \quad \text{and} \quad ir \sim \text{id}_Y .$$

The most important example is that of the cylinder construction $i_0 : X \hookrightarrow X \times I$, given by $x \mapsto (x, 0)$. The retraction $r : X \times I \rightarrow X$ is given by $(x, t) \mapsto x$ and the homotopy $H : (X \times I) \times I \rightarrow X \times I$ between $i_0 r$ and $\text{id}_{X \times I}$ is given by $H(x, t, s) = (x, ts)$.

A *topological invariant* is “a natural assignment which sends homotopy equivalences to isomorphisms”; what a long and vague sentence to say: it is a functor $F : \text{Top} \rightarrow \mathcal{C}$ which factors through the canonical “projection” functor

$$\begin{array}{ccc} \text{Top} & \longrightarrow & \text{hoTop} \\ & \searrow F & \downarrow \exists! \\ & & \mathcal{C} . \end{array}$$

This is the case for the various topological invariants that you have encountered so far: homology groups $H_\bullet$, cohomology groups $H^\bullet$, and homotopy groups $\pi_\bullet$, for instance. One can try to characterise the homotopy category by this universal property.

Definition 1.1.6 (Universal homotopy property). A category HoTop satisfies the *universal homotopy property* if it comes equipped with a functor $\text{Top} \rightarrow \text{HoTop}$ which sends homotopy equivalences to isomorphisms and such that any functor $f: \text{Top} \rightarrow \mathcal{C}$ sending homotopy equivalences to isomorphisms factors uniquely through it:

$$\begin{array}{ccc} \text{Top} & \longrightarrow & \text{HoTop} \\ & \searrow F & \downarrow \exists! \tilde{F} \\ & & \mathcal{C} . \end{array}$$

As usual for universal property, when such a category HoTop exists, it is unique up to unique isomorphism. So far it is not obvious that the homotopy category hoTop satisfies the universal homotopy property: why would two homotopy equivalent maps $f, g: X \rightarrow Y$ induce the same map $F(f) = F(g)$ in $\mathcal{C}$?

This raises the question how to build the category HoTop and the present situation is actually quite general: given a category $\mathcal{T}$ and a class $\mathcal{W}$ of morphisms stable by composition and containing the isomorphisms, one can study the existence of the category $\mathcal{T}[\mathcal{W}^{-1}]$ satisfying the universal property with respect to $\mathcal{W}$:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{T} & \longrightarrow & \mathcal{T}[\mathcal{W}^{-1}] \\ & \searrow F & \downarrow \exists! \tilde{F} \\ & & \mathcal{C} . \end{array}$$

A tentative construction is given by a *localisation* process similar to the one which produces the ring of rational numbers from the ring of integers by formally inverting non-zero elements. The objects of $\mathcal{T}[\mathcal{W}^{-1}]$ are the same as the ones of $\mathcal{T}$. The “sets” of morphisms $\mathcal{T}[\mathcal{W}^{-1}](X, Y)$ are given by considering strings of morphisms of $\mathcal{T}$ and formal inverse of morphisms from $\mathcal{W}$

$$X \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \overset{\sim}{\dashrightarrow} \bullet \longrightarrow \bullet \dots \quad \dots \bullet \longrightarrow \bullet \overset{\sim}{\dashrightarrow} \bullet \overset{\sim}{\dashrightarrow} \bullet \longrightarrow Y$$

modulo the equivalence relation generated by

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \approx X \xrightarrow{gf} Z, \quad X \xrightarrow{\sim} Y \overset{\sim}{\dashrightarrow} X \approx \text{id}_X \quad \text{et} \quad Y \overset{\sim}{\dashrightarrow} X \xrightarrow{\sim} Y \approx \text{id}_Y .$$

Be careful that nothing ensures that such a construction renders actually a category as morphisms might not form proper sets. But when it exists, it is called the *localized category* of $\mathcal{T}$ at the class $\mathcal{W}$. In the previous course, you have already encountered such a general construction in the example of the category dg-mod of differential graded modules, with $\mathcal{W}$ the class of quasi-isomorphisms. In this case, the localized category $\text{dg-mod}[\mathcal{W}^{-1}]$ is the derived category.

Proposition 1.1.7. *The homotopy category hoTop satisfies the universal homotopy property; as a consequence it is isomorphic to the localized category*

$$\text{hoTop} \cong \text{Top}[\text{h-eq}^{-1}] ,$$

where the notation h-eq stands for the class of homotopy equivalences.

Proof. Let $F: \text{Top} \rightarrow \mathcal{C}$ be a functor which sends homotopy equivalences to isomorphisms. It factors through the homotopy category hoTop if and only if the assignment

$$(X \xrightarrow{f} Y) \mapsto (F(X) \xrightarrow{F(f)} F(Y))$$

does not depend of f up to homotopy. In this case, the factorisation is unique. Let $f, g: X \rightarrow Y$ be two maps related by a homotopy $H: X \times I \rightarrow Y$. The commutative diagram

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{\sim i_0} & X \times I & \xleftarrow{\sim i_1} & X \\ & \searrow f & \downarrow H & \swarrow g & \\ & & Y & & \end{array}$$

induces the commutative diagram

$$\begin{array}{ccccc}
 F(X) & \xrightarrow[\cong]{F(i_0)} & F(X \times I) & \xleftarrow[\cong]{F(i_1)} & F(X) \\
 & \searrow F(f) & \downarrow F(H) & \swarrow F(g) & \\
 & & Y & &
 \end{array}$$

We consider the abovementioned retract $r : X \times I \rightarrow X$ of i_0 defined by $r(x, t) := x$. Since $F(i_0)$ is an isomorphism and since $F(i_0)F(r) = \text{id}_{F(X \times I)}$, then $F(r)$ is the inverse of $F(i_0)$ in the category $\mathcal{C}$. Since the retractions for i_0 and i_1 are equal to r , then $F(r)$ is also the inverse of $F(i_1)$. This prove that

$$F(f) = F(i_0)F(i_1)^{-1}F(g) = F(i_0)F(r)F(g) = F(g),$$

which concludes the proof. $\square$

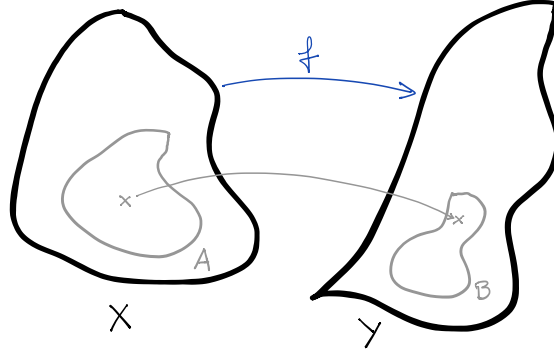
REMARK. One can actually go one step further and show that the localized category and the homotopy category are equivalent to the sub-category of the latter one made up of CW-complexes only. This will be the subject of Section 1.7.

1.1.2. Relative and pointed versions. In the sequel, we will actually need the following relative version of the category of topological spaces.

Definition 1.1.8 (The relative category $\text{Top}_{(2)}$). The *relative category* $\text{Top}_{(2)}$ is defined by

OBJECTS: pairs of spaces (X, A) such that $A \subset X$,

MORPHISMS: a morphism $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ is a continuous map $f : X \rightarrow Y$ such that $f(A) \subset B$.



This category admits a key sub-category where the sub-spaces A are all made up of one point.

Definition 1.1.9 (The category of pointed topological spaces Top_*). The category Top_* of *pointed topological spaces* is defined by

OBJECTS: pairs (X, x) , where $x \in X$,

MORPHISMS: a morphism $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ is a continuous map $f : X \rightarrow Y$ such that $y_0 = f(x_0)$.

In order to compare maps in the relative category $\text{Top}_{(2)}$, we could consider the following notion of homotopy: a continuous map $H : X \times I \rightarrow Y$ such that $H(A, t) \subset B$, for all $t \in I$. In the same way as above, this would define a relative homotopy category $\text{hoTop}_{(2)}$. This notion of a homotopy once applied to the sub-category of pointed topological spaces gives the relevant notion of *pointed homotopy*: a continuous map $H : X \times I \rightarrow Y$ such that $H(x_0, t) = y_0$, for all $t \in I$. This defines the *pointed homotopy category* hoTop_* .

Inspired by this latter case, we actually consider the following more strict version of a relative homotopy.

Definition 1.1.10 (Relative homotopy). Let A be a subspace of X and let $f, g : X \rightarrow Y$ two continuous maps such that $f|_A = g|_A$. The map f is *homotopic to g relatively to A* if there exists a homotopy $H : X \times I \rightarrow Y$ between f and g such that $H(a, t) = f(a) = g(a)$, for all $t \in I$ and for all $a \in A$. In this case, we use the notation $f \sim g \text{ rel } A$.

REMARK. By definition, this notion can compare only maps which agree on their given subspaces; as such it is too narrow to compare the morphisms of the relative category $\text{hoTop}_{(2)}$.

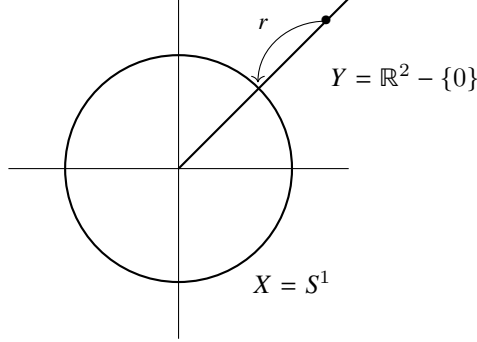
EXAMPLE (STRONG DEFORMATION RETRACT). It turns out that many deformation retract actually carry a stronger property. A subspace $X \subset Y$ is a *strong deformation retract* of Y if there exists a retraction r

$$X \xhookrightarrow{i} Y \xrightarrow{r} X ,$$

satisfying

$$ri = \text{id}_X \quad \text{and} \quad ir \sim \text{id}_Y \text{ rel } X .$$

The example given above $i_0: X \hookrightarrow X \times I$ is actually a strong deformation retract as $H(x, 0, s) = (x, 0)$. Another classical example is given by $X = S^1$ and $Y = \mathbb{R}^2 - \{0\}$, where the retraction is given by $r: y \mapsto y/\|y\|$.



REMARK. There exists further generalizations like $\text{Top}_{(3)}$ which is made up of triples $A \subset B \subset X$, etc.

1.1.3. *Toward higher homotopy categories.* One salient drawback of the homotopy category hoTop is that it forgets the data of homotopies between maps. To bypass this, one might want to consider, for any pair (X, Y) of topological spaces, the tentative category $\Pi(X, Y)$ whose objects are maps from X to Y and whose morphisms are homotopies between maps. But the composite of homotopies fails to be associative since it implies two different reparametrisations of the interval.

This phenomenon can already be seen of the level of the the fundamental groupoid, where is solved as follows. Recall that a groupoid is a category where every morphism is an isomorphism and that the fundamental groupoid $\Pi(X)$ of a topological space X is the groupoid whose objects are the points of X and whose morphisms are *homotopy equivalences* of paths from x to x' , that is maps $\varphi: I \rightarrow X$ such that $\varphi(0) = x$ and $\varphi(1) = x'$. Notice the crucial fact that: with the identification under the homotopy equivalence relation, one now gets an associative and unital composition of paths.

One can merge the above two approaches by first considering all the topological spaces as objects, continuous maps as 1-morphisms and homotopies as 2-morphisms. However, in order to get an associative and unital composition for these latter ones, one has to impose a suitable homotopy relation on homotopies: we consider the coset of homotopies, that is continuous maps $X \times I \rightarrow Y$, under the homotopy relation relative to $X \times \partial I$, where $\partial I = \{0, 1\}$ is the boundary of the interval I . Namely, if H and K are two homotopies from $f: X \rightarrow Y$ to $g: X \rightarrow Y$, then a homotopy from H to K relative to $X \times \partial I$ preserves f and g .

Definition-Proposition 1.1.11 (Homotopy 2-category of topological spaces). The following data

OBJECTS: topological spaces X ,

1-MORPHISMS: continuous maps $f: X \rightarrow Y$,

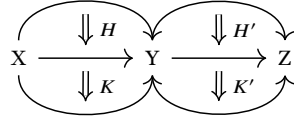
2-MORPHISMS: classes of homotopies from $f: X \rightarrow Y$ to $g: X \rightarrow Y$ modulo homotopies relative to $X \times \partial I$,

forms a 2-category called the *homotopy 2-category of topological spaces*.

$$\begin{array}{ccc} & f & \\ X & \Downarrow & Y \\ & g & \end{array}$$

Proof. This definition-proposition is given as an enlightening example to show how works the quest for higher structures. The details of the proof are neither uninteresting but nor expected here. We refer the reader to any textbook containing the precise definition of a 2-category: a category enriched in small categories. It is then straightforward to check the various axioms in the present case as we have

settled the right definitions. On the way, notice that the compatibility axiom between the horizontal and the vertical composite of 2-morphisms

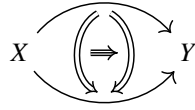


amounts to the interchange law

$$([H] \circ_h [H']) \circ_v ([K] \circ_h [K']) = ([H] \circ_v [K]) \circ_v ([H'] \circ_v [K']),$$

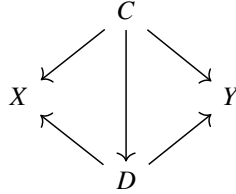
which will play a key role later on in Section 1.3. $\square$

How can one pursue this story higher up? On the one hand, it is rather obvious that considering spaces, maps, homotopies, homotopies of homotopies, etc. is a good way to obtain a certain kind of “ ∞ -category” but how can one make this precise? What are exactly the higher coherences to expect between n -morphisms and m -morphisms? And ... should one be doing this? Maybe because the full data of all the higher homotopy groups characterises the homotopy type of well-behaved spaces like the CW-complexes for instance, see Theorem 1.7.11.

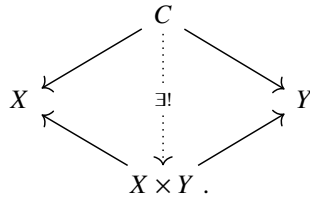


1.2. Categorical topological constructions.

1.2.1. *Categorical constructions in Top.* Let us first recall basic categorical constructions. Consider the diagram category D : $\bullet \rightarrow \bullet$ made up of two objects and only the identity maps. The category $\text{Func}(D, \text{Top})$ of functors from D to Top amounts to pairs of topological spaces. To any such functor, we associate the category $\text{Cone}(F)$ whose objects are the data $X \leftarrow C \rightarrow Y$ and whose morphisms are given by continuous maps $C \rightarrow D$ such that the following diagram is commutative.



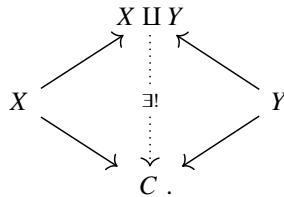
Definition 1.2.1 (Product). The *product* $X \times Y$ of two topological spaces is the terminal object in the category $\text{Cone}(F)$:



Set-theoretically, it is given by the cartesian product endowed with the product topology.

Dually, we consider the category $\text{Cocone}(F)$ of cocones $X \rightarrow C \leftarrow Y$.

Definition 1.2.2 (Coproduct). The *coproduct* $X \amalg Y$ of two topological spaces is the initial object in the category $\text{Cocone}(F)$:



Set-theoretically, it is given by the union with the induced topology.

Let us consider now the diagram category $D : \bullet \rightarrow \bullet \leftarrow \bullet$ and the associated category of functors $\text{Func}(D, \text{Top})$. An object in this latter category amounts to the data of three topological spaces related by two maps $X \rightarrow Z \leftarrow Y$. The category $\text{Cone}(F)$ of cones over such a functor is made up of objects and maps subject to the following commutative diagram.

$$\begin{array}{ccc} C & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & Z \end{array}$$

Definition 1.2.3 (Pullback). The *pullback* $X \times_Z Y$ of two topological spaces along two maps $f: X \rightarrow Z$ and $g: Y \rightarrow Z$ is the terminal object in the category $\text{Cone}(F)$:

$$\begin{array}{ccccc} C & & & & \\ & \searrow \exists! & & \searrow & \\ & X \times_Z Y & \longrightarrow & Y & \\ & \downarrow & \lrcorner & \downarrow g & \\ & X & \xrightarrow{f} & Z & \end{array}$$

Set-theoretically, it is given by

$$X \times_Z Y = \{(x, y) \mid f(x) = g(y)\}$$

endowed with the induced topology of a sub-space of a product.

REMARK. The notion of a pullback is also called fibre product, fibered product, or Cartesian square, in the literature. When the map g is a (canonical) epimorphism, we use the notation $X \times_f Y$.

Passing to the opposite category, we now consider the diagram category $D^{\text{op}} : \bullet \leftarrow \bullet \rightarrow \bullet$, the associated category of functors $\text{Func}(D^{\text{op}}, \text{Top})$, and the category $\text{Cocone}(F)$ of cocones over such functors.

Definition 1.2.4 (Pushout). The *pushout* $X \amalg_Z Y$ of two topological spaces along two maps $f: X \rightarrow Z$ and $g: Y \rightarrow Z$ is the initial object in the category $\text{Cocone}(F)$:

$$\begin{array}{ccccc} Z & \xrightarrow{g} & Y & & \\ f \downarrow & \lrcorner & \downarrow & \searrow & \\ X & \longrightarrow & X \amalg_Z Y & & \\ & \searrow & & \searrow \exists! & \\ & & & & C \end{array}$$

Set-theoretically, it is given by

$$X \amalg_Z Y = \frac{X \amalg Y}{f(x) \sim g(y)}$$

endowed with the coset topology.

REMARK. The notion of a pushout is also called fibered coproduct, fibered sum, cocartesian square or amalgamated sum, in the literature. When the map f is a (canonical) monomorphism, we rather use the notation $X \amalg_g Y$.

On a set-theoretical level, we have the following classical adjunction,

$$- \times Y : \text{Set} \xrightleftharpoons{\quad \perp \quad} \text{Set} : (-)^Y$$

given by the natural bijection

$$(1) \quad \text{Set}(X \times Y, Z) \cong_{\text{nat.}} \text{Set}(X, \text{Set}(Y, Z)) .$$

REMARK. Such a monoidal category is called *cartesian* since the monoidal product is the categorical product. It is called *closed* since it admits internal homs. In cartesian closed monoidal categories, the internal homs are usually called *exponential objects* and denoted under the exponential notation Z^Y . When this is the case, the category is enriched over itself.

We would like to promote this onto the topological level. In order to do so, we first need to endow the mapping set $\text{Set}(Y, Z)$ with a suitable topology that we will denote by Z^Y . The following one is commonly used.

Definition-Proposition 1.2.5 (Compact-open topology). Let X and Y be two topological spaces. For any compact set K of X and any open set U of Y , we consider the set

$$W(K, U) := \{f : X \rightarrow Y \mid f(K) \subset U\}.$$

The sets defined by finite intersections of such $W(K, U)$ give us a basis of a topology for $Y^X = \text{Set}(X, Y)$, called *the compact-open topology*.

Proof. This is an easy exercise of point-set topology. It is enough to see that the sets $W(K, U)$, for $K \subset X$ compact and $U \subset Y$ open, cover the entire mapping space Z^Y . $\square$

EXERCISE. Show that, for any continuous map $f : X \rightarrow Y$, the pullback map $f^* : Z^Y \rightarrow Z^X$ and the push-forward map $f_* : X^Z \rightarrow Y^Z$ are continuous.

The compact-open topology does not always behave nicely with respect to all topological spaces. As a consequence, we will often have to restrict ourselves to some sub-categories.

Definition 1.2.6 (Locally compact). A topological space is *locally compact* if any neighbourhood of a point contains a compact neighbourhood.

EXAMPLE. All the topological spaces considered in this course are locally compact: $\mathbb{R}^n$, D^n , $\partial D^{n+1} = S^n$, I^n , $|\Delta^n|$, $\partial|\Delta^n|$, $\mathbb{P}^n\mathbb{R}$, $\mathbb{P}^n\mathbb{C}$, etc.

Proposition 1.2.7 (Evaluation map). When X is a locally compact space, the evaluation map, defined by

$$\begin{aligned} e : Y^X \times X &\longrightarrow Y \\ (f, x) &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

is continuous.

Proof. Let U be an open set of Y and let $(f, x) \in Y^X \times X$ be such that $e(f, x) = f(x) \in U$. Since f is continuous, $f^{-1}(U)$ is open in X and since X is locally compact, there exists a compact neighbourhood K of x in $f^{-1}(U)$. Let V be an open set of K containing x . Then (f, x) lives in the open set $W(K, U) \times V$ of $Y^X \times X$ which is included in $e^{-1}(U)$. $\square$

Theorem 1.2.8. For any locally compact space Y , the following pair of functors are adjoint.

$$- \times Y : \text{Top} \xrightleftharpoons{\perp} \text{Top} : (-)^Y$$

This means that the natural bijection (1) holds on the level of the topological categories

$$(2) \quad \text{Top}(X \times Y, Z) \cong_{\text{nat.}} \text{Top}(X, Z^Y) .$$

Proof. It is enough to check that a map $f : X \times Y \rightarrow Z$ is continuous if and only if the induced map $\check{f} : X \rightarrow Z^Y$ is continuous.

($\Rightarrow$) Let K be a compact set of Y and let U be an open set of Z . Any element $x \in \check{f}^{-1}(W(K, U)) = \{x \in X \mid f(x, K) \subset U\}$ satisfies $\{x\} \times K \subset f^{-1}(U)$. Since f is continuous, this latter set is open, so there exists an open neighbourhood V of x in X such that $V \times K \subset f^{-1}(U)$, by the properties of the product topology.

($\Leftarrow$) The map $f : X \times Y \rightarrow Z$ is the composite of the following two maps

$$f : X \times Y \xrightarrow{\check{f} \times \text{id}} Z^Y \times Y \xrightarrow{e} Z ,$$

which are continuous by Proposition 1.2.7. $\square$

In other words, the category of locally compact topological spaces is cartesian closed monoidal. One natural question to study from this situation is: can we internalize this adjunction, that is can we have a natural homeomorphism between $Z^{X \times Y} = \text{Top}(X \times Y, Z)$ and $(Z^Y)^X = \text{Top}(X, Z^Y)$? Otherwise stated, is the category of topological spaces *enriched* over itself? This is actually the case for any closed monoidal category. However, this cannot hold for the entire category Top but for a big enough subcategory of it.

Theorem 1.2.9 (Exponential law). *Let X and Y be locally compact topological spaces. Then the natural isomorphism (2) is an homeomorphism*

$$Z^{X \times Y} \underset{\substack{\text{nat.} \\ \text{homeo.}}}{\cong} (Z^Y)^X .$$

Proof. The proof is categorial in nature as its states that in any closed monoidal category the natural bijection is internal.

We first need to prove that the adjunction map

$$\smile : Z^{X \times Y} = \text{Top}(X \times Y, Z) \rightarrow (Z^Y)^X = \text{Top}(X, Z^Y)$$

which sends $f: X \times Y \rightarrow Z$ to $\check{f}: X \rightarrow Z^Y$ is continuous. This follows from the following steps. Notice first that, since X and Y are locally compact, so does their product $X \times Y$. This implies that the evaluation map

$$e_{X \times Y, Z} : Z^{X \times Y} \times (X \times Y) \rightarrow Z$$

is continuous, by Proposition 1.2.7. The proof of Theorem 1.2.8 shows that, viewing it as a map from $(Z^{X \times Y} \times X) \times Y$ to Z , its first adjoint map

$$\check{e}_{X \times Y, Z} : Z^{X \times Y} \times X \rightarrow Z^Y$$

is continuous and so does its second adjoint map

$$\check{\check{e}}_{X \times Y, Z} : Z^{X \times Y} \rightarrow (Z^Y)^X ,$$

which is equal to the adjunction map $\smile$.

Applying Theorem 1.2.8 to all these maps, one gets the following bijections, whose composite is equal to the push-forward by the adjunction map $\smile$:

$$\text{Top}(A, Z^{X \times Y}) \cong \text{Top}(A \times X \times Y, Z) \cong \text{Top}(A \times X, Z^Y) \cong \text{Top}\left(A, (Z^Y)^X\right) ,$$

for any topological space A . Since the category Top of topological spaces is locally small, the Yoneda functor $\text{Top} \rightarrow \text{Fun}(\text{Top}^{\text{op}}, \text{Set})$ given by $W \mapsto (A \mapsto \text{Top}(A, W))$ is fully faithful, which implies that the continuous map $\smile : Z^{X \times Y} \rightarrow (Z^Y)^X$ is an homeomorphism. $\square$

Corollary 1.2.10. *For any locally compact space Y , the following pair of functors are adjoint.*

$$- \times Y : \text{hoTop} \underset{\perp}{\overset{\quad}{\longrightarrow}} \text{hoTop} : (-)^Y .$$

Proof. We first have to check that these functors are well defined. Let $H: X \times I \rightarrow X'$ be a homotopy between $f: X \rightarrow X'$ and $g: X \rightarrow X'$. The map $X \times Y \times I \rightarrow X' \times Y$ defined by $(x, y, t) \mapsto (H(x, t), y)$ is a homotopy between $f \times \text{id}_Y$ and $g \times \text{id}_Y$. Similarly, the map $X^Y \times I \rightarrow X'^Y$ defined by $(\varphi, t) \mapsto (y \mapsto H(\varphi(y), t))$ is a homotopy between f_* and g_* . So both functors $- \times Y$ and $(-)^Y$ pass to the homotopy category.

It remains to show that the bijection of the adjunction of Theorem 1.2.8 also passes to the homotopy category. This is giving by the fact that $f, g: X \times Y \rightarrow Z$ are homotopic if and only if $\check{f}, \check{g}: X \rightarrow Z^Y$ are homotopic. Let $H: X \times Y \times I \rightarrow Z$ be a homotopy between f and g , then the assignment $X \times I \rightarrow Z^Y$ given by $(x, t) \mapsto (y \mapsto H(x, y, t))$ is a homotopy between $\check{f}$ and $\check{g}$. In the other way round, let $K: X \times I \rightarrow Z^Y$ be a homotopy between $\check{f}$ and $\check{g}$, the assignment $X \times Y \times I \rightarrow Z$ given by $(x, y, t) \mapsto K(x, t)(y)$ is a homotopy between f and g . **K equal to composite with eval, need Y locally compact** $\square$

There is exist a more relaxed notion, called *compactly generated weak Hausdorff space* under which the above properties hold. We refer the reader to [May99, Chapter 5] for more details. **Such spaces form a subcategory of Top which is one of the favorite categories of algebraic topologists and in which we will work implicitly here in order to avoid pathologies like the present one and to get a clean presentation.** The details of definitions are not relevant for this course. In order to understand some assumptions that we will make later on, just have in mind that one needs to consider a different topology on the product $X \times Y$ of compactly generated weak Hausdorff spaces, but this topology agrees with the classical one when X or Y is locally compact.

Theorem 1.2.8 gives in particular a natural bijection

$$\text{Top}(X \times I, Y) \cong \text{Top}(X, Y^I) ,$$

which is a natural homeomorphism when X is locally compact. This opens the door to a tentative equivalent definition of a homotopy, originally defined with a *cylinder object* $X \times I$, now by means of a *path object* Y^I .

Definition 1.2.11 (Cohomotopy). Let $f, g : X \rightarrow Y$ be two continuous maps. A *cohomotopy* between f and g is a continuous map $\check{H} : X \rightarrow Y^I$ such that the following diagram commutes

$$\begin{array}{ccccc} & & X & & \\ & f \swarrow & \downarrow \check{H} & \searrow g & \\ Y & \xleftarrow{e_0} & Y^I & \xrightarrow{e_1} & Y \end{array}$$

where $e_0 := e(-0)$ and $e_1 := e(-, 1)$.

Proposition 1.2.12. *Two maps are homotopic if and only if they are cohomotopic.*

Proof. This is a direct corollary of Theorem 1.2.8 since the interval I is locally compact. $\square$

1.2.2. *Categorical constructions in Top_* .* Let us now try to settle similar constructions and results in the category of pointed topological spaces Top_* . At the beginning, only the construction of the coproduct has to be modified.

Proposition 1.2.13. *In the category Top_* of pointed topological spaces, the following objects provide us to the relevant limits and colimits.*

PRODUCT: $(X, x_0) \times (Y, y_0) = (X \times Y, (x_0, y_0))$.

COPRODUCT: *the wedge or bouquet*

$$(X, x_0) \vee (Y, y_0) := \left(\frac{X \amalg Y}{x_0 \sim y_0}, x_0 \sim y_0 \right).$$

PULLBACK: $(X, x_0) \times_{(Z, z_0)} (Y, y_0) = (X \times_Z Y, (x_0, y_0))$.

PUSHOUT: $(X, x_0) \amalg_{(Z, z_0)} (Y, y_0) = (X \amalg_Z Y, x_0 \sim y_0)$.

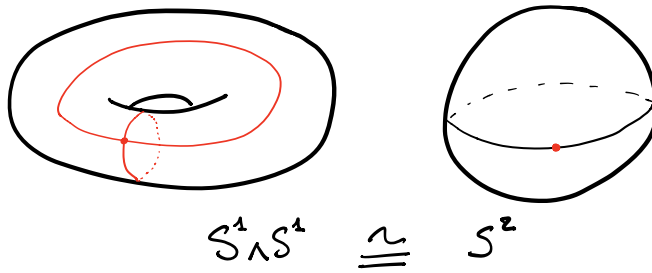
Proof. The various verifications are straightforward and thus left to the reader. $\square$

REMARK. When the base point will be understood, we will lighten the notation and not write it all the time; for instance, we will simply write $X \vee Y$ for the wedge.

Next question: what is the base point of $\text{Top}_*(Y, Z)$, when (Y, y_0) and (Z, z_0) are pointed? The answer is easy: the constant map $\text{cst} : y \mapsto z_0$. But then, the pointed product of spaces does not induce and natural bijection between $\text{Set}_*(X \times Y, Z)$ and $\text{Set}_*(X, \text{Set}_*(Y, Z))$; so we have to refine it.

Definition 1.2.14 (Smash product). Let (X, x_0) and (Y, y_0) be two pointed spaces. The *smash product* of X and Y is defined by

$$X \wedge Y := \frac{X \times Y}{X \times \{y_0\} \cup \{x_0\} \times Y}.$$



REMARK. One can embed the wedge into the product $X \vee Y \hookrightarrow X \times Y$ under the assignment $x \mapsto (x, y_0)$ and $y \mapsto (x_0, y)$. Under this embedding, the smash product is equivalently given by

$$X \wedge Y = \frac{X \times Y}{X \vee Y}.$$

The smash product is associative up to homeomorphism (for compactly generated weak Hausdorff spaces), that is $(X \wedge Y) \wedge Z \cong X \wedge (Y \wedge Z)$ and the “point” $S^0 = \{*, \star\}$ is the unit of it $S^0 \wedge X \cong X$.

In the pointed case, since the context is obvious, we denote by $Z^Y = \text{Top}_*(Y, Z)$ the subspace of $\text{Top}(Y, Z)$ made up of pointed maps that we equip with the compact-open topology.

Theorem 1.2.15 (Exponential law). *For any locally compact pointed space (Y, y_0) , the following pair of functors are adjoint*

$$- \wedge Y : \text{Top}_* \xrightleftharpoons[\perp]{} \text{Top}_* : (-)^Y ,$$

meaning that there exists a natural bijection

$$\text{Top}_*(X \wedge Y, Z) \cong_{\text{nat.}} \text{Top}_*(X, Z^Y) .$$

Moreover, when (X, x_0) is also locally compact, this induces a natural pointed homeomorphism

$$Z^{X \wedge Y} \cong_{\substack{\text{nat.} \\ \text{homeo.}}} (Z^Y)^X .$$

Proof. By definition, the smash product provides us with a natural bijection

$$\text{Set}_*(X \wedge Y, Z) \cong_{\text{nat.}} \text{Set}_*(X, Z^Y) ,$$

which satisfies all the required properties in the pointed case by the same arguments as given above. $\square$

REMARK. If one compares the present situation with the one of vector spaces, then the smash product should be viewed as a tensor product rather than a product, as the product in the category of pointed topological spaces is given by the underlying product of sets.

Corollary 1.2.16. *For any locally compact pointed space Y , the following pair of functors are adjoint.*

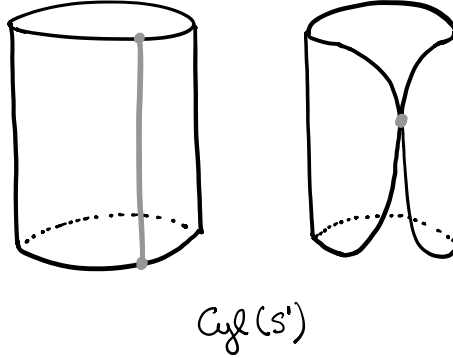
$$- \wedge Y : \text{hoTop}_* \xrightleftharpoons[\perp]{} \text{hoTop}_* : (-)^Y .$$

Proof. It is a direct corollary of Theorem 1.2.15 with the arguments given in the proof of Corollary 1.2.10. $\square$

We saw that the data of a homotopy amounts to a map in Top from the construction $X \times I$ to Y . What is the analogous “cylinder” construction in the category Top_* of pointed topological spaces?

Definition 1.2.17 (Cylinder of a pointed topological space). The *cylinder* of a pointed topological space (X, x_0) is defined by:

$$\text{Cyl}(X) := \frac{X \times I}{\{x_0\} \times I} .$$



Proposition 1.2.18. *The data of a pointed homotopy between pointed maps from X to Y is equivalent to a map in Top_* from the cylinder $\text{Cyl}(X)$ to Y :*

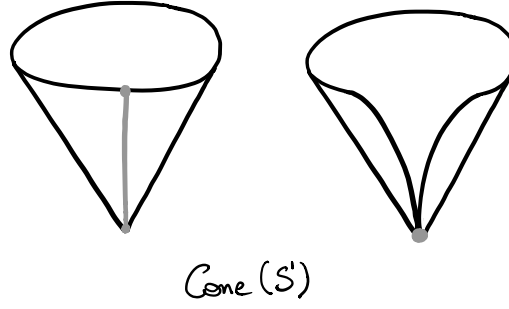
$$\left\{ \begin{array}{l} H : X \times I \rightarrow Y \\ H(x_0, t) = y_0 \end{array} \right\} \cong \text{Top}_*(\text{Cyl}(X), Y) .$$

Proof. The proof is straightforward and thus left to the reader. $\square$

Let us pursue one step further and try to find a universal construction which (co)represents the data of a homotopy from the constant map.

Definition 1.2.19 (Cone of a pointed topological space). The *cone* of a pointed topological space (X, x_0) is defined by:

$$\text{Cone}(X) := \frac{X \times I}{\{x_0\} \times I \cup X \times \{0\}} .$$



Proposition 1.2.20. *The data of a pointed homotopy from the constant map to a pointed map from X to Y is equivalent to a map in Top_* from the cone $\text{Cone}(X)$ to Y :*

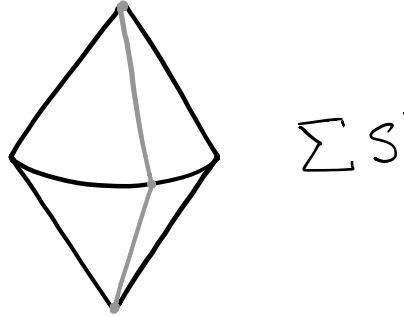
$$\left\{ \begin{array}{l} H : X \times I \rightarrow Y \\ H(x_0, t) = y_0 \\ H(x, 0) = y_0 \end{array} \right\} \cong \text{Top}_*(\text{Cone}(X), Y) .$$

Proof. The proof is straightforward and thus left to the reader. □

Let us now address the more symmetric question: what is the universal construction which (co)represents the data of a homotopy from and to the constant map.

Definition 1.2.21 (Suspension of a pointed topological space). The *suspension* of a pointed topological space (X, x_0) is defined by:

$$\Sigma X := \frac{X \times I}{\{x_0\} \times I \cup X \times \partial I} .$$



Proposition 1.2.22. *The data of a pointed homotopy from and to the constant map from X to Y is equivalent to a map in Top_* from the suspension ΣX to Y :*

$$\left\{ \begin{array}{l} H : X \times I \rightarrow Y \\ H(x_0, t) = y_0 \\ H(x, 0) = y_0 \\ H(x, 1) = y_0 \end{array} \right\} \cong \text{Top}_*(\Sigma X, Y) .$$

Proof. The proof is straightforward and thus left to the reader. □

These three constructions are functorial and, since they are defined by successive quotients, the natural “projections”

$$\text{Cyl}(X) \rightarrow \text{Cone}(X) \rightarrow \Sigma X$$

induce natural transformations

$$\text{Cyl} \implies \text{Cone} \implies \Sigma .$$

Now one can start looking for the analogous constructions on the right-hand side of the adjunction of Theorem 1.2.8 in the category of pointed spaces. Notice that one main drawback of the ubiquitous interval I is that it is not canonically pointed. However the exponential object $X^I = \text{Top}(I, X)$ is always pointed by the constant map as soon as X is.

Proposition 1.2.23. *The cylinder and the exponential object form a pair of adjoint functors*

$$\text{Cyl} : \text{Top}_* \xrightleftharpoons{\perp} \text{Top}_* : (-)^I ,$$

whose natural bijection

$$\text{Top}_*(\text{Cyl}(X), Y) \underset{\substack{\text{nat.} \\ \text{homeo.}}}{\cong} \text{Top}_*(X, Y^I)$$

is an homeomorphism as soon as the pointed space (X, x_0) is locally compact.

Proof. By the definition of the cylinder, we get a natural bijection on the pointed set level

$$\text{Set}_*(\text{Cyl}(X), Y) \underset{\text{nat.}}{\cong} \text{Set}_*(X, Y^I) .$$

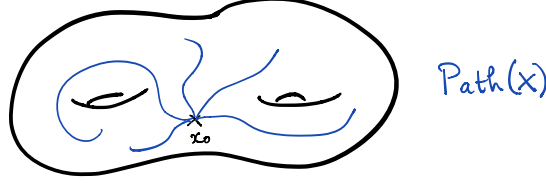
The rest follows directly from the arguments given above since the interval i is locally compact. $\square$

This shows that the data of a pointed homotopy between two pointed maps $f, g : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ is equivalent to a pointed map $\check{H} : (X, x_0) \rightarrow (Y^I, \text{cst})$ satisfying the following commutative diagram in Top_* :

$$\begin{array}{ccccc} & & X & & \\ & f \swarrow & \downarrow \check{H} & \searrow g & \\ Y & \xleftarrow{e_0} & Y^I & \xrightarrow{e_1} & Y \end{array} .$$

Definition 1.2.24 (Path space). The *path space* of a pointed topological space (X, x_0) is defined by

$$\text{Path}(X) := \{\varphi : I \rightarrow X \mid \varphi(0) = x_0\} \subset X^I .$$



Proposition 1.2.25. The cone and the path space define a pair of adjoint functors

$$\text{Cone} : \text{Top}_* \underset{\perp}{\overset{\longrightarrow}{\longrightarrow}} \text{Top}_* : \text{Path} ,$$

whose the natural bijection

$$\text{Top}_*(\text{Cone}(X), Y) \underset{\substack{\text{nat.} \\ \text{homeo.}}}{\cong} \text{Top}_*(X, \text{Path}(Y))$$

is an homeomorphism as soon as the pointed space (X, x_0) is locally compact.

Proof. The same arguments as above apply. $\square$

So the data of a pointed homotopy from the constant map to a pointed map $f : X \rightarrow Y$ is equivalent to a pointed map $\check{H} : X \rightarrow \text{Path}(Y)$ such that $e_1(\check{H}) = f$.

Definition 1.2.26 (Loop space). The *loop space* of a pointed topological space (X, x_0) is defined by

$$\Omega X := \{\varphi : I \rightarrow X \mid \varphi(0) = x_0 = \varphi(1)\} \subset X^I .$$

The loop space is equivalently defined by

$$\Omega X \cong \text{Top}_*(S^1, X) .$$

Proposition 1.2.27. The suspension and the loop space define a pair of adjoint functors

$$\Sigma : \text{Top}_* \underset{\perp}{\overset{\longrightarrow}{\longrightarrow}} \text{Top}_* : \Omega ,$$

whose the natural bijection

$$\text{Top}_*(\Sigma X, Y) \underset{\substack{\text{nat.} \\ \text{homeo.}}}{\cong} \text{Top}_*(X, \Omega Y)$$

is an homeomorphism as soon as the pointed space (X, x_0) is locally compact.

Proof. The same arguments as above apply. $\square$

This shows that the data of a pointed homotopy between from and to the constant map is equivalent to a pointed map $X \rightarrow \Omega Y$.

The canonical embeddings

$$X^I \hookrightarrow \text{Path}(X) \hookrightarrow \Omega X$$

induce natural transformations

$$(-)^I \Longrightarrow \text{Path} \Longrightarrow \Omega.$$

Corollary 1.2.28. *The suspension and the loop space define a pair of adjoint functors on the level of the pointed homotopy category*

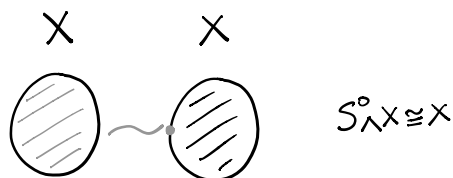
$$\Sigma : \text{hoTop}_* \xrightleftharpoons[\perp]{} \text{hoTop}_* : \Omega.$$

Proof. It is a direct corollary of Proposition 1.2.27 with the arguments given in the proof of Corollary 1.2.10. $\square$

7/11/24

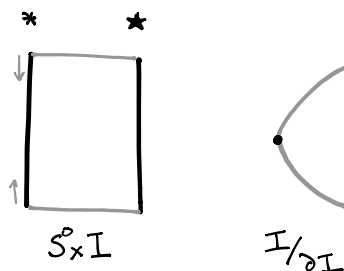
1.3. Higher homotopy groups.

1.3.1. *Suspension and smash product.* Before to proceed even further, let us get more acquainted with the notions of smash product and suspension. We already noticed that $S^0 := \{*, \star\}$ is the unit for the smash product: $S^0 \wedge X \cong X$.



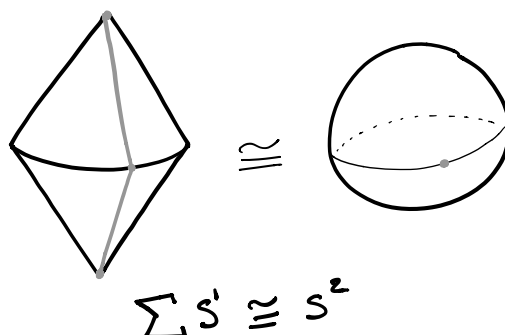
The first computations of the suspension show

$$\Sigma S^0 \cong S^1 \cong I/\partial I$$



and

$$\Sigma^2 S^0 \cong \Sigma S^1 \cong S^2 \cong I^2/\partial I^2.$$



$$\Sigma S^1 \cong S^2$$

For any pointed topological space X , one notices that

$$\Sigma X \cong X \wedge I/\partial I.$$

Proposition 1.3.1. *The iterated suspension of any pointed topological space X is given by*

$$\Sigma^n X \cong X \wedge I^n/\partial I^n,$$

for $n \geq 1$.

Proof. Let us prove this assertion by induction on $n \geq 1$. The case $n = 1$ holds by the remark above. Suppose now that the result holds for n , that is $\Sigma^n X \cong X \wedge I^n / \partial I^n$, and let us show it for $n + 1$ as follows. We have

$$\begin{aligned} \Sigma^{n+1} X &= \Sigma(\Sigma^n X) \underset{\text{ind.}}{\cong} \Sigma(X \wedge I^n / \partial I^n) \\ &\cong (X \wedge I^n / \partial I^n) \wedge I / \partial I \\ &\cong X \wedge (I^n / \partial I^n \wedge I / \partial I) \\ &\cong X \wedge I^{n+1} / \partial I^{n+1}. \end{aligned}$$

In the third line, we used the fact that I is (locally) compact for the associativity of the smash product. In the last line, we used the identification

$$\frac{I^n}{\partial I^n} \wedge \frac{I}{\partial I} \cong \frac{I^n \times I}{\partial I^n \times I \cup I^n \times \partial I} \cong \frac{I^{n+1}}{\partial I^{n+1}}.$$

□

Corollary 1.3.2. *For any $n \geq 1$, the following pointed topological spaces are homeomorphic*

$$\Sigma^n S^0 \cong I^n / \partial I^n \cong S^n.$$

Proof. The first pointed homeomorphism is a direct consequence of Proposition 1.3.1 and the fact that S^0 is the unit for the smash product. For the second homeomorphism, it remains to show that $I^n / \partial I^n$ is a model for the n -dimensional sphere. Recall that this latter one is given by

$$S^n := \partial D^{n+1} \cong \partial I^{n+1} \cong I^n / \partial I^n.$$

Indeed, the boundary ∂I^{n+1} of the $n+1$ -dimensional cube is made up of $2(n+1)$ faces homeomorphic to I^n . Chose one of them and stretch its boundary to cover the $2(n+1) - 1$ other faces. This gives the last displayed homeomorphism. □

REMARK (SPHERE SPECTRUM). Corollary 1.3.2 shows that the sequence of spheres can be obtained by iterating the suspension operation:

$$S^0 \xrightarrow{\Sigma} S^1 \xrightarrow{\Sigma} S^2 \xrightarrow{\Sigma} S^3 \xrightarrow{\Sigma} \dots$$

This universal object is called *the sphere spectrum* and it plays a seminal role in stable homotopy theory. The category of spectra is the good category to represent cohomology theories, and the sphere spectrum is the unit in this category.

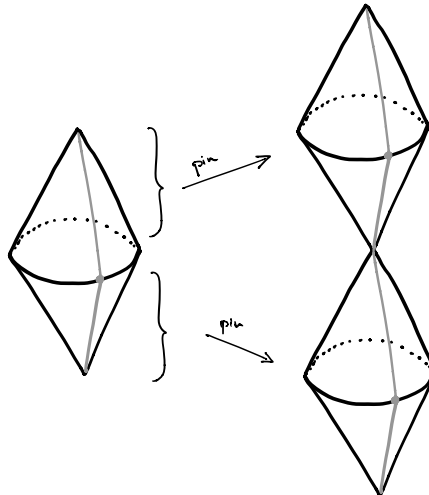
We a slight abuse of notations, we still denote this induced functor by $\Sigma : \text{hoTop}_* \rightarrow \text{hoTop}_*$.

1.3.2. *Definition of the higher homotopy groups.*

Definition 1.3.3 (Pinch map). The *pinch map* is the map

$$\text{pin} : \Sigma X \longrightarrow \Sigma X \vee \Sigma X$$

where the image of (x, t) is $(x, 2t)$ in the first copy of ΣX , when $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$, and $(x, 2t - 1)$ in the second copy of ΣX , when $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$.



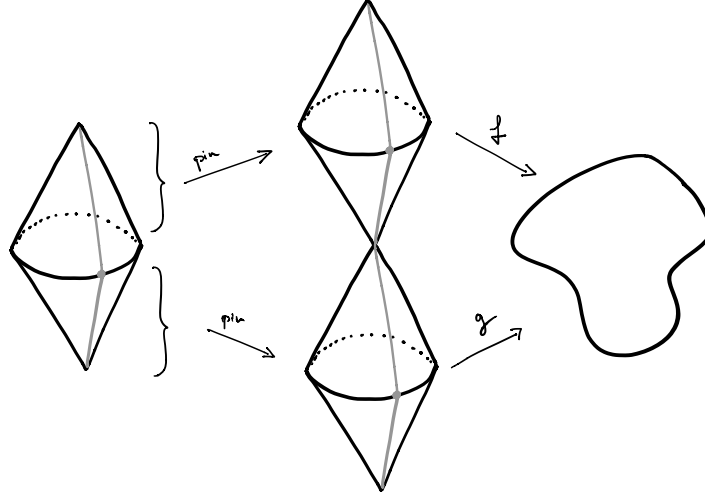
Pulling back along the pinch map, one gets a “convolution type” binary product denoted $\cdot$ on the space $\text{Top}_*(\Sigma X, Y)$:

$$\begin{array}{ccc} \text{Top}_*(\Sigma X, Y) \times \text{Top}_*(\Sigma X, Y) & \xrightarrow{\cong} & \text{Top}_*(\Sigma X \vee \Sigma X, Y) \\ & \searrow & \downarrow \text{pin}^* \\ & & \text{Top}_*(\Sigma X, Y), \end{array}$$

explicitly given by

$$(3) \quad f \cdot g : (x, t) \mapsto \begin{cases} f(x, 2t) & \text{for } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ g(x, 2t - 1) & \text{for } \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

for two pointed continuous map $f, g : \Sigma X \rightarrow Y$.



$$f \cdot g : \Sigma X \xrightarrow{\text{pin}} \Sigma X \vee \Sigma X \xrightarrow{f \vee g} Y$$

Due to the parametrization, the product $\cdot$ is *neither* associative *nor* unital on $\text{Top}_*(\Sigma X, Y)$, but it will satisfies these properties in the level of the pointed homotopy category.

Proposition 1.3.4. *The product $\cdot$ induces a group structure on $([\Sigma X, Y]_*, \cdot, [\text{cst}])$, where $[\Sigma X, Y]_* = \text{hoTop}_*(\Sigma X, Y)$.*

Proof. Let us first show that the above formula (3) does not depend on the choice of representatives in the homotopy category. Let $H : \Sigma X \times I \rightarrow Y$ be a pointed homotopy from $f : \Sigma X \rightarrow Y$ to $f' : \Sigma X \rightarrow Y$. The assignment

$$\begin{array}{ccc} \Sigma X \times I & \longrightarrow & Y \\ (x, t, s) & \longmapsto & \begin{cases} H(x, 2t, s) & \text{for } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ g(x, 2t - 1) & \text{for } \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases} \end{array}$$

defined a pointed homotopy from $f \cdot g$ to $f' \cdot g$. The proof of the same property on the right-hand side is similar.

Let us now prove that this product defines a group structure.

UNIT: For any pointed map $f : \Sigma X \rightarrow Y$, the following assignment

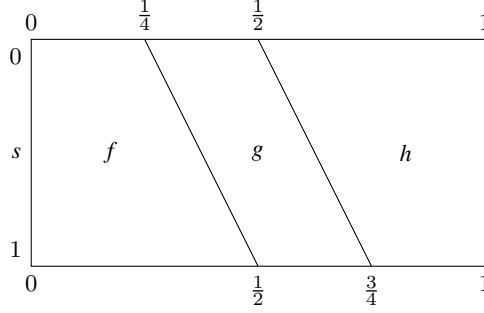
$$\begin{array}{ccc} \Sigma X \times I & \longrightarrow & Y \\ (x, t, s) & \longmapsto & \begin{cases} f(x, \frac{2}{1+s}t) & \text{for } 0 \leq t \leq \frac{1+s}{2}, \\ y_0 & \text{for } \frac{1+s}{2} \leq t \leq 1, \end{cases} \end{array}$$

is a pointed homotopy from $f \cdot \text{cst}$ to f . The proof for the other side is similar.

ASSOCIATIVITY: The assignment

$$\begin{array}{ccc} \Sigma X \times I & \longrightarrow & Y \\ (x, t, s) & \longmapsto & \begin{cases} f(x, \frac{4}{1+s}t) & \text{for } 0 \leq t \leq \frac{1+s}{4}, \\ g(x, 4(t - \frac{1+s}{4})) & \text{for } \frac{1+s}{4} \leq t \leq \frac{2+s}{4}, \\ h(x, \frac{4}{2-s}(t - \frac{2+s}{4})) & \text{for } \frac{2+s}{4} \leq t \leq 1, \end{cases} \end{array}$$

is a pointed homotopy from $(f \cdot g) \cdot h$ to $f \cdot (g \cdot h)$.



INVERSE: For any pointed map $f: \Sigma X \rightarrow Y$, we consider the pointed map $f^{-1}: \Sigma X \rightarrow Y$ defined by $(x, t) \mapsto f(x, 1 - t)$. The assignment

$$\begin{aligned} \Sigma X \times I &\longrightarrow Y \\ (x, t, s) &\longmapsto \begin{cases} f(x, 2(1-s)t) & \text{for } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ f(x, 2(1-s)(1-t)) & \text{for } \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases} \end{aligned}$$

is a pointed homotopy from $f \cdot f^{-1}$ to cst .

□

REMARK. Recall that a map in $\text{Top}_*(\Sigma X, Y)$ is a pointed homotopy from and to the constant map between X and Y and that the product $\cdot$ is a parametrized composite of them. One can see that a pointed homotopy between such maps amounts to a homotopy relative to $X \times \partial I$. Under this interpretation, the above proposition is related to the 2-groupoid mentioned in Section 1.1.3.

The range of ideas used here might make the reader think at the definition of the fundamental group as the loop spaces identified up to homotopy equipped with the concatenation of paths. This is not a surprise as

$$([\Sigma S^0, Y]_* \cong [S^0, \Omega Y]_* \cong [S^1, Y]_*, \cdot, [\text{cst}]) \cong \pi_1(Y, y_0),$$

by the suspension-loop space adjunction of Corollary 1.2.28. However Proposition 1.3.4 allows us to go further and to define the higher homotopy groups.

Definition 1.3.5 (n -th homotopy group). For $n \geq 1$, the n -th homotopy group of a pointed topological space X is defined by

$$(\pi_n(X, x_0), \cdot, 0) := ([\Sigma^n S^0, X]_* \cong [S^n, X]_* \cong [I^n, \partial I^n], (X, x_0), \cdot, [\text{cst}]).$$

For $n = 0$, we consider the set $\pi_0(X) := [S^0, X]_*$ of connected components of X . The suspension-loop space adjunction of Corollary 1.2.28 shows that the underlying set of the n th homotopy group is equivalently given by

$$\pi_n(X, x_0) \cong \pi_{n-1}(\Omega X) \cong \cdots \cong \pi_1(\Omega^{n-1} X) \cong \pi_0(\Omega^n X).$$

Proposition 1.3.6. *The n -th homotopy group is a homotopy invariant: any pointed homotopy equivalence $f: X \xrightarrow{\sim} Y$ induces isomorphisms $\pi_n(f): \pi_n(X, x_0) \xrightarrow{\cong} \pi_n(Y, f(x_0))$, for $n \geq 1$, and a bijection, for $n = 0$.*

Proof. This is straightforward from the definition. □

EXAMPLE. When a space X is contractible, all its homotopy groups are trivial, i.e. $\pi_n(X) \cong 0$, for $n \geq 0$. When a space X is discrete, all its homotopy groups are trivial, i.e. $\pi_n(X) \cong 0$, for $n \geq 1$, and $\pi_0(X) \cong X$.

Theorem 1.3.7. *For any $n \geq 2$, the group $([\Sigma^n X, Y], \cdot, [\text{cst}])$ is abelian. For instance, the n -homotopy group $(\pi_n(X, x_0), \cdot, 0)$ is abelian, for $n \geq 2$.*

The proof relies on the following Eckmann–Hilton principle. Let us recall that a magma is a binary product which is not required to satisfy any relation *a priori*.

Lemma 1.3.8 (Eckman-Hilton principle). *Let $(A, +_1, u_1)$ and $(A, +_2, u_2)$ be two unital magmas on a set A . If they satisfy the interchanging law*

$$(x +_1 y) +_2 (x' +_1 y') = (x +_2 x') +_1 (y +_2 y')$$

then they are equal, that is $+_1 = +_2$ and $u_1 = u_2$, and the binary product is associative and commutative.

Proof. This follows from the following direct computations:

$$\begin{aligned}
u_2 &= (u_2 +_1 u_1) +_2 (u_1 +_1 u_2) = (u_2 +_2 u_1) +_1 (u_1 +_2 u_2) = u_1, \\
x +_2 y &= (x +_1 u) +_2 (u +_1 y) = (x +_2 u) +_1 (u +_2 y) = x +_1 y, \\
x + y &= (u + x) + (y + u) = (u + y) + (x + u) = y + x, \\
(x + y) + z &= (x + y) + (u + z) = (x + u) + (y + z) = x + (y + z).
\end{aligned}$$

□

Proof of Theorem 1.3.7. Since the n th iteration of the suspension is a coset of $X \times I^n$, any map from $\Sigma^n X$ in the homotopy category can be represented by a map from $X \times I^n$:

$$\text{Top}(X \times I^n, Y) \longleftarrow \text{Top}_*(\Sigma^n X, Y) \longrightarrow [\Sigma^n X, Y]_*.$$

Given two maps $f, g : X \times I^n \rightarrow Y$, we consider the i -th sum, for $1 \leq i \leq n$, defined by

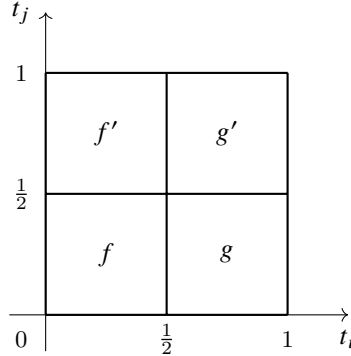
$$f +_i g : (x, t_1, \dots, t_i, \dots, t_n) \mapsto \begin{cases} f(x, t_1, \dots, 2t_i, \dots, t_n) & , \text{ for } 0 \leq t_i \leq \frac{1}{2}, \\ g(x, t_1, \dots, 2t_i - 1, \dots, t_n) & , \text{ for } \frac{1}{2} \leq t_i \leq 1. \end{cases}$$

This induces well defined unital binary product on $[\Sigma^n X, Y]_*$ that satisfy the interchanging law:

$$(f +_i g) +_j (f' +_i g') = (f +_j f') +_i (g +_j g'),$$

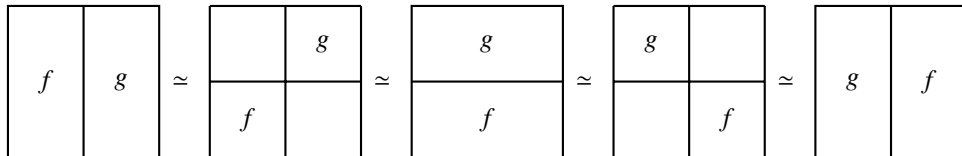
for all $1 \leq i \neq j \leq n$. Indeed, both side are equal to

$$(x, t_1, \dots, t_i, \dots, t_n) \mapsto \begin{cases} f(x, t_1, \dots, 2t_i, \dots, 2t_j, \dots, t_n) & , \text{ for } 0 \leq t_i \leq \frac{1}{2} \text{ and } 0 \leq t_j \leq \frac{1}{2}, \\ g(x, t_1, \dots, 2t_i - 1, \dots, 2t_j, \dots, t_n) & , \text{ for } \frac{1}{2} \leq t_i \leq 1 \text{ and } 0 \leq t_j \leq \frac{1}{2}, \\ f'(x, t_1, \dots, 2t_i, \dots, 2t_j - 1, \dots, t_n) & , \text{ for } 0 \leq t_i \leq \frac{1}{2} \text{ and } \frac{1}{2} \leq t_j \leq 1, \\ g'(x, t_1, \dots, 2t_i - 1, \dots, 2t_j - 1, \dots, t_n) & , \text{ for } \frac{1}{2} \leq t_i \leq 1 \text{ and } \frac{1}{2} \leq t_j \leq 1. \end{cases}$$



Finally, we conclude by applying the Eckmann–Hilton principle of Lemma 1.3.8. □

The fact that the fundamental group $\pi_1(X)$ is not abelian is a consequence of “low dimensional pathology”, like the ones that we often encounter in mathematics. For $n \geq 2$, there is certain degree of freedom which allows us to “move” elements around and to make the product + commutative. Indeed, the lines of computation in the proof of the Eckmann–Hilton principle (Lemma 1.3.8) correspond here to the the following picture.



Proposition 1.3.9. *The map $\Sigma : ([\Sigma X, Y], \cdot, [\text{cst}]) \rightarrow ([\Sigma^2 X, \Sigma Y], \cdot, [\text{cst}])$ is a group morphism.*

Proof. Since the suspension functor Σ coincides with the smash product with $I/\partial I$, it preserves pointed homotopies. Therefore it induces an endofunctor of the homotopy category, so this map is well defined. The definition of the product $\cdots$ with the pinch map shows that this is a group morphism. □

1.4. Fibre and cofibre sequences. In this section, we work in the category of locally compact or compactly generated weak Hausdorff pointed spaces.

1.4.1. *Cofibre sequence*. Pointed topological maps are in general not “exact”, so we will derive them in a certain way.

Definition 1.4.1 (Exact sequence). A short sequence $(A, a) \xrightarrow{\alpha} (B, b) \xrightarrow{\beta} (C, c)$ in Set_* is *exact* if $\alpha(A) = \beta^{-1}(c)$. A long sequence is exact when all its short sequences are exact.

Definition 1.4.2 (h-coexact sequence). A short sequence $U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} W$ of pointed continuous maps is *h-coexact* if the short sequence

$$[U, Z]_* \xleftarrow{f^*} [V, Z]_* \xleftarrow{g^*} [W, Z]_*$$

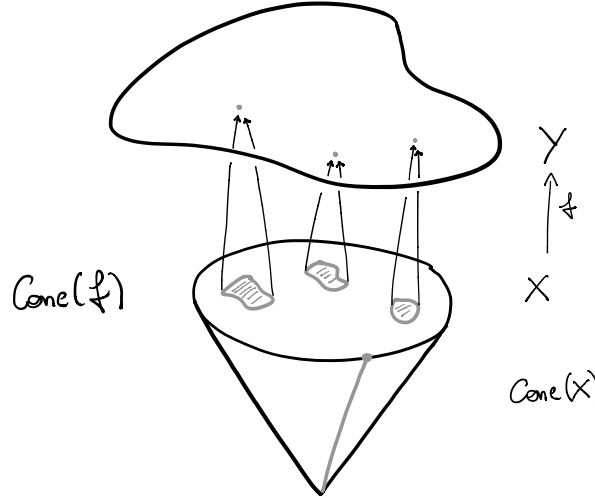
is exact, for all pointed topological space Z . A long sequence is h-coexact when all its short sequences are h-coexact.

Notice that this condition amounts to saying that, for all pointed continuous map $\psi : V \rightarrow Z$, the composition $\psi f : U \rightarrow V \rightarrow Z$ is null homotopic if and only if there exists $\varphi : W \rightarrow Z$ such that $\psi \sim \varphi g$. When it is the case, this implies that gf is null homotopic (consider $Z = W$ and $\varphi = \text{id}_W$). In the other way round, this condition is sufficient to imply that $g^*([W, Z]_*) \subset (f^*)^{-1}([\text{cst}])$.

Nothing ensures that the canonical sequence $X \xrightarrow{f} Y \rightarrow Y/X$ is h-coexact. So, let us refine the construction on the right-hand side.

Definition 1.4.3 (Mapping cone). The *mapping cone* $\text{Cone}(f)$ of a pointed continuous map $f : X \rightarrow Y$ is defined by the following pushout:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ i_1 \downarrow & \lrcorner & \downarrow f_1 \\ \text{Cone}(X) & \longrightarrow & \text{Cone}(f) \end{array} \quad \text{that is } \text{Cone}(f) = \text{Cone}(X) \cup_f Y \cong \frac{\text{Cone}(X) \vee Y}{(x, 1) \sim f(x)}.$$



REMARK. Notice that $f_1 : Y \hookrightarrow \text{Cone}(f)$ is an embedding, i.e. a monomorphism which induces an homeomorphism onto its image.

Notice that the composite $f_1 f$ is null homotopic: consider the homotopy $H : X \times I \rightarrow \text{Cone}(f)$ given by $H(x, t) := (x, t)$. The universal property of the pushout

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ i_1 \downarrow & \lrcorner & \downarrow f_1 \\ \text{Cone}(X) & \xrightarrow{j} & \text{Cone}(f) \end{array} \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{g} \\ \exists! \Phi \\ \downarrow \\ Z \end{array}$$

h

implies that the data of a map $\Phi: \text{Cone}(f) \rightarrow Z$ is equivalent to the data of two maps $g: Y \rightarrow Z$ and $h: \text{Cone}(f) \rightarrow Z$, such that $g = \Phi f_1$ and $h = \Phi j$, which coincides with a homotopy from the constant map to the composite gf . All together, this shows that the sequence $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{f_1} \text{Cone}(f)$ is h-coexact.

The next theorem tells us how to pursue this h-coexact short sequence into a long one.

Theorem 1.4.4 (Cofibre sequence). *For any pointed continuous map $f: X \rightarrow Y$, the following sequence is h-coexact :*

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{f_1} \text{Cone}(f) \xrightarrow{p(f)} \Sigma X \xrightarrow{\Sigma f} \Sigma Y \xrightarrow{\Sigma f_1} \Sigma \text{Cone}(f) \xrightarrow{\Sigma p(f)} \Sigma^2 X \xrightarrow{\Sigma^2 f} \Sigma^2 Y \xrightarrow{\Sigma^2 f_1} \Sigma^2 \text{Cone}(f) \xrightarrow{\Sigma^2 p(f)} \dots,$$

where $p(f): \text{Cone}(f) \rightarrow \text{Cone}(f)/f_1(Y) \cong \Sigma X$ is the canonical map. For any pointed topological space $Z \in \text{Top}_*$, the following sequence

$$\begin{array}{ccccccc} [X, Z]_* & \longleftarrow & [Y, Z]_* & \longleftarrow & [\text{Cone}(f), Z]_* & \longleftarrow & \dots \\ & & \searrow & & \searrow & & \\ & & [\Sigma X, Z]_* & \longleftarrow & [\Sigma Y, Z]_* & \longleftarrow & [\Sigma \text{Cone}(f), Z]_* \\ & & & & \searrow & & \searrow \\ & & & & [\Sigma^2 X, Z] & \longleftarrow & [\Sigma^2 Y, Z] & \longleftarrow & [\Sigma^2 \text{Cone}(f), Z] & \longleftarrow & \dots \end{array}$$

is exact in the category of pointed sets for the first line, in the category of groups for the second line, and then in the category of abelian groups.

REMARK. The cofibre sequence of Theorem 1.4.4 lead D. Puppe and J.-L. Verdier to the notion of a *triangulated category* and more recently J. Lurie to the notion of *stable ∞ -category*.

Proof. We already proved above that any sequence of the form

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{f_1} \text{Cone}(f)$$

is h-coexact. This implies that the sequence

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{f_1} \text{Cone}(f) \xrightarrow{f_2} \text{Cone}(f_1) \xrightarrow{f_3} \text{Cone}(f_2)$$

is h-coexact.

From the various definitions, it is straightforward to check that the following diagram is commutative

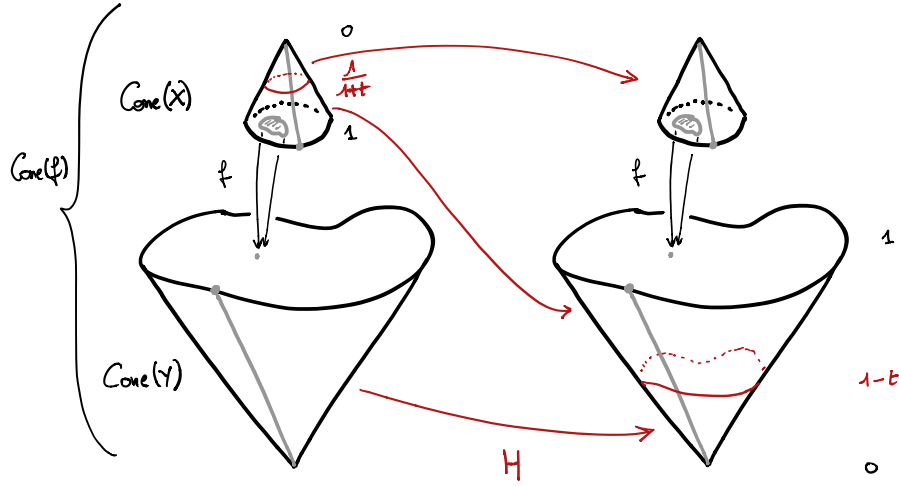
$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{i_1} & \text{Cone}(Y) \\ \downarrow i_1 & & \downarrow f_1 & & \downarrow j_1 \\ \text{Cone}(X) & \xrightarrow{j} & \text{Cone}(f) & \xrightarrow{f_2} & \text{Cone}(f_1) \\ \downarrow p & & \downarrow p(f) & & \downarrow q(f) \\ \Sigma X \cong \text{Cone}(X)/i_1(X) & \xrightarrow{\cong} & \Sigma X \cong \text{Cone}(f)/f_1(Y) & \xrightarrow{\cong} & \Sigma X \cong \text{Cone}(f_1)/j_1(\text{Cone}(Y)) \end{array}$$

and that its bottom horizontal maps are homeomorphisms with the suspension ΣX of the space X .

Let us now show that the map $q(f)$ is a homotopy equivalence. Notice first that

$$\text{Cone}(f_1) \cong \frac{\text{Cone}(X) \amalg \text{Cone}(Y)}{(x, 1) \sim (f(x), 1)} \cong \frac{X \times I \amalg Y \times I}{\{x_0\} \times I \cup X \times \{0\} \cup \{y_0\} \times I \cup Y \times \{0\} \cup \{(x, 1) \sim (f(x), 1)\}}.$$

We consider the following homotopy $H: \text{Cone}(f_1) \times I \rightarrow \text{Cone}(f_1)$ whose idea amounts to retracting the cone of Y onto its $s = 0$ base point and in the same time expanding the cone of X inside it.



Explicitly, the map H is defined by

$$H((y, s), t) := (y, (1-t)s), \quad \text{for } y \in Y, \text{ and } s, t \in I,$$

$$H((x, s), t) := \begin{cases} (x, (1+t)s), & \text{for } x \in X, t \in I, \text{ and } s \in [0, \frac{1}{1+t}] , \\ (f(x), 2 - (1+t)s), & \text{for } x \in X, t \in I, \text{ and } s \in [\frac{1}{1+t}, 1] . \end{cases}$$

The abovementioned description of $\text{Cone}(f_1)$ shows that this assignment is compatible with the various identifications, so it is continuous. At time $t = 0$, we get $H(-, 0) = \text{id}_{\text{Cone}(f_1)}$. Considering the map $\mathfrak{s}(f): \Sigma X \rightarrow \text{Cone}(f_1)$ defined by $\mathfrak{s}(f)(x, s) := H((x, s), 1)$, we get $H(-, 1) = \mathfrak{s}(f) \circ q(f)$ at time $t = 1$. Now the map $K: \Sigma X \times I \rightarrow \Sigma X$ defined by

$$K((x, s), t) := \begin{cases} (x, \frac{2}{1+t} s), & \text{for } s \in [0, \frac{1+t}{2}] , \\ *, & \text{for } s \in [\frac{1+t}{2}, 1] , \end{cases}$$

is a homotopy from $q(f) \circ \mathfrak{s}(f)$ to $\text{id}_{\Sigma X}$.

We denote by $\tau: \Sigma X \rightarrow \Sigma X$ the orientation reversing homeomorphism defined by $(x, t) \mapsto (x, 1-t)$ and we consider the following diagram

$$\begin{array}{ccccc} \text{Cone}(f) & \xrightarrow{f_2} & \text{Cone}(f_1) & \xrightarrow{f_3} & \text{Cone}(f_2) \\ & \searrow p(f) & \downarrow q(f) & \searrow p(f_1) & \downarrow q(f_1) \\ & & \Sigma X & \xrightarrow{\Sigma f \circ \tau} & \Sigma Y \end{array}$$

We have already seen that the triangles on the left-hand side and on the right-hand side are commutative. The middle triangle is homotopy commutative, that is $\Sigma f \circ \tau \circ q(f) \sim p(f_1)$. Since $\mathfrak{s}(f)$ is homotopy inverse to $q(f)$ and since τ is its own inverse, this latter fact is equivalent to Σf homotopy equivalent to $p(f_1) \circ \mathfrak{s}(f) \circ \tau$. One proves this with a homotopy $L: \Sigma X \times I \rightarrow \Sigma Y$, analogous to K :

$$L((x, s), t) := \begin{cases} (f(x), \frac{2}{1+t} s), & \text{for } s \in [0, \frac{1+t}{2}] , \\ *, & \text{for } s \in [\frac{1+t}{2}, 1] . \end{cases}$$

So we get the following commutative diagram

$$\begin{array}{ccccccc} [Y, Z]_* & \xleftarrow{f_1^*} & [\text{Cone}(f), Z]_* & \xleftarrow{f_2^*} & [\text{Cone}(f_1), Z]_* & \xleftarrow{f_3^*} & [\text{Cone}(f_2), Z]_* \\ & & \nwarrow p(f)^* & & \nwarrow p(f_1)^* & & \nwarrow q(f_1)^* \\ & & & \uparrow \cong & & \uparrow \cong & \\ & & & [\Sigma X, Z]_* & \xleftarrow{(\Sigma f \circ \tau)^*} & & [\Sigma Y, Z]_* \end{array}$$

for any $Z \in \text{Top}_*$. Since the top sequence is exact, so is the bottom sequence. Finally, this proves that the sequence

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{f_1} \text{Cone}(f) \xrightarrow{p(f)} \Sigma X \xrightarrow{\Sigma f} \Sigma Y$$

is h-coexact.

Finally, we apply this result to Σf , $\Sigma^2 f$, etc. In order to be able to conclude the proof with this, we need the existence of an homeomorphism $\chi : \text{Cone}(\Sigma f) \xrightarrow{\cong} \Sigma \text{Cone}(f)$, which satisfies

$$\chi \circ (\Sigma f)_1 = \Sigma f_1 \quad \text{and} \quad (12) \circ p(\Sigma f) = \Sigma p(f) \circ \chi,$$

where $(12) := \Sigma^2 X \xrightarrow{\cong} \Sigma^2 X$ defined by $(x, s, t) \mapsto (x, t, s)$. We begin by noticing that the assignment $(x, s, t) \mapsto (x, t, s)$ defines an homeomorphism

$$\bar{\chi} : \text{Cone}(\Sigma X) \xrightarrow{\cong} \Sigma \text{Cone}(X)$$

which satisfies $\bar{\chi} \circ i_1^{\Sigma X} = \Sigma i_1^X$. Considering the diagram defining the cone of Σf and the image under Σ of the diagram defining the cone of f

$$\begin{array}{ccc} \Sigma X & \xrightarrow{\Sigma f} & \Sigma Y \\ \downarrow i_1^{\Sigma X} & \lrcorner & \downarrow (\Sigma f)_1 \\ \text{Cone}(\Sigma X) & \longrightarrow & \text{Cone}(\Sigma f) \\ \downarrow \bar{\chi} & & \downarrow \exists! \chi \\ \Sigma \text{Cone}(X) & \xrightarrow{\Sigma j} & \Sigma \text{Cone}(f) \end{array}$$

(Note: A curved arrow labeled Σi_1^X goes from ΣX to $\Sigma \text{Cone}(X)$, and a curved arrow labeled Σf_1 goes from ΣY to $\Sigma \text{Cone}(f)$.)

we get a map $\chi : \text{Cone}(\Sigma f) \rightarrow \Sigma \text{Cone}(f)$ satisfying $\chi \circ (\Sigma f)_1 = \Sigma f_1$. Since the suspension functor Σ is a left adjoint by Proposition 1.2.27, it preserves colimits and thus pushouts. This implies that χ is an homeomorphism. It remains to check $(12) \circ p(\Sigma f) = \Sigma p(f) \circ \chi$, which is straightforward since both are given by $(x, s, t) \mapsto (x, t, s)$. $\square$

1.4.2. Fibre sequence. A dual fibre sequence is obtained by the same arguments applied to dual constructions under the adjunction $\Sigma \dashv \Omega$.

Definition 1.4.5 (h-exact sequence). A short sequence $U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} W$ of pointed continuous maps is *h-exact* if the short sequence

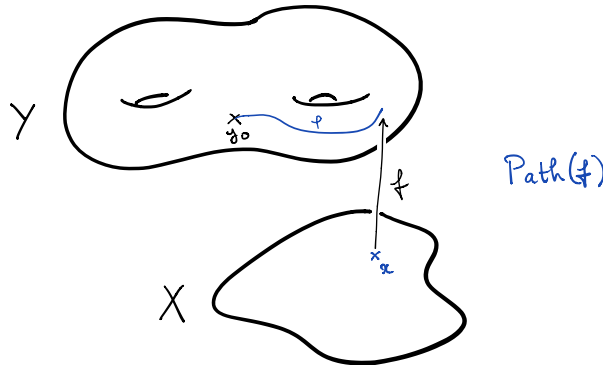
$$[Z, U]_* \xrightarrow{f_*} [Z, V]_* \xrightarrow{g_*} [Z, W]_*$$

is exact, for all topological space Z . A long sequence is h-exact when all its short sequences are h-exact.

Nothing ensures that the canonical sequence $(f^{-1}(y_0), x_0) \hookrightarrow (X, x_0) \xrightarrow{f} (Y, y_0)$ is h-exact. So let us refine the construction on the left-hand side.

Definition 1.4.6 (Path space of a map). The *path space* $\text{Path}(f)$ of a pointed continuous map $f : X \rightarrow Y$ is defined by the following pullback:

$$\begin{array}{ccc} \text{Path}(f) & \longrightarrow & \text{Path}(Y) \\ f^! \downarrow & \lrcorner & \downarrow e_1 \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array} \quad \text{that is } \text{Path}(f) \cong X \times_f \text{Path}(Y) \cong \{(x, \varphi : I \rightarrow Y) \mid f(x) = \varphi(1)\}.$$



REMARK. The map $f^1: \text{Path}(f) \rightarrow X$ is a quotient map, i.e. a set U in X is open if and only if its inverse image is an open of $\text{Path}(f)$.

Notice that the composite $f f^1$ is null homotopic. The universal property of the pullback

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & h & \\
 & & & \searrow & \\
 Z & \xrightarrow{\exists! \Psi} & \text{Path}(f) & \xrightarrow{q} & \text{Path}(Y) \\
 & \searrow g & \downarrow f^1 & \lrcorner & \downarrow e_1 \\
 & & X & \xrightarrow{f} & Y
 \end{array}$$

implies that the data of a map $\Psi: Z \rightarrow \text{Path}(f)$ is equivalent to the data of two maps $g: Z \rightarrow X$ and $h: Z \rightarrow \text{Path}(f)$, such that $g = f^1 \Psi$ and $h = q \Psi$, which coincides with a homotopy from the constant map to the composite $f g$. All together, this shows that the sequence $\text{Path}(f) \rightarrow X \xrightarrow{f} Y$ is h-exact.

The next theorem tells us how to pursue this h-exact short sequence into a long one, in a way dual to Theorem 1.4.4.

Theorem 1.4.7 (Fibre sequence). *For any pointed continuous map $f: X \rightarrow Y$, the following sequence is h-exact:*

$$\cdots \longrightarrow \Omega^2 \text{Path}(f) \xrightarrow{\Omega^2 f_1} \Omega^2 X \xrightarrow{\Omega^2 f} \Omega^2 Y \xrightarrow{\Omega i(f)} \Omega \text{Path}(f) \xrightarrow{\Omega f_1} \Omega X \xrightarrow{\Omega f} \Omega Y \xrightarrow{i(f)} \text{Path}(f) \xrightarrow{f^1} X \xrightarrow{f} Y,$$

where $i(f): \Omega Y \rightarrow \text{Path}(f)$ is the map which sends a loop φ onto (x_0, φ) . , For any pointed topological space $Z \in \text{Top}_*$, the following sequence

$$\begin{array}{c}
 \hookrightarrow [Z, \text{Path}(f)]_* \longrightarrow [Z, X]_* \longrightarrow [Z, Y]_* \\
 \hookrightarrow [Z, \Omega \text{Path}(f)]_* \longrightarrow [Z, \Omega X]_* \longrightarrow [Z, \Omega Y]_* \\
 \cdots \longrightarrow [Z, \Omega^2 \text{Path}(f)]_* \longrightarrow [Z, \Omega^2 X]_* \longrightarrow [Z, \Omega^2 Y]_*
 \end{array}$$

is exact in the category of pointed sets for the first line, in the category of groups for the second line, and then in the category of abelian groups.

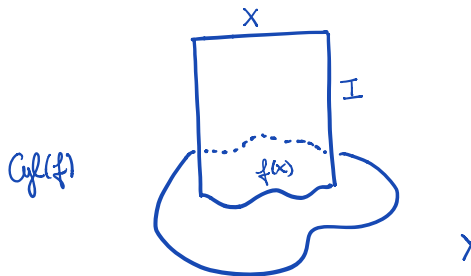
Proof. The proof is dual that of Theorem 1.4.4. □

1.5. Fibrations and cofibrations. We introduce here two classes of maps, cofibrations and fibrations, which are the fundamental tools of homotopy theory. The (co)fibre sequence applies efficiently to them and they lie at the core of the modern axiomatic treatment of homotopical algebra.

1.5.1. Cofibrations. Let us “come back” to the general non-necessarily pointed world. The following construction provides us with a non-pointed notion analogous to the mapping cone.

Definition 1.5.1 (Mapping cylinder). The *mapping cylinder* $\text{Cyl}(f)$ of a continuous map $f: X \rightarrow Y$ is defined by the following pushout:

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{f} & Y \\
 i_0 \downarrow & \lrcorner & \downarrow f_0 \\
 X \times I & \xrightarrow{j} & \text{Cyl}(f)
 \end{array}
 \quad \text{that is } \text{Cyl}(f) \cong \frac{(X \times I) \amalg Y}{(x, 0) \sim f(x)}.$$



The space X naturally embeds into the mapping cylinder under $i_1: X \hookrightarrow \text{Cyl}(f)$; so does Y under $f_0: Y \hookrightarrow \text{Cyl}(f)$. This latter map admits the retraction $P: \text{Cyl}(f) \rightarrow Y$ defined by $(x, t) \mapsto f(x)$ and $y \mapsto y$. Considering the homotopy $H: \text{Cyl}(f) \times I \rightarrow I$ given by $(x, s, t) \mapsto (x, st)$ and $(y, t) \mapsto y$, one can see that this actually forms a strong deformation retract. Hence the canonical retraction

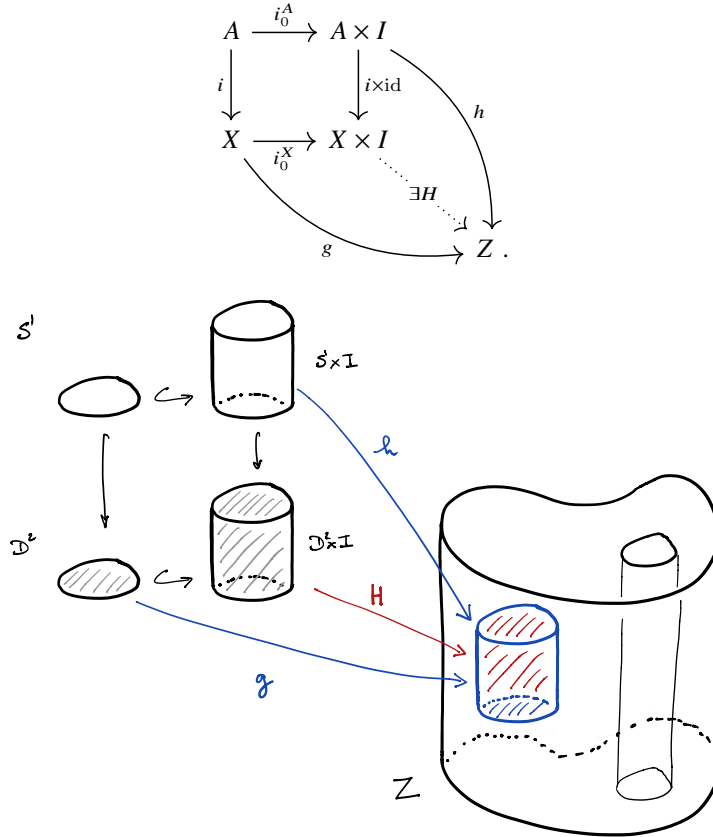
$$P: \text{Cyl}(f) \xrightarrow{\sim} Y$$

is a quotient map and a homotopy equivalence. In the end, this shows that any map $f: X \rightarrow Y$ factors through an embedding followed by a quotient map which is a homotopy equivalence:

$$X \xrightarrow{i_1} \text{Cyl}(f) \xrightarrow{\sim_P} Y.$$

This is a remarkable property, but one might want to go further and look for a universal property satisfied by the map i_1 .

Definition 1.5.2 (Homotopy extension property (HEP)). A map $i: A \rightarrow X$ satisfies the *homotopy extension property (HEP)* with respect to a space Z if, for any pair of maps $g: X \rightarrow Z$ and $h: A \times I \rightarrow Z$ such that $hi_0^A = gi$, there exists a map $H: X \times I \rightarrow Z$ such that the following diagram commutes:



As it is obvious from the above picture, the data of the map H needs not be unique. We say that the map H extends h with initial condition g . Recall that a map $F: X \rightarrow Y$ is said to *extend* a map $f: A \rightarrow Y$ along a map $i: A \rightarrow X$ when $f = Fi$.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & Y \\ i \downarrow & \nearrow F & \\ X & & \end{array}$$

Proposition 1.5.3. The homotopy extension property for $i: A \rightarrow X$ with respect to a space Z and for a pair of maps $g: X \rightarrow Z$ and $\check{h}: A \rightarrow Z^I$ is equivalent to the existence of a map $\check{H}: X \rightarrow Z^I$ factorising the

following commutative diagram.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\check{h}} & Z^I \\ \downarrow i & \nearrow \exists \check{H} & \downarrow e_0 \\ X & \xrightarrow{g} & Z \end{array}$$

Proof. This is a direct corollary of the $(- \times I) \dashv (-)^I$ -adjunction of Theorem 1.2.8. $\square$

In this case, the map $\check{H}$ extends $\check{h}$ along i , which explains the chosen terminology.

Definition 1.5.4 (Cofibration). A map $i: A \rightarrow X$ is a *cofibration* if it satisfies the homotopy extension property with respect to any space. In this case, we denote it by

$$i: A \hookrightarrow X.$$

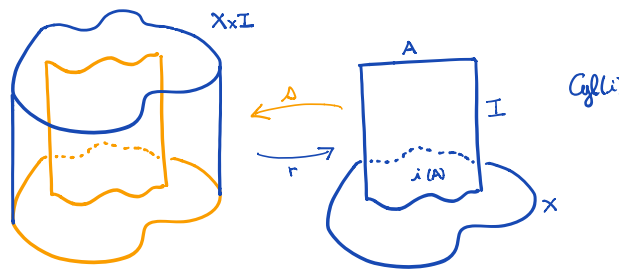
EXAMPLE. One can directly see from the definition that homeomorphisms are cofibrations and that cofibrations are stable under composition.

In order to have a practical way to settle that more maps are cofibrations, let us analyse the homotopy extension property on the test space provided by the mapping cylinder $Z = \text{Cyl}(i)$:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i_0^A} & A \times I \\ \downarrow i & & \downarrow i \times \text{id} \\ X & \xrightarrow{i_0^X} & X \times I \end{array} \quad \begin{array}{c} \searrow j \\ \swarrow \exists! \delta \\ \text{Cyl}(i) \end{array}$$

i_0

By the pushout property, there exists a unique map $\delta: \text{Cyl}(i) \rightarrow X \times I$. When it is satisfied, the homotopy extension property provides us with a retraction r of it.



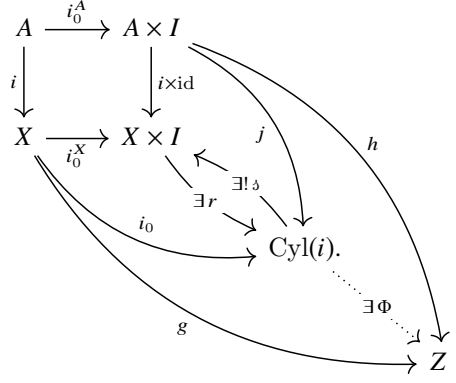
This example indicates that it is enough to check the homotopy extension property on the mapping cylinder only.

Proposition 1.5.5. Let $i: A \rightarrow X$ be a continuous map. The following assertions are equivalent.

- (1) The map i is a cofibration.
- (2) The map i satisfies the homotopy extension property with respect to its mapping cylinder $\text{Cyl}(i)$.
- (3) The map $\delta: \text{Cyl}(i) \hookrightarrow X \times I$ admits a retraction.

Proof. From the arguments given above, it remains to prove $(3) \Rightarrow (1)$. Suppose that the map δ admits a retraction r and that we are giving a space Z and maps $g: X \rightarrow Z$ and $h: A \times X \rightarrow Z$ such that $h i_0^A = g i$. The pushout property defining the mapping cylinder provides us with a map

$\Phi: \text{Cyl}(i) \rightarrow Z$ such that $h = \Phi j$ and $g = \Phi i_0$.



We claim that the map $H := \Phi r$ satisfies the homotopy extension property. Indeed, we have

$$h = \Phi j = \Phi r \circ j = H(i \times \text{id}) \quad \text{and} \quad g = \Phi i_0 = \Phi r \circ i_0 = H i_0^X.$$

□

Proposition 1.5.6. *Any cofibration $i: A \rightarrow X$ is an embedding. Moreover, its image $i(A)$ is closed when X is Hausdorff.*

Proof. Since $i: A \rightarrow X$ is a cofibration, it satisfies the homotopy extension property with respect to its mapping cylinder and its canonical maps, under the dual form: there exists a map $\check{H}$ factorising the commutative square

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\check{h}} & \text{Cyl}(i)^I \\ \downarrow i & \nearrow \exists \check{H} & \downarrow e_0 \\ X & \xrightarrow{i_0} & \text{Cyl}(i) \end{array}$$

The map $\lambda: A \hookrightarrow \text{Cyl}(i)$ defined by $a \mapsto \check{h}(a)(\frac{1}{2})$ is an embedding, that is an injection which induces an homeomorphism onto its image. The map $\Lambda: X \rightarrow \text{Cyl}(i)$ defined by $x \mapsto \check{H}(x)(\frac{1}{2})$ satisfies $\Lambda i = \lambda$, which implies that i is injective and thus bijective onto its image. Under the following tilde notations for the various restrictions

$$\tilde{i}: A \rightarrow i(A), \quad \tilde{\lambda}: A \rightarrow \lambda(A), \quad \tilde{\Lambda}: i(A) \rightarrow \lambda(A),$$

we get $\tilde{\lambda}^{-1} \tilde{\Lambda} \tilde{i} = \text{id}_A$. This shows that the inverse of $\tilde{i}$ is the composite $\tilde{\lambda}^{-1} \tilde{\Lambda}$, which is continuous; so $\tilde{i}$ is an homeomorphism onto its image.

Since X is Hausdorff, then so does $X \times I$. Since $i: A \rightarrow X$ is a cofibration, the section $\mathfrak{s}: \text{Cyl}(i) \rightarrow X \times I$ admits a retraction $r: X \times I \rightarrow \text{Cyl}(i)$ by Proposition 1.5.5. Recall that the set of points on which two maps $f, g: Y \rightarrow Z$ agree is closed in Y when Z is Hausdorff. Here the identity of $X \times I$ and $\mathfrak{s}r$ agree on the image of $\mathfrak{s}$, which is thus closed in $X \times I$. This shows that $i(A)$ is closed in X . Indeed, given any point $x \notin i(A)$, we consider the point $(x, \frac{1}{2}) \notin \mathfrak{s}(\text{Cyl}(i))$ and an open neighbourhood of it of the form $U \times V$, where U is an open set of X and V an open set in I , in the complement of $\mathfrak{s}(\text{Cyl}(i))$ in $X \times I$. So U is an open neighbourhood of x in the complement of $i(A)$ in X . □

This property justifies *a posteriori* the notation chosen for a cofibration. It also shows that being a cofibration is not a homotopy equivalent notion: the identity map of a contractible space is homotopy equivalent to a constant map, which is not a cofibration since not injective in general.

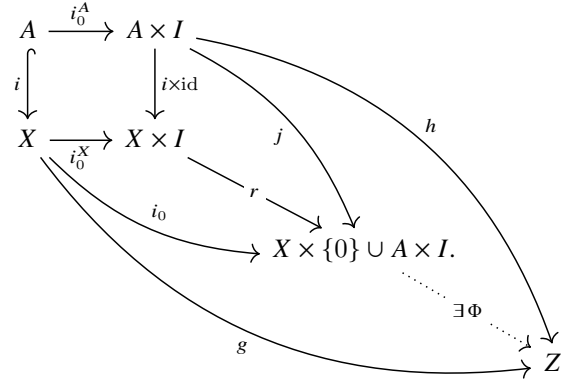
REMARK. The result of Proposition 1.5.6 holds in more generality for compactly generated weak Hausdorff spaces, see <https://mathoverflow.net/questions/221183>.

This result raises the question: when is the inclusion $i: A \hookrightarrow X$ associated to a sub-set $A \subset X$ a cofibration? Here we would like to consider the subset $X \times \{0\} \cup A \times I$ of $X \times I$ but we have to be careful: it is indeed in bijection with the mapping cylinder $\text{Cyl}(i)$ but it fails to be homeomorphic to it. Nevertheless, the criterion similar to Point (3) of Proposition 1.5.5 holds here.

Proposition 1.5.7. *Let $A \subset X$ be a set of X . The inclusion $i: A \hookrightarrow X$ is a cofibration if and only if there exists a retraction $r: X \times I \rightarrow X \times \{0\} \cup A \times I$ to the canonical inclusion $: X \times \{0\} \cup A \times I \hookrightarrow X \times I$.*

Proof.

- ($\Rightarrow$) The canonical map $X \times \{0\} \sqcup A \times I \rightarrow X \times \{0\} \cup A \times I$ induces a continuous bijection $\Psi: \text{Cyl}(i) \rightarrow X \times \{0\} \cup A \times I$, which fails to be an homeomorphism in general. Since i is a cofibration, the inclusion $\mathfrak{s}: \text{Cyl}(i) \hookrightarrow X \times I$ admits a retraction $r: X \times I \rightarrow \text{Cyl}(i)$ by Point (3) of Proposition 1.5.5. Finally the composite Ψr is a retraction to the canonical inclusion $\mathfrak{s}: X \times \{0\} \cup A \times I \hookrightarrow X \times I$.
- ($\Leftarrow$) Let us prove it when A is closed. Suppose that there exists a retraction $r: X \times I \rightarrow X \times \{0\} \cup A \times I$. We consider the map $\Phi: X \times \{0\} \cup A \times I \rightarrow Z$ defined by $(x, 0) \mapsto g(x)$, for $(x, 0) \in X \times \{0\}$, and by $(a, t) \mapsto h(a, t)$, for $(a, t) \in A \times I$. When A is closed, this map is continuous since it is given by two continuous maps defined on two closed subsets that agree on their intersection. The composite Φr is a solution to the homotopy extension property.



A clear proof of the general case is given in [Sm68, Theorem 2].

□

EXAMPLE. Proposition 1.5.7 allows us to prove that the maps $S^{n-1} \hookrightarrow D^n$ and $\partial I^n \hookrightarrow I^n$, for $n \geq 1$, are cofibrations. They are important cofibrations since they satisfy a certain generating property; we refer the reader to the Quillen model structures [Qui67] on topological spaces and simplicial sets for more details.

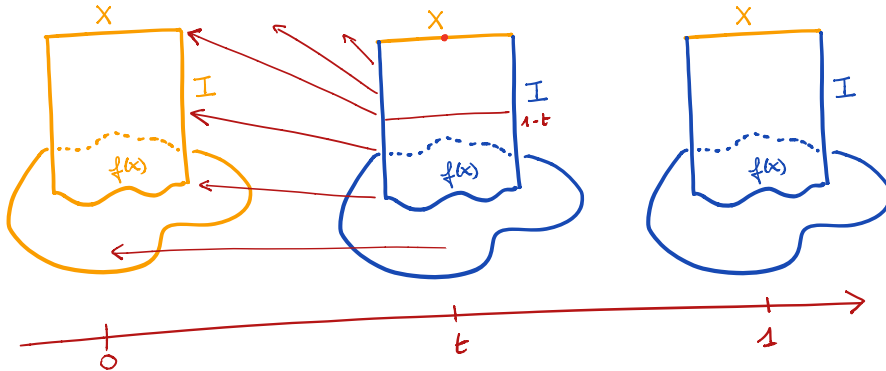
Theorem 1.5.8. *Any continuous map $f: X \rightarrow Y$ factors canonically through*

$$X \xrightarrow{i_1} \text{Cyl}(f) \xrightarrow[\sim]{P} Y.$$

where P is a homotopy equivalence and i_1 is a cofibration.

Proof. It remains to prove that i_1 is a cofibration. Since $X \hookrightarrow \text{Cyl}(f)$ is a (closed) embedding, we can use of Proposition 1.5.7: the map $\text{Cyl}(f) \times \{0\} \cup X \times I \hookrightarrow \text{Cyl}(f) \times I$ admits a retraction given by:

$$\begin{aligned} r: \text{Cyl}(f) \times I &\rightarrow \text{Cyl}(f) \times \{0\} \cup X \times I \\ (x, s, t) &\mapsto \begin{cases} (x, \frac{s}{1-t}, 0) \in \text{Cyl}(f) \times \{0\}, & \text{for } x \in X, 0 \leq s \leq 1-t, \\ (x, s-1+t) \in X \times I, & \text{for } x \in X, 1-t \leq s \leq 1, \\ (y, 0) \in \text{Cyl}(f) \times \{0\}, & \text{for } y \in Y. \end{cases} \end{aligned}$$



□

REMARK. Theorem 1.5.8 shows that, up to homotopy, one can canonically replace any map by a cofibration.

Proposition 1.5.9 (Cobase change). *For any cofibration $i: A \hookrightarrow X$ and any map $f: A \rightarrow B$, the map $j: B \hookrightarrow X \cup_f B$ obtained by cobase change under the pushout is a cofibration.*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ i \downarrow & \lrcorner & \downarrow j \\ X & \longrightarrow & X \cup_f B \end{array}$$

Proof. We check directly the definition under the dual form of the homotopy extension property given in Proposition 1.5.3. Let Z be a space and let $g: X \rightarrow Z$ and $\check{h}: B \times X \rightarrow Z$ be two maps such that $e_0 \check{h} = gj$. Since i is a cofibration, the homotopy extension property applied to the outer square of the following diagram provides us with a map $K: X \rightarrow Z^I$ satisfying $Ki = \check{h}f$ and $e_0 K = gk$.

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{\check{h}} & Z^I \\ i \downarrow & & \downarrow j & \exists K \nearrow & \downarrow e_0 \\ X & \xrightarrow{k} & X \cup_f B & \xrightarrow{g} & Z \end{array}$$

(Dotted lines: $X \rightarrow Z^I$ is K , $X \cup_f B \rightarrow Z$ is $\check{H}$)

Then the pushout property defining $X \cup_f B$ produces a (unique) map $\check{H}: X \cup_f B \rightarrow Z^I$ satisfying $\check{H}k = K$ and $\check{H}j = \check{h}$. Since $e_0 \check{H}j = e_0 \check{h} = gj$ and $e_0 \check{H}k = e_0 K = gk$, we get $g = e_0 \check{H}$, by the uniqueness property of the pushout $X \cup_f B$. □

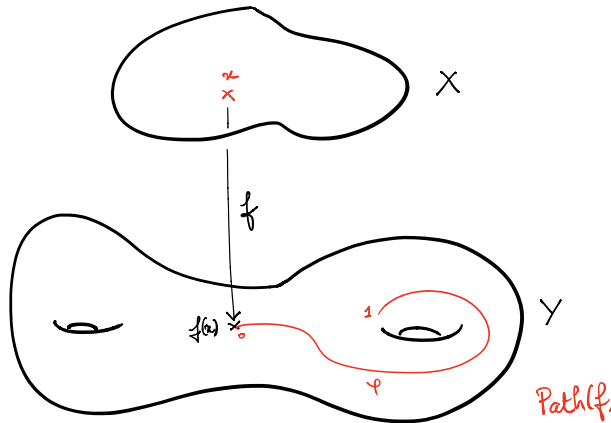
18/11/2024

1.5.2. *Fibrations.* Let us now look for a notion dual to cofibrations under the $(-\times I) \dashv (-)^I$ -adjunction of Theorem 1.2.8.

The first step amounts to defining a notion of mapping path space in the non-necessarily pointed case and dual to the mapping cylinder.

Definition 1.5.10 (Mapping path space). The *mapping path space* $\text{Path}(f)$ of a continuous map $f: X \rightarrow Y$ is defined by the following pullback:

$$\begin{array}{ccc} \text{Path}(f) & \longrightarrow & Y^I \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow e_0 \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array} \quad \text{that is } \text{Path}(f) \cong X \times_f Y^I \cong \{(x, \varphi: I \rightarrow Y) \mid f(x) = \varphi(0)\}.$$



Any map $f: X \rightarrow Y$ factors through

$$X \xrightarrow{i} \text{Path}(f) \xrightarrow{p} Y,$$

where i is defined by $x \mapsto (x, \text{cst}_{f(x)})$, the latter element stands for the constant map equal to $f(x)$, and where p is defined by $(x, \varphi) \mapsto \varphi(1)$. Considering the retraction $r: \text{Path}(f) \rightarrow X$, given by $(x, \varphi) \mapsto x$, and the homotopy $H: \text{Path}(f) \times I \rightarrow \text{Path}(f)$, given by $(x, \varphi, t) \mapsto (x, s \mapsto \varphi(st))$, one can see that the map i is a strong deformation retract and thus a homotopy equivalence. Now one might want to go further and look for a universal property satisfied by the map p .

Definition 1.5.11 (Homotopy Lifting Property (HLP)). A map $p: E \rightarrow B$ satisfies the *homotopy lifting property (HLP)* with respect to a space Z if, for any pair of maps $g: Z \rightarrow E$ and $\check{h}: Z \rightarrow B^I$, such that $p \circ g = e_0 \circ \check{h}$, there exists a map $\check{H}: Z \rightarrow E^I$ such that the following diagram commutes.

$$\begin{array}{ccccc} Z & & & & \\ & \searrow g & & & \\ & & E^I & \xrightarrow{e_0} & E \\ & & \downarrow p_* & & \downarrow p \\ & & B^I & \xrightarrow{e_0} & B \end{array}$$

$\check{h}$ (curved arrow from Z to B^I)

In this case, the data of the map $\check{H}$ is in general not unique. We say that “the map $\check{H}$ is a lifting of $\check{h}$ with initial condition g ”. Recall that a map $F: X \rightarrow E$ is said to *lift* a map $f: X \rightarrow B$ along a map $p: E \rightarrow B$ when $f = pF$.

$$\begin{array}{ccc} & E & \\ F \nearrow & & \downarrow p \\ X & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

Proposition 1.5.12. *The homotopy lifting property for $p: E \rightarrow B$ with respect to a space Z and for a pair of maps $g: Z \rightarrow E$ and $h: Z \rightarrow B^I$ is equivalent to the existence of a map $H: X \rightarrow Z^I$ factorising the following commutative diagram.*

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{g} & E \\ \downarrow i_0 & \searrow \exists H & \downarrow p \\ Z \times I & \xrightarrow{h} & B \end{array}$$

Proof. This is a direct corollary of the $(- \times I) \dashv (-)^I$ -adjunction of Theorem 1.2.8. □

In this case, the map H lifts h along p , which explains the chosen terminology.

Definition 1.5.13 (Hurewicz and Serre fibrations). A continuous map $p: E \rightarrow B$ is a

- ◊ (Hurewicz) *fibration* if it satisfies the homotopy lifting property with respect to any space Z ,
- ◊ *Serre fibration* if it satisfies the homotopy lifting property with respect to any cube I^n , $n \geq 0$.

The first case is simply called a *fibration* and denoted by $p: E \twoheadrightarrow B$.

Obviously a fibration is a Serre fibration; this latter notion is enough to treat the case of homotopy groups, see Theorem 1.6.3.

EXAMPLE. One can directly see from the definition that homeomorphisms, projections $B \times F \rightarrow B$, and constant maps $E \twoheadrightarrow \{*\}$ are fibrations. It is also straightforward to check that fibrations are stable under composition.

Theorem 1.5.14. *Any continuous map $f: X \rightarrow Y$ factors canonically through*

$$X \xrightarrow{\sim} \text{Path}(f) \xrightarrow{p} Y, \quad \text{where } i \text{ is a homotopy equivalence and } p \text{ is a fibration.}$$

where i is a homotopy equivalence and where p is a fibration.

Proof. It remains to prove that p is a fibration. Let us check directly the homotopy lifting property with respect to any space Z on the equivalent definition given in Proposition 1.5.12. So let $g: Z \rightarrow \text{Path}(f)$

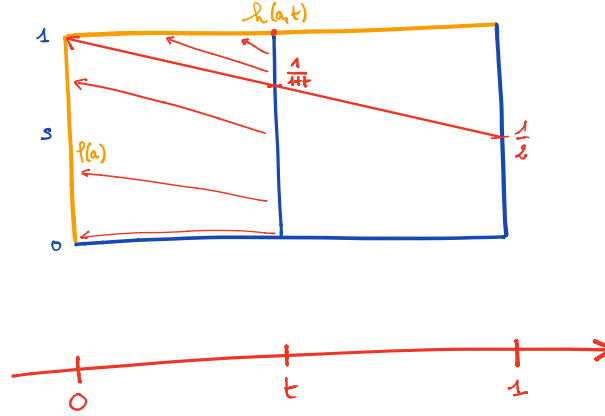
and $h : Z \times I \rightarrow Y$ be maps such that the following diagram commutes:

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{g} & \text{Path}(f) \\ i_0 \downarrow & \nearrow H & \downarrow p \\ Z \times I & \xrightarrow{h} & Y. \end{array}$$

We write the data of the map g by $z \mapsto (x_z, \varphi_z)$, where $\varphi_z(0) = f(x_z)$. Under these notations, the commutativity of the above square amounts to $\varphi_z(1) = h(z, 0)$. This shows that the map $H : Z \times I \rightarrow \text{Path}(f)$ given by $(z, t) \mapsto (x_{z,t}, \varphi_{z,t})$, where

$$x_{z,t} := x_z, \quad \varphi_{z,t}(s) := \begin{cases} \varphi_z((1+t)s), & \text{for } 0 \leq s \leq \frac{1}{1+t}, \\ h(z, (1+t)s - 1), & \text{for } \frac{1}{1+t} \leq s \leq 1, \end{cases}$$

is well defined and continuous.



(dessin à reprendre en changeant $a \mapsto z$.) The commutativity of the upper left triangle amounts to $x_{z,0} = x_z$ and $\varphi_{z,0} = \varphi_z$, and the commutativity of the lower right triangle amounts to $\varphi_{z,t}(1) = h(z, t)$. $\square$

REMARK. Theorem 1.5.14 shows that, up to homotopy, one can canonically replace any map by a fibration.

The above definition of a fibration can be simplified by looking only at the case of the test space provided by the mapping path space $Z = \text{Path}(p)$:

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{Path}(p) & & \\ & \swarrow \exists! \rho & \nearrow pr_1 & & \\ & E^I & \xrightarrow{e_0} & E & \\ \downarrow pr_2 & \downarrow p_* & & \downarrow p & \\ & B^I & \xrightarrow{e_0} & B & \end{array}$$

where $pr_1(x, \varphi) := x$ and $pr_2(x, \varphi) := \varphi$ stand for the respective projections. By the pullback property, there exists a unique map $\rho : E^I \rightarrow \text{Path}(p)$ making the diagram commutative. When it is satisfied, the homotopy lifting property provides us with a section of it, that is a map $\sigma : \text{Path}(p) \rightarrow E^I$ satisfying $\rho\sigma = \text{id}_{\text{Path}(p)}$.

Proposition 1.5.15. *Let $p : E \rightarrow B$ be a continuous map. The following assertions are equivalent.*

- (1) *The map p is a fibration.*
- (2) *The map p satisfies the homotopy lifting property with respect to its path space $\text{Path}(p)$.*
- (3) *The map $\rho : E^I \rightarrow \text{Path}(p)$ admits a section.*

Proof. It remains to prove (3) $\Rightarrow$ (1) which can be archived using the dual form of the arguments given in the proof of Proposition 1.5.5. $\square$

It is straightforward to see that a fibration $p: E \rightarrow B$ with B path connected is surjective. It is moreover a quotient map by [Sm68, Theorem 1]. This justifies *a posteriori* the notation $\rightarrow$ chosen for fibrations. This also shows that being a fibration is not a homotopy equivalent notion: the identity map of a contractible space is homotopy equivalent to a constant map, which is not a fibration since not surjective in general.

We do not have at hand an easy characterisation of fibrations as Proposition 1.5.7 for cofibrations. However, we will give below several ways to produce automatically fibrations and then two classical classes of maps (coverings and fibre bundles) which are known to be fibrations.

Proposition 1.5.16 (Base change). *For any fibration $p: E \rightarrow B$ and any map $f: A \rightarrow B$, the map $q: B \times_f E \rightarrow E$ obtained by base change under the pullback is a fibration.*

$$\begin{array}{ccc} A \times_f E & \longrightarrow & E \\ q \downarrow & \lrcorner & \downarrow p \\ A & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

Proof. The proof is completely dual to that of Proposition 1.5.9. □

Proposition 1.5.17.

- (1) *Let $i: A \rightarrow X$ be a cofibration between locally compact spaces. The map $i^*: Z^X \rightarrow Z^A$ is a fibration, for any space Z .*
- (2) *Let $p: E \rightarrow B$ be a fibration. The map $p_*: E^Z \rightarrow B^Z$ is fibration, for any locally compact space Z .*

Proof. The proof is left as an exercise. □

EXAMPLE.

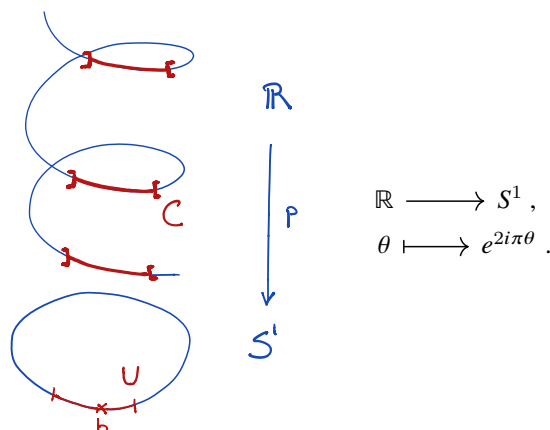
- ◇ Since $i: \partial I \rightarrow I$ is a cofibration between locally compact spaces, the map $X^I \rightarrow X^{\partial I} \cong X \times X$, given by $\varphi \mapsto (\varphi(0), \varphi(1))$, is a fibration.
- ◇ Similarly, the evaluation map $e_t: Y^I \rightarrow Y$, is a fibration, for any $t \in I$ and any Y locally compact, since the embedding $i_t: \{*\} \hookrightarrow I$ is a cofibration. For any map $f: X \rightarrow Y$, the projection map $pr_1: \text{Path}(f) \rightarrow X$ onto the first component is a fibration by base change (Proposition 1.5.16).

$$\begin{array}{ccc} \text{Path}(f) & \longrightarrow & Y^I \\ pr_1 \downarrow & \lrcorner & \downarrow e_0 \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

Definition 1.5.18 (Covering). A *covering* (cover or *covering space*) of a space B is a surjective map $p: E \rightarrow B$ satisfying the property: for all b in B , there exists an open neighbourhood U of b such that the restriction $p|_C: C \xrightarrow{\cong} U$ of p to any connected component C of $p^{-1}(U)$ is an homeomorphism. In this case, E is called the *total space*, B the *base space*, and $F_b := p^{-1}b$ the *fibre* of the covering at b .

REMARK. A covering is called a *revêtement* in French.

EXAMPLE. The paradigm of coverings is the exponential map from the real line onto the circle:



In this case, the fibre is constant and equal to $\mathbb{Z}$.

Another classical covering is provided by the map $p: S^n \twoheadrightarrow P^n\mathbb{R}$ which sends a point $x \in S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ to the line $[x] \in P^n\mathbb{R}$ supported by x . In this case, the fibre is constant and equal to $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ since the real projective space is homeomorphic to $P^n\mathbb{R} \cong S^n/\{\pm 1\}$.

The universal property satisfied by coverings is the following one.

Proposition 1.5.19 (Unique path lifting property). *Let $p: E \twoheadrightarrow B$ be a covering. For any path $\varphi: I \rightarrow B$ and for any $x \in E$ satisfying $\varphi(0) = p(x)$, there exists a unique path $\psi: I \rightarrow E$ lifting φ and starting at x , that is $p\psi = \varphi$ and $\psi(0) = x$.*

We will need the following point-set topological property.

Lemma 1.5.20 (Lebesgue's number lemma). *Let (X, d) be a metric compact space and let $\{U_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ be an open cover of X . There exist a positive real number $\varepsilon > 0$ such that for any $x \in X$, there exists $i \in \mathcal{I}$ satisfying $B(x, \varepsilon) \subset U_i$.*

Proof of Lemma 1.5.20. The proof of this point-set topological property is left as an exercise. $\square$

Proof of Proposition 1.5.19. Let $\varphi: I \rightarrow B$ be a path in B such that $\varphi(0) = p(x)$, with $x \in E$. For any point $t \in I$, we consider an open neighbourhood $U_{\varphi(t)}$ of $\varphi(t)$ in B satisfying the defining property of a covering. Since φ is continuous, $\{\varphi^{-1}(U_{\varphi(t)})\}_{t \in I}$ is an open cover of the metric compact space I . Therefore, it admits a Lebesgue number $\varepsilon > 0$. We divide the interval $I = [0, 1]$ into $t_0 := 0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n := 1$ such that $t_k - t_{k-1} < \varepsilon$, for any $1 \leq k \leq n$. It is then straightforward to prove by induction on k that there exists a unique map $\psi_k: [0, t_k] \rightarrow E$ satisfying $\psi_k(0) = x$ and $p\psi_k = \varphi|_{[0, t_k]}$. Indeed for $k = 0$, this is trivial. Suppose that the result holds for k and let us prove it for $k + 1$. We consider $s \in t$ such $B(t_k, \varepsilon) \subset \varphi^{-1}(U_{\varphi(s)})$. Let C be the connected component of $p^{-1}(U_{\varphi(s)})$ containing $\psi_k(t_k)$. So the restriction $p|_C: C \cong U_{\varphi(s)}$ is an homeomorphism. This proves that the following map

$$\psi_{k+1}(t) := \begin{cases} \psi_k(t), & \text{for } 0 \leq t \leq t_k, \\ (p|_C)^{-1}(\varphi(t)), & \text{for } t_k \leq t \leq t_{k+1}, \end{cases}$$

defines a unique lifting. $\square$

Theorem 1.5.21. *Any covering $p: E \rightarrow B$ is a fibration with a unique section $\sigma: \text{Path}(p) \rightarrow E^I$.*

Proof. Proposition 1.5.19 shows that Point (3) of Proposition 1.5.15 is satisfied by a unique section σ of the map $\rho: E^I \rightarrow \text{Path}(p)$. $\square$

Notice that each fiber of a covering is discrete. In the next case, we will relax this assumption and require instead the fibre to be constant.

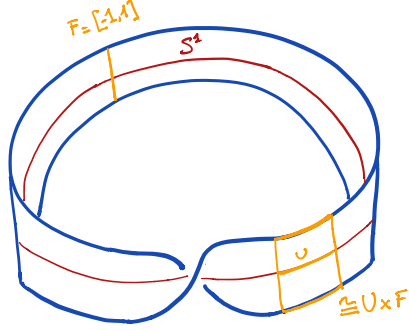
Definition 1.5.22 (Fibre bundle). *A fibre bundle structure on a space E with fibre F is a surjective map $p: E \twoheadrightarrow B$ such that for all b in B , there exist an open neighbourhood U of b and an homeomorphism $h: p^{-1}(U) \xrightarrow{\cong} U \times F$ satisfying the following commutative diagram:*

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U) & \xrightarrow[\cong]{h} & U \times F \\ & \searrow p \quad \swarrow \text{proj} & \\ & U & \end{array}.$$

Each homeomorphism h is called a *local trivialisation*. Fiber bundles are often denoted simply by $F \rightarrow E \rightarrow B$.

Products $B \times F \twoheadrightarrow B$ are trivial fibre bundle; their local trivialisation maps are equal to the identity on $U \times F$.

EXAMPLE. The first non-trivial example of a fibre bundle is given by the Möbius strip



$$[-1, 1] \longrightarrow \frac{I \times [-1, 1]}{(0, v) \sim (1, -v)} \longrightarrow S^1 .$$

Notice that any fibre bundle with a discrete fibre F is a covering. In the other way round, a covering with fibres of same cardinality is a fibre bundle; this is for instance the case when B is connected.

The next result shows that these two classes of maps provide us with fibrations. Let us recall that a space is *paracompact* when every open cover admits a locally finite refinement: at every point, there exists an open neighbourhood that intersects only of finite numbers of its elements. Compact spaces and CW-complexes are paracompact.

Theorem 1.5.23. *Any fibre bundle $f: E \rightarrow B$ with a paracompact base B is a fibration.*

Proof. The non-trivial proof of this theorem relies on point-set topology; it is thus skipped here. We refer the reader to [May99, Chapter 7, Section 4] for full details. $\square$

The relationship between these various notions is summarized into the following table.

covering	$\subset$ discrete fibre	fibre bundle	$\subset$ constant fibre	fibration	$\subset$ HLP wrt I^n	Serre fibration
----------	--------------------------------	--------------	--------------------------------	-----------	-------------------------------	-----------------

This raises the question of the shape of the fibres in any fibration.

Proposition 1.5.24. *For any fibration $p: E \rightarrow B$, the fibers $p^{-1}(b)$ over each path component are all homotopy equivalent.*

Proof. [Hat02, Proposition 4.61]. TBC $\square$

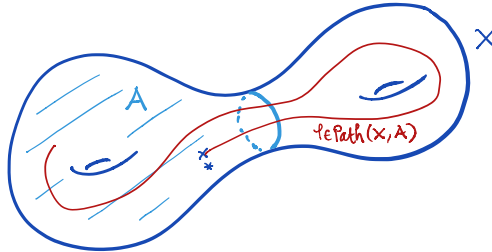
1.6. Computations of homotopy groups. The homotopy groups are paradoxal objects as they are easily defined, see Section 1.3.2, but hardly computable. So this makes them exciting objects of study. In this section, we apply the preceeding notions of a fibration and fiber sequence in order to get a powerful tool to compute some of them.

The fiber sequence of Theorem 1.4.7 associated to the embedding $i: A \hookrightarrow X$ of a pair $(A, *) \subset (X, *)$ of pointed spaces provides us with the following long h-exact sequence:

$$\dots \longrightarrow \Omega^2 \text{Path}(i) \longrightarrow \Omega^2 A \xrightarrow{\Omega^2 i} \Omega^2 X \longrightarrow \Omega \text{Path}(i) \longrightarrow \Omega A \xrightarrow{\Omega i} \Omega X \longrightarrow \text{Path}(i) \longrightarrow A \xrightarrow{i} X .$$

In this case, the path space of i is equal to

$$\text{Path}(X, A) := \text{Path}(i) = \{ \varphi \in X^I \mid \varphi(0) = *, \varphi(1) \in A \} .$$



Definition 1.6.1 (Relative homotopy groups). For any $n \geq 1$, we consider

$$\pi_n(X, A) := \pi_{n-1}(\text{Path}(X, A)) \cong \pi_0(\Omega^{n-1} \text{Path}(X, A)) ,$$

with their group structure, for $n = 2$, and their abelian group structure, for $n \geq 3$. They are called the *relative homotopy groups of a pair* (X, A) .

REMARK. When $A = \{*\}$ is made up of the sole base point, the definition coincides with the classical one $\pi_n(X, \{*\}) \cong \pi_n(X, *)$ as $\text{Path}(X, \{*\}) = \Omega X$.

Theorem 1.6.2 (Long exact sequence associated to a pair). *For any pair $* \in A \subset X$ of pointed topological spaces, there exists a long exact sequence:*

$$\cdots \longrightarrow \pi_2(A) \xrightarrow{\pi_2(i)} \pi_2(X) \longrightarrow \pi_2(X, A) \longrightarrow \pi_1(A) \xrightarrow{\pi_1(i)} \pi_1(X) \longrightarrow \pi_1(X, A) \longrightarrow \pi_0(A) \xrightarrow{\pi_0(i)} \pi_0(X) .$$

Proof. This long exact sequence is obtained from the aforementioned h-exact sequence by applying the functor $[S^0, -]_*$. $\square$

The long exact sequence of Theorem 1.6.2 admits the following more amenable form.

Theorem 1.6.3 (Long exact sequence associated to a fibration). *Let $p : E \twoheadrightarrow B$ be a Serre fibration, with (B, b_0) , a path connected pointed space. Denoting by $F := p^{-1}(b_0)$ the fibre of p , there exists a long exact sequence:*

$$\cdots \longrightarrow \pi_2(F) \longrightarrow \pi_2(E) \longrightarrow \pi_2(B) \longrightarrow \pi_1(F) \longrightarrow \pi_1(E) \longrightarrow \pi_1(B) \longrightarrow \pi_0(F) \longrightarrow \pi_0(E) \longrightarrow \{*\} .$$

REMARK. Notice the similarity with the long exact sequence of homology groups associated to a short exact sequence of chain complexes: the Serre fibration $F \rightarrow E \twoheadrightarrow B$ plays the role of the short exact sequence of topological spaces which induces a long exact sequence of homotopy groups this time.

Proof. TBC $\square$

Corollary 1.6.4. *Any pointed covering $p : E \twoheadrightarrow B$ induces isomorphisms $\pi_n(p) : \pi_n(E) \cong \pi_n(B)$, for $n \geq 2$.*

Proof. This is a direct corollary of Theorem 1.5.21 and Theorem 1.6.3 as the long exact sequence is equal to

$$\cdots \longrightarrow \pi_3(F) \cong 0 \longrightarrow \pi_3(E) \xrightarrow{\cong} \pi_3(B) \longrightarrow \pi_2(F) \cong 0 \longrightarrow \pi_2(E) \xrightarrow{\cong} \pi_2(B) \longrightarrow \pi_1(F) \cong 0 \longrightarrow .$$

$\square$

Proposition 1.6.5. *We have $\pi_n(S^1) \cong 0$, for any $n \geq 2$.*

Proof. This is proved using the covering $\mathbb{R} \twoheadrightarrow S^1$ given by $\theta \mapsto e^{i\theta}$, where $\mathbb{R}$ is contractible. So by Corollary 1.6.4, we get $\pi_n(S^1) \cong \pi_n(\mathbb{R}) \cong 0$, for $n \geq 2$. $\square$

One can endow coverings over a fixed base B with a category structure where morphisms from $p : E \twoheadrightarrow B$ to $p' : E' \twoheadrightarrow B$ are continuous map $f : E \rightarrow E'$ such that $p'f = p$:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & E' \\ & \searrow p & \swarrow p' \\ & B & \end{array} .$$

In this context, we consider the group $\text{Aut}(p)$ of automorphisms of a covering p .

Theorem 1.6.6. *Let $p : E \twoheadrightarrow B$ be a pointed covering from a simply connected and locally path connected space E . The fibre $F = p^{-1}(*)$ is in bijection with $\text{Aut}(p)$ and*

$$\pi_1(B) \cong \text{Aut}(p) .$$

Proof. [GH81, Theorem 5.8] TBC $\square$

Corollary 1.6.7. *The fundamental group of S^1 is isomorphic to $\mathbb{Z}$:*

$$\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z} .$$

Proof. This is a direct corollary of Theorem 1.6.6 applied to the covering $p : \mathbb{R} \twoheadrightarrow S^1$. The fiber is $\mathbb{Z}$ and any automorphism of p is of the form $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x + 2\pi k$, with $k \in \mathbb{Z}$. $\square$

Proposition 1.6.8. *We have $\pi_n(S^d) \cong 0$, for any $n < d$.*

Proof. TBC $\square$

To go further, we need to consider more elaborate fibrations.

Definition 1.6.9 (Complex Hopf fibration). For any $d \geq 1$, the *complex Hopf fibration* is the fiber bundle

$$S^1 \rightarrow S^{2d+1} \rightarrow \mathbb{P}^d \mathbb{C}$$

defined by $(x_0, y_0, \dots, x_d, y_d) \mapsto [x_0 + iy_0 : \dots : x_d + iy_d]$, for any $d \geq 1$.

The classical Hopf fibration coincides to the case $d = 1$:

$$S^1 \rightarrow S^3 \rightarrow S^2 \cong \mathbb{P}^1 \mathbb{C}.$$

Proposition 1.6.10. For any $d \geq 1$, we have

$$\begin{aligned} \pi_1(\mathbb{P}^d \mathbb{C}) &\cong 0, \quad \pi_2(\mathbb{P}^d \mathbb{C}) \cong \mathbb{Z}, \\ \pi_n(\mathbb{P}^d \mathbb{C}) &\cong 0, \quad \text{for } 3 \leq n \leq 2d, \\ \pi_n(\mathbb{P}^d \mathbb{C}) &\cong \pi_n(S^{2d+1}), \quad \text{for } n \geq 2d+1. \end{aligned}$$

Proof. By the preceding results, the long exact sequence of Theorem 1.6.3 associated to the complex Hopf fibration is equal to

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow \pi_{2d+3}(S^{2d+1}) &\xrightarrow{\cong} \pi_{2d+3}(\mathbb{P}^d \mathbb{C}) \rightarrow \underbrace{\pi_{2d+2}(S^1)}_0 \rightarrow \pi_{2d+2}(S^{2d+1}) \xrightarrow{\cong} \pi_{2d+2}(\mathbb{P}^d \mathbb{C}) \rightarrow \underbrace{\pi_{2d+1}(S^1)}_0 \rightarrow \dots \\ &\rightarrow \pi_{2d+1}(S^{2d+1}) \xrightarrow{\cong} \pi_{2d+1}(\mathbb{P}^d \mathbb{C}) \rightarrow \underbrace{\pi_{2d}(S^1)}_0 \rightarrow \underbrace{\pi_{2d}(S^{2d+1})}_0 \xrightarrow{\cong} \pi_{2d}(\mathbb{P}^d \mathbb{C}) \rightarrow \underbrace{\pi_{2d-1}(S^1)}_0 \rightarrow \dots \\ \dots \rightarrow \underbrace{\pi_2(S^1)}_0 &\rightarrow \underbrace{\pi_2(S^{2d+1})}_0 \rightarrow \pi_2(\mathbb{P}^d \mathbb{C}) \xrightarrow{\cong} \underbrace{\pi_1(S^1)}_{\mathbb{Z}} \rightarrow \underbrace{\pi_1(S^{2d+1})}_0 \rightarrow \pi_1(\mathbb{P}^d \mathbb{C}) \rightarrow \{*\}, \end{aligned}$$

where the isomorphism on the level of the fundamental group is given by Theorem 1.6.6. $\square$

Corollary 1.6.11. We have $\pi_2(S^2) \cong \mathbb{Z}$ and $\pi_n(S^2) \cong \pi_n(S^3)$, for $n \geq 3$.

Proof. This is the direct application of Proposition 1.6.10 to the case $d = 1$. $\square$

The complex Hopf fibration admits the following real analogue.

Definition 1.6.12 (Real Hopf fibration). For any $d \geq 1$, the *real Hopf fibration* is the covering

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow S^d \rightarrow \mathbb{P}^d \mathbb{R}$$

defined by $(x_1, \dots, x_d) \mapsto [x_1 : \dots : x_d]$, for any $d \geq 1$.

Proposition 1.6.13. For any $d \geq 1$, we have

$$\begin{aligned} \pi_1(\mathbb{P}^d \mathbb{R}) &\cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \\ \pi_n(\mathbb{P}^d \mathbb{R}) &\cong 0, \quad \text{for } 2 \leq n \leq d-1, \\ \pi_n(\mathbb{P}^d \mathbb{R}) &\cong \pi_n(S^d), \quad \text{for } n \geq d. \end{aligned}$$

Proof. By the preceding results, the long exact sequence of Theorem 1.6.3 associated to the real Hopf fibration is equal to

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow \pi_{d+2}(S^d) &\xrightarrow{\cong} \pi_{d+2}(\mathbb{P}^d \mathbb{R}) \rightarrow 0 \rightarrow \pi_{d+1}(S^d) \xrightarrow{\cong} \pi_{d+1}(\mathbb{P}^d \mathbb{R}) \rightarrow 0 \rightarrow \dots \\ &\rightarrow \pi_d(S^d) \xrightarrow{\cong} \pi_d(\mathbb{P}^d \mathbb{R}) \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \pi_{d-1}(\mathbb{P}^d \mathbb{R}) \rightarrow 0 \rightarrow \dots \\ \dots \rightarrow 0 &\rightarrow \pi_2(\mathbb{P}^d \mathbb{R}) \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \pi_1(\mathbb{P}^d \mathbb{R}) \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow \{*\}. \end{aligned}$$

$\square$

Since the 1-dimensional real projective space $\mathbb{P}^1 \mathbb{R} \cong S^1$ is homeomorphic to the circle, it shares with it the same homotopy groups.

Theorem 1.6.14. For any $n \geq 1$, we have $\pi_n(S^n) \cong \pi_n(\mathbb{P}^n \mathbb{R}) \cong \pi_{2n+1}(\mathbb{P}^n \mathbb{C}) \cong \mathbb{Z}$.

Proof. TBC.

The last two isomorphisms come from Proposition 1.6.10 and Proposition 1.6.13 respectively. $\square$

Here is a first “concrete” application of these computations of homotopy groups.

Corollary 1.6.15. For $0 < k < n$, the embedding $\mathbb{P}^k \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{P}^n \mathbb{R}$ does not admit a retraction.

Proof. Let us denote by i the embedding and let us suppose that it admits a retraction $r: \mathbb{P}^n \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{P}^k \mathbb{R}$. This implies that $\pi_k(r) \circ \pi_k(i) = \text{id}_{\pi_k(\mathbb{P}^k \mathbb{R})}$. So $\pi_k(i): \pi_k(\mathbb{P}^k \mathbb{R}) \cong \mathbb{Z} \hookrightarrow \pi_k(\mathbb{P}^n \mathbb{R}) \cong 0$ is injective, which is impossible by Proposition 1.6.13 and Theorem 1.6.14. $\square$

21/11/24

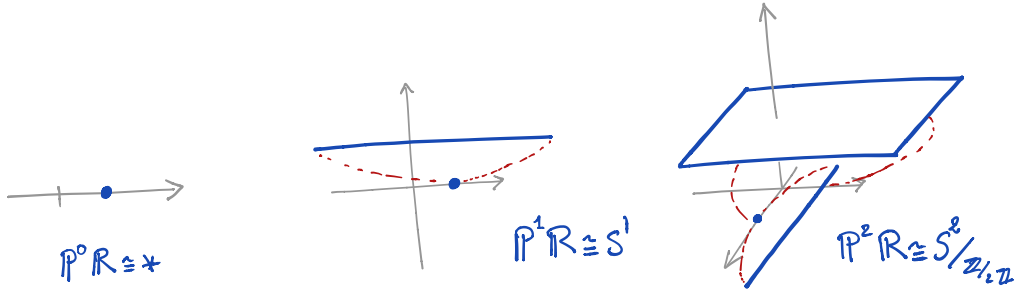
1.7. Cell complexes. So far we have been studying topological spaces from top to bottom, that is we considered all of them, established general properties, and ultimately looked at some examples. Let us now take the dual bottom-to-top approach and consider the particular case of topological spaces which are obtained by consecutive cells gluing. Historical, one of the first motivating example is the Euler characteristic (1752): for all polygonal decomposition of the sphere S^2 , the alternating sum of the number of vertices, edges, and polygons is invariantly equal to

$$\chi(S^2) = \eta(0) - \eta(1) + \eta(2) = 2.$$

In this section, we will focus of the type of such cell complexes given by *CW-complexes*. There is actually no loss of generality as any space can be approximated by a CW-complex. However their homotopy theory is much more simple since, in some sense, their homotopy groups provide us with a complete collection of invariants.

1.7.1. Definitions. The following key example will pave the way to a precise definition for “consecutive cells gluing”.

EXAMPLE (TOY MODEL). Let us consider the real projective spaces, which are defined as the sets $\mathbb{P}^n \mathbb{R} = \mathbb{P} \mathbb{R}^{n+1}$ of lines of $\mathbb{R}^{n+1}$, for any $n \geq 0$. Since there are equivalently defined as the cosets of non-zero points of $\mathbb{R}^{n+1}$ under the action of $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, it is equipped with the coset topology. So, one can see that $\mathbb{P}^0 \mathbb{R}$ is a point, that $\mathbb{P}^1 \mathbb{R}$ is a line glued to this point at each extremities forming a circle, that $\mathbb{P}^2 \mathbb{R}$ is a plane glued along this circle, etc.



Definition 1.7.1 (CW complex). A *CW complex* is a topological space X equipped with an homeomorphism to a colimit

$$\emptyset =: X^{(-1)} \subset X^{(0)} \subset \dots \subset X^{(n)} \subset \dots \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X^{(n)} = \text{colim}_{n \in \mathbb{N}} X^{(n)} \cong X,$$

where

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{J_n} S^{n-1} = J_n \times S^{n-1} & \xrightarrow{\varphi_n} & X^{(n-1)} \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ \coprod_{J_n} D^n = J_n \times D^n & \xrightarrow{\Phi_n} & X^{(n)} = X^{(n-1)} \coprod_{\varphi_n} (J_n \times D^n) \cong \frac{X^{(n-1)} \coprod (J_n \times D^n)}{\varphi_n(j, x) \sim (j, x)}, \end{array}$$

with discrete spaces J_n , for any $n \in \mathbb{N}$. The maps φ_n are called the *attaching maps* and the maps Φ_n are called the *characteristic maps*. The sub-space $X^{(n)}$ is called the *n-skeleton* of X . A CW-complex is *finite dimensional* if $X = X^{(n)}$ for some $n \geq 0$, and it is *finite* when $\coprod_{n \in \mathbb{N}} J_n$ is finite.

REMARK. For infinite dimensional CW-complexes, we consider the *colimit topology* (also called *weak topology*) where any set $U \subset X$ is open if $U \cap X^{(n)}$ is open for any n in $\mathbb{N}$. The underling idea of this topology is to test the properties on all components $X^{(n)}$: a map $f: X \rightarrow Y$ is continuous if and only if all its restrictions $f|_{X^{(n)}}: X^{(n)} \rightarrow Y$ are continuous, for $n \in \mathbb{N}$. In this topology, one often only needs to “approximate X with $X^{(n)}$ for n large enough”: a map $f: K \rightarrow X$ from a compact space K to X is continuous if and only if $f: K \rightarrow X^{(n)} \subset X$ is continuous for some n .

Let us unfold this definition a little bit. One starts from a set J_0 indexing the base points

$$\begin{array}{ccc} \emptyset & \xrightarrow{\varphi_0} & X^{(-1)} = \emptyset \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ J_0 \times \{*\} & \xrightarrow{\Phi_0} & X^{(0)} = J_0 \times \{*\}, \end{array}$$

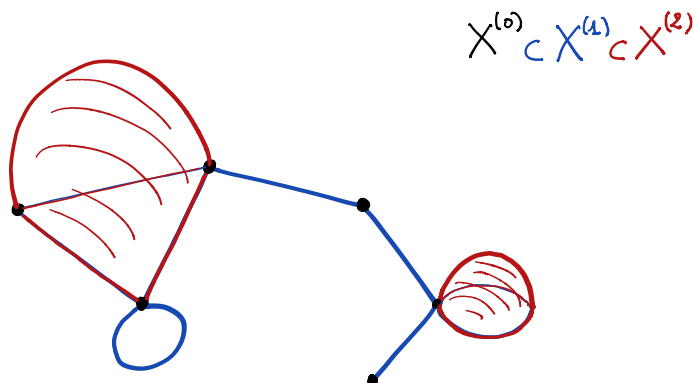
as $S^{-1} = \emptyset$ by convention. Then one glues the endpoints of intervals indexed by J_1 on them:

$$\begin{array}{ccc} J_1 \times \{0, 1\} & \xrightarrow{\varphi_1} & X^{(0)} \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ J_1 \times I & \xrightarrow{\Phi_1} & X^{(1)} \cong \frac{X^{(0)} \amalg (J_1 \times I)}{\varphi_1(j, 0) \sim (j, 0), \varphi_1(j, 1) \sim (j, 1)}, \end{array}$$

as $D^1 = I$ and $S^0 = \partial D^1 = \{0, 1\}$. This produces a graph $X^{(1)}$ on which one glues J_2 copies of disks D^2 along their boundary under the attaching map φ_2 :

$$\begin{array}{ccc} J_2 \times S^1 & \xrightarrow{\varphi_2} & X^{(1)} \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ J_2 \times D^2 & \xrightarrow{\Phi_2} & X^{(2)} \cong \frac{X^{(1)} \amalg (J_2 \times D^2)}{\varphi_2(j, x) \sim (j, 0)}, \end{array}$$

And so on, and so forth ...



EXAMPLE.

- ◊ SPHERES: For any $n \geq 1$, the n -dimensional sphere is a finite CW-complex $S^n \cong \{*\} \amalg_f D^n$ made up of two cells, a point and an n -dimensional disk D^n , with attaching map $f : S^{n-1} = \partial D^n \rightarrow \{*\}$. (Notice that we have already seen this model previously when we considered $S^n \cong D^n / \partial D^n \cong I^n / \partial I^n$.)
- ◊ GRAPHS: The definition of a graph is a 1-dimensional CW-complex. It is a tree when it is simply connected.
- ◊ REAL PROJECTIVE SPACES: For any $d \geq 0$, the d -dimensional real projective space is a finite CW-complex made up of one cell in each dimension from 0 to d :

$$\mathbb{P}^d \mathbb{R} \cong D^0 \amalg_{\varphi_1} D^1 \amalg_{\varphi_2} \cdots \amalg_{\varphi_d} D^d.$$

The infinite dimension real projective space is the colimit of the finite dimensional ones:
 $\mathbb{P}^\infty \mathbb{R} := \text{colim}_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}^n \mathbb{R}.$

- ◊ COMPLEX PROJECTIVE SPACES: For any $d \geq 0$, the $2d+2$ -dimensional complex projective space is a finite CW-complex made up of one cell in each dimension from 0 to d :

$$\mathbb{P}^d \mathbb{C} \cong D^0 \amalg_{\varphi_2} D^2 \amalg_{\varphi_4} \cdots \amalg_{\varphi_{2d+2}} D^{2d+2}.$$

where the complex Hopf fibration $\varphi_{2n+2}: S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{P}^n \mathbb{C}$ is the attaching map. The infinite dimension complex projective space is the colimit of the finite dimensional ones: $\mathbb{P}^\infty \mathbb{C} := \text{colim}_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}^n \mathbb{C}$.

- ◊ TORUS: The torus $S^1 \times S^1$ is a finite CW-complex made up of one vertex, two 1-cells, and one 2-cells.

REMARK. The terminology “CW-complex” comes from “C” for “Closed finiteness”, as the boundary of any cell intersects a finite number of other cells, and “W” for “Weak topology”.

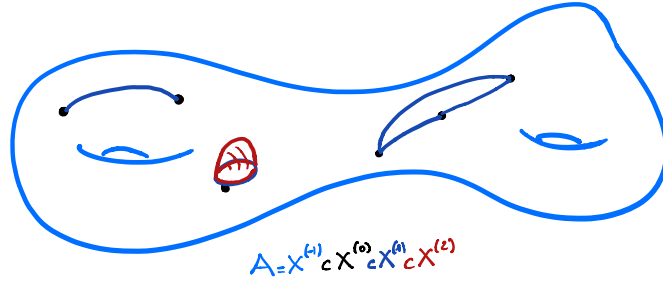
Proposition 1.7.2. *Let X, Y be two CW complexes such that either X or Y are locally compact either X and Y have both a countable number of cells. In this case, the product $X \times Y$ is a CW complex.*

Proof: [exercise](#) □

Definition 1.7.3 (Relative CW complex). A pair (X, A) of topological spaces is a *relative CW complex* if X is homeomorphic to a colimit

$$A =: X^{(-1)} \subset X^{(0)} \subset \dots \subset X^{(n)} \subset \dots \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X^{(n)} = \text{colim}_{n \in \mathbb{N}} X^{(n)} \cong X,$$

where each embedding $X^{(n)} \hookrightarrow X^{(n+1)}$ is obtained as in the definition of a CW complex.



revoir la figure : à la première étape, on ajoute des points de manière disjointe. This means that instead of starting from the empty set and considering points, intervals, etc., one starts here from a given topological space A on which one puts points, attach interval, etc. A relative CW complex of the form $(X, \emptyset)$ is a CW complex. X .

Definition 1.7.4 (CW subcomplex and CW pair). A subspace $A \subset X$ of a CW complex X is a *CW subcomplex* if it is obtained by the restrictions of the attaching maps of X to subcollections $K_n \times S^{n-1}$, with $K_n \subset J_n$, for any $n \geq 0$. A *CW pair* is a pair (X, A) where A is a CW subcomplex of X .

REMARK. A CW pair (X, A) is also a relative CW complex, by the reverse does not hold true.

EXERCISE. Let (X, A) be a CW pair. Show that X/A is a CW complex.

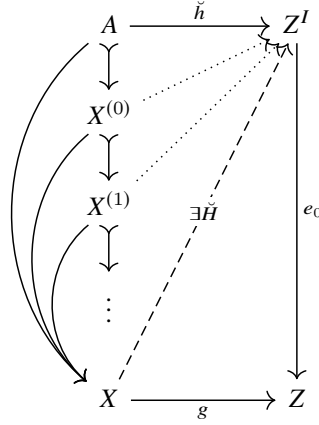
Proposition 1.7.5. *For any relative CW complex (X, A) , the embedding $A \hookrightarrow X$ is a cofibration.*

Proof. We saw in Section 1.5.1 that the embedding $S^{n-1} \hookrightarrow D^n$ is a cofibration. Since cofibrations are stable under coproducts (straightforward) and cobase change (Proposition 1.5.9), every map $X^{(n-1)} \hookrightarrow X^{(n)}$ is a cofibration, for $n \geq 0$.

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{J_n} S^{n-1} & \xrightarrow{\varphi_n} & X^{(n-1)} \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ \coprod_{J_n} D^n & \xrightarrow{\Phi_n} & X^{(n)} \end{array}$$

Since cofibrations are stable under composition, every map $A \hookrightarrow X^{(n)}$ is a cofibration, for $n \geq 0$. The arguments of the proof of the stability under composition pass to the colimit, so $A \hookrightarrow X$ is a

cofibration.



□

Definition 1.7.6 (Euler characteristic). The *Euler characteristic* of a finite CW complex X is defined by the alternating sum

$$\chi(X) := \sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^n |J_n| .$$

Nothing guaranties *a priori* that two finite CW decomposition of a space X will carry the same Euler characteristic.

Proposition 1.7.7. *The Euler characteristic is well defined and homotopy invariant.*

Proof. The most natural proof of these two facts relies on the cellular homology, see [tD08, Section 12.4] for instance. □

Considering continuous maps between CW complexes, one gets a full subcategory of topological spaces. It is however desirable to consider maps which respect the cellular structures.

Definition 1.7.8 (Cellular map). A continuous map $f: X \rightarrow Y$ between CW complexes is *cellular* if it satisfies

$$f(X^{(n)}) \subset Y^{(n)} ,$$

for all $n \in \mathbb{N}$.

Proposition 1.7.9. *For any cellular map $f: X \rightarrow Y$ between two CW complexes, the factorisation*

$$X \xrightarrow{i_1} \text{Cyl}(f) \xrightarrow{\sim_p} Y$$

(with a curved arrow f from X to Y)

considered in Section 1.5.1 is made up of cellular maps.

Proof. The point first amounts to endowing the cylinder construction $\text{Cyl}(f)$ with a CW complex structure. [TBC:exercise](#) □

25/11/24

1.7.2. Whitehead theorem. We have seen in Proposition 1.3.6 that the notion of homotopy groups is homotopy invariant, that is, if $f: X \rightarrow Y$ is a homotopy equivalence, then $\pi_n(f): \pi_n(X) \cong \pi_n(Y)$ is an isomorphism, for any $n \geq 0$. One can ask the reverse question, that is consider the continuous maps which induces isomorphisms on the level of the homotopy groups. Since homotopy groups detects a huge amount of the homotopy type of spaces, they should be of particular interest.

Definition 1.7.10 (Weak homotopy equivalence). A continuous map $f: X \rightarrow Y$ is a *weak homotopy equivalence* when the maps

$$\pi_n(f): \pi_n(X, x) \xrightarrow{\cong} \pi_n(Y, (f(x)))$$

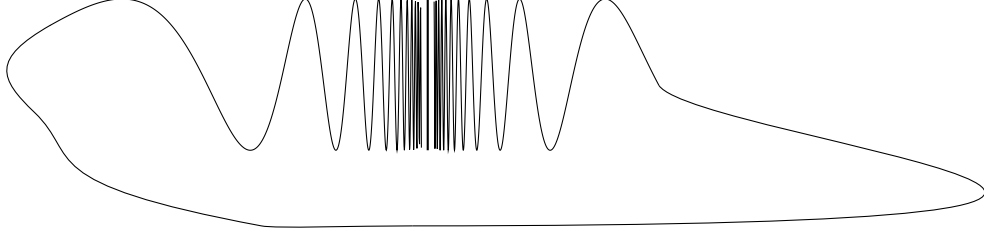
are bijective for all $n \geq 0$ and $x \in X$. We denote them by $f: X \xrightarrow{\sim_w} Y$.

When it is the case, we have isomorphisms of groups for $n \geq 1$ and a bijection between the respective sets of connected components.

So a homotopy equivalence is a weak homotopy equivalence. The reverse is not true in general: let us consider the Warsaw circle defined by

$$W := \left\{ \left(x, \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right), -\frac{1}{2\pi} \leq x \leq \frac{1}{2\pi}, x \neq 0 \right\} \cup \{0\} \times [-1, 1] \cup C,$$

where C is a continuous arc from $(-\frac{1}{2\pi}, 0)$ to $(\frac{1}{2\pi}, 0)$ disjoint from the other sets.



It is connected but has two path components. The map $f: \{a, b\} \rightarrow W$ which sends a to point in $\{0\} \times [-1, 1]$ and b to a point in C is a weak homotopy equivalence. But it is not a homotopy equivalence since this would imply the existence of a map $g: W \rightarrow \{a, b\}$ such that fg is homotopic to the identity of W , which is impossible.

However the reverse holds true for CW-complexes.

Theorem 1.7.11 (Whitehead). *Let X and Y be two CW complexes. Any map $f: X \rightarrow Y$ is an homotopy equivalence if and only if it is a weak homotopy equivalence.*

This theorem shows that the Warsaw circle cannot admit any CW complex structure.

REMARK. Be careful that the data of a map $f: X \rightarrow Y$ is mandatory. Consider for instance the two CW complexes $X := S^2 \times \mathbb{P}^3\mathbb{R}$ and $Y := \mathbb{P}^2\mathbb{R} \times S^3$. They are both path-connected and they share similar coverings

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow S^2 \times S^3 \rightarrow S^2 \times \mathbb{P}^3\mathbb{R} \quad \text{and} \quad \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow S^2 \times S^3 \rightarrow \mathbb{P}^2\mathbb{R} \times S^3.$$

So their homotopy groups are isomorphic. But there cannot exist any homotopy equivalence between since their homology groups are different, $H_5(S^2 \times \mathbb{P}^3\mathbb{R}) \not\cong H_5(\mathbb{P}^2\mathbb{R} \times S^3)$ for instance. Whitehead theorem implies that there is no map $S^2 \times \mathbb{P}^3\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{P}^2\mathbb{R} \times S^3$ which realises the isomorphisms between their homotopy groups.

The key ingredient in the proof of Whitehead theorem is the following lemma.

Lemma 1.7.12 (Compression). *Let (X, A) be a relative CW complex and (Y, B) be a pair of topological spaces, with $B \neq \emptyset$, such that, for any $n \geq 1$ satisfying $X^{(n-1)} \subsetneq X^{(n)}$, then $\pi_n(Y, B) \cong 0$. Any continuous map $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ of pairs of spaces is homotopic relative to A to a map $g: X \rightarrow B$.*

Proof. Let us denote by $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ the increasing sequence of the dimensions of the cells of X , that is $J_n = \emptyset$ if and only if $n \notin \{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$. By convention, we set $n_{-1} := -1$ and $f^{(-1)} := f$. Let us prove, by induction on $k \in \mathbb{N}$, i.e. on the dimension of the skeleton of X , that there exists a map $f^{(k)}: X \rightarrow Y$ homotopic to $f^{(k-1)}$ relative to $X^{(n_{k-1})}$ and whose restriction to $X^{(n_k)}$ has image in B , that is $f^{(k)}(X^{(n_k)}) \subset B$. We will denote such a homotopy by $H^{(k)}$.

We initiate this induction with the case n_0 , which is the smallest dimension of cells in X . By definition, the following diagram commutes.

$$\begin{array}{ccccc} J_{n_0} \times S^{n_0-1} & \xrightarrow{\varphi_{n_0}} & A & \xrightarrow{f} & B \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ J_{n_0} \times D^{n_0} & \xrightarrow{\Phi_{n_0}} & X^{(n_0)} & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

So the composite $f\Phi_{n_0}$ is a map of pairs $(J_{n_0} \times D^{n_0}, J_{n_0} \times S^{n_0-1}) \rightarrow (Y, B)$, which is equivalent to a collection $\{(D^{n_0}, S^{n_0-1}) \rightarrow (Y, B)\}_{J_{n_0}}$ of maps of pairs. By assumption, the relative homotopy group $\pi_{n_0}(Y, B) \cong 0$ is trivial; recall that it is equivalent to

$$\pi_{n_0}(Y, B) \cong [(I^{n_0}, \partial I^{n_0}), (Y, B)] \cong [(D^{n_0}, S^{n_0-1}), (Y, B)].$$

This implies that the composite $f\Phi_{n_0}$ is homotopic to a map $\psi: J_{n_0} \times D^{n_0} \rightarrow B \subset Y$ relative to $J_{n_0} \times S^{n_0-1}$. Let us denote this homotopy by $\tilde{h}: J_{n_0} \times D^{n_0} \times I \rightarrow Y$, so that $\tilde{h}(-, 0) = f\Phi_{n_0}$ and $\tilde{h}(-, 1) = \psi$. We consider the following diagram

$$\begin{array}{ccccc}
J_{n_0} \times S^{n_0-1} \times I & \xrightarrow{\varphi_{n_0} \times \text{id}_I} & A \times I & \xrightarrow{\tilde{f}} & B \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
J_{n_0} \times D^{n_0} \times I & \xrightarrow{\Phi_{n_0} \times \text{id}_I} & X^{(n_0)} \times I & \xrightarrow{\exists! h} & Y \\
& \searrow \tilde{h} & & &
\end{array}$$

where $\tilde{f}(a, t) := f(a)$. Notice that $X^{(n_0)} \times I$ is the pushout of the upper left square. Since $\tilde{h}$ is a homotopy relative to $J_{n_0} \times S^{n_0-1}$, the external square commutes and the pushout property provides us with a (unique) map $h: X^{(n_0)} \times I \rightarrow Y$. We claim that h is a homotopy relative to A from $f|_{X^{(n_0)}}$ to $h(-, 1): X^{(n_0)} \rightarrow B \subset Y$. First, the commutativity of the upper right square shows that h is a homotopy relative to A and that the image of $h(-, 1)$ lives in B . Then, the commutativity of the lower left triangle gives $\tilde{h}(-, 0) = f\Phi_{n_0} = h(-, 0)\Phi_{n_0}$ and the pushout property defining $X^{(n_0)}$ shows that $h(-, 0) = f|_{X^{(n_0)}}$.

Finally, we consider the following diagram

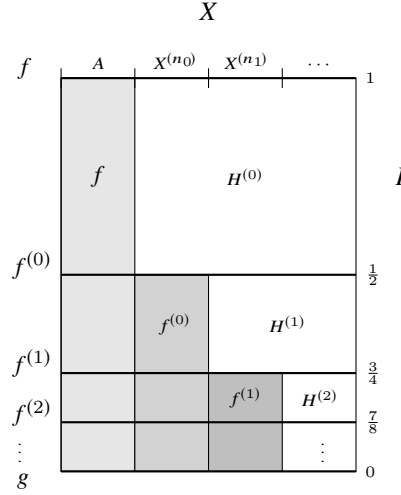
$$\begin{array}{ccccc}
X^{(n_0)} & \xrightarrow{i_0} & X^{(n_0)} \times I & & \\
\downarrow & \searrow & \downarrow & \searrow h & \\
X & \xrightarrow{i_0} & X \times I & \xrightarrow{\exists H^{(0)}} & Y \\
& \searrow f & & &
\end{array}$$

whose exterior square commutes since $h(-, 0) = f|_{X^{(n_0)}}$. We have seen in Proposition 1.7.5 that the inclusions of CW subcomplex are cofibrations. Thus, the cofibration property applied to $X^{(n_0)} \hookrightarrow X$ gives the existence of a map $H^{(0)}: X \times I \rightarrow Y$. We claim that this provides us with a homotopy relative to A from f to $f^{(0)} := H^{(0)}(-, 1): X \rightarrow Y$ such that $f^{(0)}(X^{(n_0)}) \subset B$. Indeed, the commutativity of the upper right triangle shows that it is a homotopy relative to A since h is and that $H^{(0)}(-, 1)$ sends elements of $X^{(n_0)}$ to B since h does. The commutativity of the lower left triangle says $H^{(0)}(-, 0) = f$.

Suppose now that the result holds up to k . We prove it for $k+1$ by the exact same method replacing A by $X^{(n_k)}$, $X^{(n_k)}$ by $X^{(n_{k+1})}$, and f by $f^{(k)}$.

For finite dimensional CW complexes X , the proof is over. Otherwise, we introduce the following homotopy $\mathcal{H}$. For any $k \geq 0$, we define

$$\mathcal{H}(x, t) := H^{(k)}\left(x, 2^{k+1}\left(t - 1 + \frac{1}{2^k}\right)\right), \quad \text{for } t \in \left[1 - \frac{1}{2^k}, 1 - \frac{1}{2^{k+1}}\right].$$



For any $x \in X$, there exists $k \in \mathbb{N}$ such that $x \in X^{(n_k)}$. By construction, we have $H^{(l)}(x, s) = f^{(k)}(x)$, for any $l \geq k$ and any $s \in I$. The assignment $\mathcal{H}(x, 1) := f^{(k)}(x)$ finishes to define a continuous map $\mathcal{H}: X \times I \rightarrow Y$, which is a homotopy relative to A from f to a map $g = \mathcal{H}(-, 1): X \rightarrow B \subset Y$. $\square$

Proposition 1.7.13 (Whitehead). *Let $f: X \rightarrow Y$ be a weak homotopy equivalence. The pushforward map $f_*: [Z, B] \xrightarrow{\cong} [Z, Y]$ is an isomorphism for any CW complex Z .*

Proof. We consider the factorization $X \xrightarrow{i_1} \text{Cyl}(f) \xrightarrow{\sim_P} Y$ of f given in Theorem 1.5.8. When f is a weak homotopy equivalence, so is i_1 since P is a homotopy equivalence. As a consequence, it is enough to prove the statement for embeddings and even for inclusions $X \hookrightarrow Y$ since homeomorphisms are homotopy equivalences.

SURJECTIVITY: We apply Theorem 1.6.2 to the inclusion $X \hookrightarrow Y$ which produces the following long exact sequence of homotopy groups:

$$\cdots \longrightarrow \pi_2(X) \xrightarrow{\cong} \pi_2(Y) \longrightarrow \pi_2(Y, X) \longrightarrow \pi_1(X) \xrightarrow{\cong} \pi_1(Y) \longrightarrow \pi_1(Y, X) \longrightarrow \pi_0(X) \xrightarrow{\cong} \pi_0(Y) .$$

The isomorphisms $\pi_n(X) \cong \pi_n(Y)$, for $n \geq 0$, show that all the relative homotopy groups $\pi_n(Y, X) \cong 0$ are trivial. The compression lemma 1.7.12 implies that any map $\varphi: (Z, \emptyset) \rightarrow (Y, X)$ is homotopic to a map $\psi: Z \rightarrow X$. This shows the surjectivity of the pushforward map f_* .

INJECTIVITY: Let $\alpha, \beta: Z \rightarrow X$ be two maps from a CW complex Z such that there exists a homotopy H between $f\alpha$ and $f\beta$, where $f: X \hookrightarrow Y$ is the inclusion. Since I is locally compact, the product $Z \times I$ is a CW complex and $(Z \times I, Z \times \partial I)$ is a CW pair so a relative pair. We apply the compression lemma 1.7.12 to $H: (Z \times I, Z \times \partial I) \rightarrow (Y, X)$; this produces a map $K: Z \times I \rightarrow X$ which is homotopic to H relative to $Z \times \partial I$. This is a homotopy from α to β and this shows the injectivity of the pushforward map f_* . $\square$

With this result, we can now conclude the proof of the Whitehead theorem.

Proof of Whitehead theorem 1.7.11. Let $f: X \rightarrow Y$ be a weak homotopy equivalence between two CW complexes. We apply Whitehead proposition 1.7.13 to $Z := Y$ to get the epimorphism $[Y, X] \twoheadrightarrow [Y, Y]$. Pulling back the identity of Y , we get a map $g: Y \rightarrow X$ such that $fg \sim \text{id}_Y$. This implies that g is weak homotopy equivalence. We apply again Whitehead proposition 1.7.13 to g and $Z = X$. The epimorphism $[X, Y] \twoheadrightarrow [X, Y]$ provides us with a map $\varphi: X \rightarrow Y$ satisfying $\varphi g \sim \text{id}_X$. In the end, we get $\varphi \sim fg\varphi \sim f$ and then $gf \sim g\varphi \sim \text{id}_X$, which concludes the proof. $\square$

One can check from the proof of Whitehead theorem 1.7.11 that its statement holds as well for spaces that only have the *homotopy type* of CW complexes, that is for spaces that are homotopy equivalent to CW complexes.

REMARK. The notion of a homotopy equivalence defines an equivalence relation on topological spaces. The notion of weak homotopy equivalence fails to define an equivalence relation on all topological spaces as the above example of the Warsaw circle shows. However, Whitehead theorem 1.7.11 shows that weak homotopy equivalence actually defines an equivalence relation on CW complexes.

Refining the aforementioned arguments, one can establish a connected version of Whitehead theorem.

Definition 1.7.14 (*n*-connected space). A topological space X is *n*-connected when $\pi_k(X) \cong 0$, for any $k \leq n$.

Under this terminology, a 0-connected space is a path-connected space and a 1-connected space is a simply connected space.

Definition 1.7.15 (*n*-connected map). A continuous map $f: X \rightarrow Y$ is *n*-connected when $\pi_k(f): \pi_k(X) \xrightarrow{\cong} \pi_k(Y)$ is an isomorphism for any $k < n$ and an epimorphism $\pi_n(f): \pi_n(X) \twoheadrightarrow \pi_n(Y)$ for $k = n$.

Proposition 1.7.16 (*n*-connected version). Let $n \geq 1$ and let $f: X \rightarrow Y$ be an *n*-connected map. The pushforward map $f_*: [Z, X] \rightarrow [Z, Y]$ is an isomorphism for any CW complex Z of dimension at most $n - 1$ and an epimorphism any CW complex Z of dimension at most n .

Proof. In the proof of Proposition 1.7.13, the surjectivity of f_* holds for CW complexes Z of dimension at most n and the injectivity holds for CW complexes Z of dimension at most $n - 1$. $\square$

Theorem 1.7.17 (*n*-connected version). Let X and Y be two CW complexes of dimension at most n . Any map $f: X \rightarrow Y$ is an homotopy equivalence if and only if it induces an isomorphism $\pi_k(f): \pi_k(X) \xrightarrow{\cong} \pi_k(Y)$, for any $k \leq n$.

Proof. The proof of the Whitehead theorem 1.7.11 still holds here with the *n*-connected version 1.7.16 of Whitehead corollary. $\square$

REMARK. This statement is particularly strong: for finite dimensional CW complexes, it is enough to check that a map induces isomorphisms up between homotopy groups to the top dimension of the CW complexes to get isomorphisms in *all* dimension. This remark is far from being trivial since J.-P. Serre proved in [Ser51] that any non-contractible simply-connected finite CW-complex has infinitely many nontrivial homotopy groups.

Corollary 1.7.18. A CW complex X is contractible if and only if all its homotopy groups are trivial: $\pi_n(X) \cong 0$, for all $n \in \mathbb{N}$.

Proof. It is enough to apply Whitehead theorem 1.7.11 to the constant map $X \rightarrow \{*\}$. $\square$

1.7.3. *Cellular approximations.* How far are topological spaces from CW complexes?

Theorem 1.7.19 (CW approximation). For any topological space X , there exists a CW complex X_{CW} and a weak homotopy equivalence

$$\omega_X: X_{CW} \xrightarrow{\sim_w} X.$$

For any map $f: X \rightarrow Y$ and for any CW replacements $\omega_X: X_{CW} \rightarrow X$ and $\omega_Y: Y_{CW} \rightarrow Y$, there exists a map $F: X_{CW} \rightarrow Y_{CW}$, unique up to homotopy, such that the diagram

$$\begin{array}{ccc} X_{CW} & \xrightarrow{\omega_X} & X \\ \downarrow F & & \downarrow f \\ Y_{CW} & \xrightarrow{\omega_Y} & Y \end{array}$$

is homotopy commutative.

Proof. Regarding the first point, the idea amounts to working by induction on the dimension $n \in \mathbb{N}$ and to create a CW complex $X_{CW}^{(n)}$ with the same homotopy groups as X for $k \leq n$. In order to do so, one considers a presentation of $\pi_n(X)$ by generators and relations. The generators give rise to characteristic maps φ_n and the relations give rise to characteristic maps φ_{n+1} . At each step, this construction is mapped $X_{CW}^{(n)} \rightarrow X$ to the representative of the homotopy groups in X .

The second point is a direct application of Proposition 1.7.13 to the weak homotopy equivalence ω_Y and to the CW complex $Z = X_{CW}$: there exists a map $F: X_{CW} \rightarrow Y_{CW}$, unique up to homotopy, such that $\omega_Y F \sim f \omega_X$. $\square$

Such cellular approximations do not hold only for spaces, but also for maps.

Theorem 1.7.20 (Cellular approximation). Any map $f: X \rightarrow Y$ between CW complexes is homotopic to a cellular map.

Proof. TBC $\square$

1.7.4. Hurewicz theorem. Let $n \geq 1$ et let $f : S^n \rightarrow X$ be a continuous map. It induces a group morphism $H_n(f) : H_n(S^n) = H_n(S^n, \mathbb{Z}) \rightarrow H_n(X) = H_n(X, \mathbb{Z})$. Since $H_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$, we consider the assignment

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_n : \pi_n(X) &\longrightarrow H_n(X) \\ [f] &\longmapsto H_n(f)(1) . \end{aligned}$$

Lemma 1.7.21. *The map $\mathcal{H}_n$ is well defined and is a group morphism.*

Proof. TBC □

Definition 1.7.22 (Hurewicz morphism). The morphism $\mathcal{H}_n : \pi_n(X) \rightarrow H_n(X)$ is called the *Hurewicz morphism*.

EXAMPLE. For $X = S^n$, the upshot $\mathcal{H}_n(f) \in \mathbb{Z}$ of the Hurewicz morphism is the *degree* of the map $f : S^n \rightarrow S^n$, that is the number of times that the n -dimensional sphere wraps around itself under the map f .

Theorem 1.7.23 (Hurewicz). *Let X be a $(n-1)$ -connected topological space.*

- (1) *The reduced homology groups vanish $\tilde{H}_k(X) \cong 0$, for $0 \leq k < n$.*
- (2) *When $n = 1$, the Hurewicz morphism is the abelianisation map*

$$\mathcal{H}_1 : \pi_1(X) \twoheadrightarrow H_1(X) \cong \frac{\pi_1(X)}{[\pi_1(X), \pi_1(X)]}$$

and, when $n \geq 2$, the Hurewicz morphism

$$\mathcal{H}_n : \pi_n(X) \cong H_n(X)$$

is an isomorphism of abelian groups.

Proof. TBC □

Theorem 1.7.24 (Brouwer). *For any $n \geq 1$, we have $\pi_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$.*

Proof. This is a direct corollary of the Hurewicz theorem 1.7.23 applied to the $(n-1)$ -connected space S^n . □

Corollary 1.7.25. *Any map $f : X \rightarrow Y$ between two simply connected CW complexes which induces a homology isomorphisms $H_n(X) \cong H_n(Y)$, for any $n \in \mathbb{N}$, is a homotopy equivalence.*

Proof. TBC □

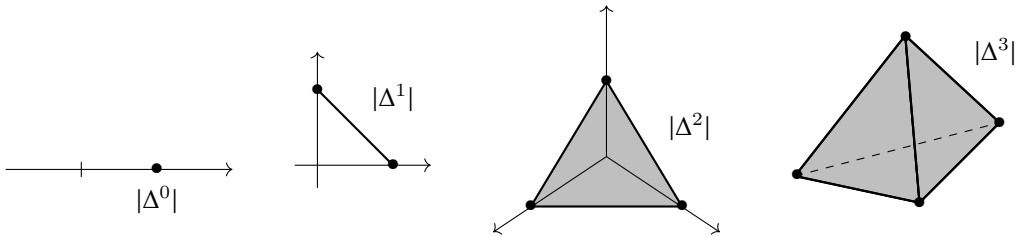
Nous venons de voir que les CW complexes fournissent une très large famille d'espaces topologiques (tout espace topologique est faiblement équivalent à un CW complexe). Malheureusement, la donnée d'un CW complexe n'est pas "simple" (comment code-t-on cela dans un ordinateur ?). L'idée ici sera de passer du modèle utilisant des disques (D^n, S^{n-1}) comme brique de base à des n -simplexes géométriques standards $(|\Delta^n|, \partial|\Delta^n|)$. La donnée des recollements de cellules est alors beaucoup plus simple car purement combinatoire. Ceci donne naissance à la notion d'ensembles simpliciaux. Ce n'est donc pas pour rien que ce domaine est souvent qualifié de "théorie d'homotopie combinatoire". L'étudiant-e mathématicien-ne est chanceux-se : la théorie des ensembles simpliciaux admet un paradigme, un exemple sur lequel (presque) toutes les définitions et propriétés peuvent être lues facilement, il s'agit des simplexes standards.

2.1. Espaces topologiques triangulés. Les diverses notions de la topologie algébrique, comme les groupes de (co)homologie ou les groupes d'homotopie, s'avèrent en général difficiles à calculer. Comme toujours, toute information supplémentaire est la bienvenue pour simplifier de tels calculs. Dans cette section, nous considérerons les espaces topologiques munis d'une bonne décomposition en cellules qui auront la forme de points, d'intervalles, de triangles, de tétraèdres, etc. Plus précisément, en toute dimension, les briques de base sont les simplexes géométriques.

Définition 2.1.1 (Simplexe géométrique). Un n -simplexe géométrique est l'enveloppe convexe de $n + 1$ points indépendants d'un espace affine.

EXEMPLE. L'exemple le plus naturel est le n -simplexe géométrique standard qui est l'enveloppe convexe des $n + 1$ vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$:

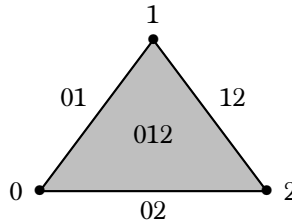
$$|\Delta^n| := \left\{ (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_i \geq 0, \forall i \in \{0, \dots, n\}, \text{ et } \sum_{i=0}^n x_i = 1 \right\}.$$



Comme seule la donnée combinatoire des $n + 1$ points $v_0, \dots, v_n$ nous intéresse, nous noterons un simplexe géométrique par $\langle v_0, \dots, v_n \rangle$.

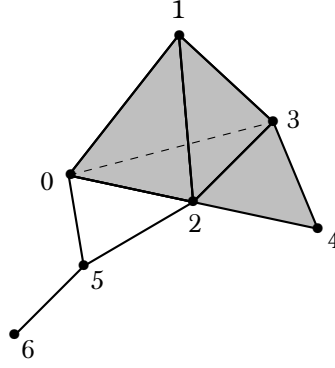
Définition 2.1.2 (Face). Soit $I = \{i_0, \dots, i_k\} \subset \{0, \dots, n\}$, on appelle I^c -face d'un simplexe géométrique $\langle v_0, \dots, v_n \rangle$, le sous- k -simplexe géométrique $\langle v_{i_0}, \dots, v_{i_k} \rangle$. Le j^e -sommet d'un simplexe géométrique est sa $\{j\}^c$ -face $\langle v_j \rangle$.

EXEMPLE. Les différentes faces du 2-simplexe géométrique standard sont les suivantes. Dans ce texte, nous noterons les faces des simplexes géométriques standards simplement par $i_0 \dots i_k$.



Une première notion d'espace topologique formée à partir de ces éléments est la suivante.

Définition 2.1.3 (Polyèdre simplicial). Un polyèdre simplicial $|\mathfrak{X}|$ de $\mathbb{R}^N$ est la donnée d'une collection finie de simplexes géométriques, de dimensions quelconques, telle que toute intersection d'une paire de simplexes est une face de chacun d'eux.



Les classes d'équivalence à homéomorphisme près des polyèdres simpliciaux sont représentées fidèlement par des données combinatoires simples.

Définition 2.1.4 (Complexe simplicial). Un *complexe simplicial* est un paire $(V, \mathfrak{X})$ où V est un ensemble et $\mathfrak{X}$ un ensemble de sous-ensembles non-vides et finis de V tels que

- ◊ $\{v\} \in \mathfrak{X}$, pour tout $v \in V$,
- ◊ pour tout $Y \in \mathfrak{X}$, on a $Z \subset Y \Rightarrow Z \in \mathfrak{X}$.

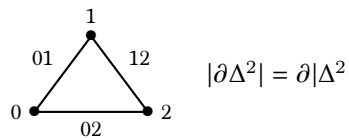
Les éléments de V sont les *sommets* et les éléments de $\mathfrak{X}$ sont les *faces*.

Par un léger abus de notation, on notera souvent un complexe simplicial simplement par $\mathfrak{X}$. Les classes d'équivalence à homéomorphisme cellulaire près des polyèdres simpliciaux sont en bijection avec les classes d'équivalence des complexes simpliciaux finis à bijection près des sommets. Dans le cas représenté ci-dessus, le complexe simplicial fini est :

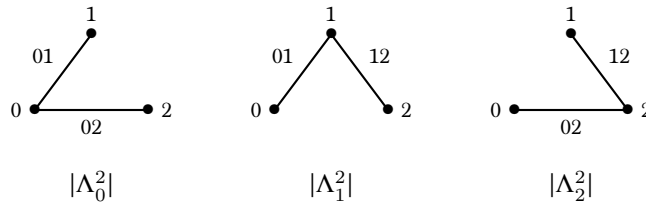
$$\{0\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{0, 3\}, \{0, 5\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \\ \{5, 6\}, \{0, 1, 2\}, \{0, 1, 3\}, \{0, 2, 3\}, \{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{0, 1, 2, 3\}.$$

EXEMPLES.

- ◊ Tout simplexe géométrique $\langle v_0, \dots, v_n \rangle$ est un polyèdre simplicial. La donnée combinatoire associée de complexe simplicial est formée de tous les sous-ensembles de $\{v_0, \dots, v_n\}$. Ceci correspond à l'ensemble de ses faces.
- ◊ On peut aussi considérer un simplexe géométrique $\langle v_0, \dots, v_n \rangle$ amputé de sa face de dimension maximale; on le note $\partial \langle v_0, \dots, v_n \rangle$ car il correspond au bord de $\langle v_0, \dots, v_n \rangle$. Sa donnée combinatoire est formée de tous les sous-ensembles de $\{v_0, \dots, v_n\}$ sauf $\{v_0, \dots, v_n\}$ lui-même. Ceci nous fournit un modèle pour la sphère de dimension $n - 1$, pour $n \geq 1$.



- ◊ Le k^e -cornet de dimension n est le complexe simplicial Λ_k^n obtenu à partir de $\partial \Delta^n$ en retirant la face $0 \cdots \widehat{k} \cdots n$.



Le n -squelette d'un complexe simplicial $\mathfrak{X}$ est le complexe simplicial $\mathfrak{X}^{(n)}$ formé des éléments de $\mathfrak{X}$ de cardinal au plus $n + 1$. La notion de complexe simplicial permet d'envisager des "polyèdres simpliciaux de dimension infinie".

Définition 2.1.5 (Réalisation géométrique). La *réalisation géométrique* d'un complexe simplicial $\mathfrak{X}$ est la colimite

$$|\mathfrak{X}| := \operatorname{colim}_{n \in \mathbb{N}} |\mathfrak{X}^{(n)}|$$

définie par

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{X}_n \times \partial|\Delta^n| & \xrightarrow{\varphi_n} & |\mathfrak{X}^{(n-1)}| \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ \mathfrak{X}_n \times |\Delta^n| & \xrightarrow{\Phi_n} & |\mathfrak{X}^{(n)}|, \end{array}$$

où $\mathfrak{X}_n := \{X \in \mathfrak{X}, |X| = n + 1\}$ est l'ensemble des éléments de $\mathfrak{X}$ de cardinal $n + 1$ et où φ_n sur $\{x_0, \dots, x_n\} \times \langle v_0, \dots, \widehat{v_j}, \dots, v_n \rangle$ est défini par Φ_{n-1} sur $\{x_0, \dots, \widehat{x_j}, \dots, x_n\} \times \langle v_0, \dots, \widehat{v_j}, \dots, v_n \rangle$.

La réalisation géométrique d'un complexe simplicial est un CW complexe. La réciproque est fournie par le résultat suivant.

Théorème 2.1.6 (Approximation simpliciale). *Tout CW complexe est homotopiquement équivalent à la réalisation géométrique d'un complexe simplicial.*

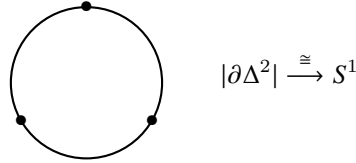
Proof. La définition de la réalisation géométrique donnée ci-dessus est proche de celle de CW complexes. Il s'agit donc d'écrire le recollement des cellules d'un CW complexe à la manière plus restrictive des complexes simpliciaux. Ceci se fait "comme toujours" par récurrence sur la dimension du squelette. Les détails sont laissés aux lecteur-trices car ils ne nous en apprennent pas d'avantage; ils peuvent être trouvés à la référence suivante [GM13, Lemma 2.2]. $\square$

Les deux notions de CW complexes et de complexes simpliciaux sont donc homotopiquement équivalentes.

Définition 2.1.7 (Triangulation). Une *triangulation* d'un espace topologique X est la donnée d'un complexe simplicial $\mathfrak{X}$ est d'un homéomorphisme $f : |\mathfrak{X}| \xrightarrow{\cong} X$.

EXEMPLE.

- ◊ Tout n -simplexe amputé de sa face de dimension maximale fournit un modèle de triangulation pour la sphère de dimension $n - 1$.



- ◊ Toute variété différentielle est triangulable [Whi40].

Cette définition combinatoirement simple a un principal écueil, elle est très rigide : le nombre de simplexes pour décomposer un espace est loin d'être optimal. En effet, deux faces distinctes ne peuvent pas avoir les mêmes sommets et les sommets d'une face sont distincts. Dans l'exemple du cercle, ces restrictions font que l'on ne peut pas l'écrire comme deux segments joints aux deux bouts ou comme un seul segment à sommets confondus. Il faut donc au moins trois segments pour obtenir le cercle. Pour le tore, il faut au minimum 7 sommets, 21 arêtes et 14 triangles.

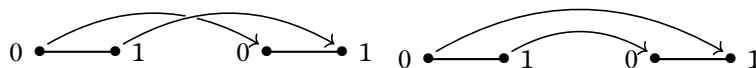
REMARQUE. Cette question est loin d'être gratuite, par exemple lorsque l'on veut calculer les groupes d'homologie (cellulaire) d'un espace topologique car la dimension des espaces vectoriels en jeu est égale aux nombres de simplexes de la triangulation. Par exemple, dans les méthodes actuelles de reconnaissance des formes des neurones utilisant des outils homologiques, la taille de ces espaces est de l'ordre de 30 000.

Essayons donc de trouver une notion plus souple et générale. Pour cela, on va chercher à encoder la manière dont les différents simplexes se recollent le long de leurs faces.

Définition 2.1.8 (Application simpliciale). Une *application simpliciale* $f : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}$ entre complexes simpliciaux est une application entre les ensembles de sommets de $\mathfrak{X}$ et ceux de $\mathfrak{Y}$ telle que $\langle f(v_0), \dots, f(v_k) \rangle$ soit un simplexe de $\mathfrak{Y}$ pour tout simplexe $\langle v_0, \dots, v_k \rangle$ de $\mathfrak{X}$.

Une telle donnée induit une unique application continue $|\mathfrak{X}| \rightarrow |\mathfrak{Y}|$ par interpolation linéaire, c'est-à-dire en utilisant les coordonnées barycentriques.

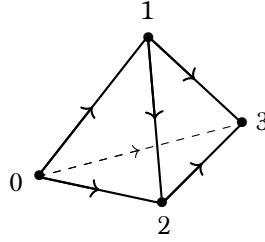
EXEMPLE. Les deux applications simpliciales bijectives entre deux 1-simplexes sont les suivantes.



Comme l'exemple ci-dessus le montre, le nombre d'applications simpliciales n'est pas optimale : d'un point de vue topologique, il n'est pas utile d'avoir autant d'applications. Alors soyons fainéants (ou rusés) et imposons une condition supplémentaire.

Définition 2.1.9 (Complexe simplicial ordonné). Un *complexe simplicial ordonné* est un complexe simplicial muni d'un ordre total sur son ensemble de sommets. Les applications simpliciales entre complexes simpliciaux ordonnés sont les applications simpliciales qui préservent strictement les ordres sur les sommets.

REMARQUE. Cette donnée supplémentaire induit une orientation pour toutes les faces d'un complexe simplicial.



EXEMPLE. Il n'existe alors plus qu'une application simpliciale bijective entre deux 1-simplexes ordonnés.

Les applications simpliciales entre complexes simpliciaux ordonnés sont caractérisées par l'application ensembliste croissante entre les ensembles ordonnés de sommets. Par exemple, il y a $n + 1$ applications simpliciales injectives depuis un $(n - 1)$ -simplexe géométrique ordonné vers un n -simplexe géométrique ordonné. Traitons explicitement le cas des simplexes géométriques standards $|\Delta^n|$. On note

$$[n] := \{0 < \dots < n\}$$

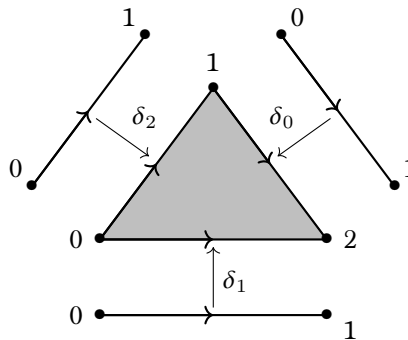
l'ensemble totalement ordonné à $n + 1$ éléments, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Les $n + 1$ applications $\delta_i : [n - 1] \rightarrow [n]$, pour $0 \leq i \leq n$, sont les injections qui ne prennent pas la valeur i :

$$\delta_i(k) := \begin{cases} k & \text{pour } k < i, \\ k + 1 & \text{pour } k \geq i, \end{cases}$$

$\begin{matrix} 0 & \longrightarrow & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ i-1 & \longrightarrow & i-1 \\ i & & i \\ \vdots & & \vdots \\ n-1 & & n \end{matrix}$

$\begin{matrix} 0 & \longrightarrow & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ i-1 & \longrightarrow & i-1 \\ i & \searrow & i \\ \vdots & & \vdots \\ n-1 & \searrow & n \end{matrix}$

Ces applications sont appelées les *cofaces* et, par léger abus de notation, on note encore δ_i les applications correspondantes entre simplexes géométriques standards ordonnés $|\Delta^{n-1}|$ et $|\Delta^n|$.



Lemme 2.1.10. Les cofaces vérifient les relations suivantes : $\delta_j \delta_i = \delta_i \delta_{j-1}$ pour $i < j$.

REMARQUE. Comme le contexte est clair, nous n'utilisons pas d'indice n dans la notation des cofaces; cela permet d'alléger grandement les écritures.

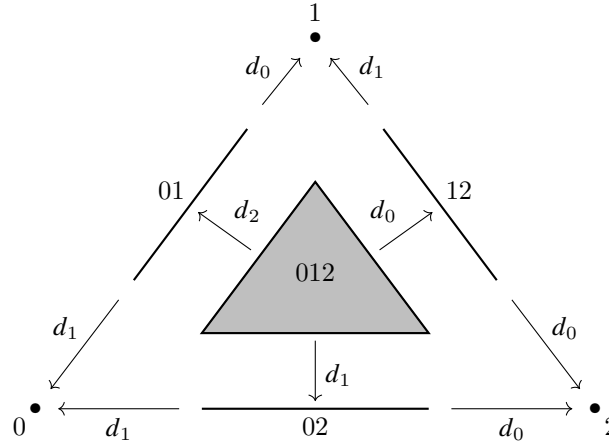
Dualement, il y a donc $n + 1$ manières de recoller un n -simplexe géométrique ordonné sur un $n - 1$ -simplexe géométrique ordonné. Utilisons maintenant ces propriétés pour décrire un complexe simplicial ordonné $\mathfrak{X}$ comme un recollement de simplexes géométriques ordonnés. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons X_n l'ensemble des n -simplexes géométriques ordonnés qui composent $\mathfrak{X}$. Le complexe simplicial ordonné $\mathfrak{X}$ est alors complètement caractérisée par la donnée des recollements des n -simplexes géométriques ordonnés sur les $(n - 1)$ -simplexes géométriques ordonnés, ce qui revient à se donner $n + 1$ applications $d_i : X_n \rightarrow X_{n-1}$, avec $0 \leq i \leq n$, vérifiant les relations duales de celles des cofaces. Ceci induit la définition suivante.

Définition 2.1.11 (Δ -complexe). Un Δ -complexe $\mathfrak{X}$ est la donnée d'une collection $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ d'ensembles munis d'applications, appelées *faces*, $d_i : X_n \rightarrow X_{n-1}$, pour $0 \leq i \leq n$, vérifiant $d_i d_j = d_{j-1} d_i$, pour $i < j$.

EXEMPLE. Le Δ -complexe associé au n -simplexe géométrique ordonné standard correspond à la donnée suivante

$$X_0 = \{0, \dots, n\}, X_1 = \{01, \dots, (n-1)n\}, \dots, X_n = \{012 \dots n\}, X_{n+1} = \emptyset, \dots,$$

munie des applications : $d_j(i_0 \dots i_k) = i_0 \dots \widehat{i_j} \dots i_k$.

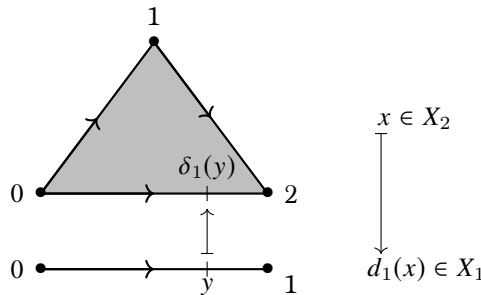


Réciproquement, l'espace topologique cellulaire ainsi encodé combinatoirement s'obtient via la construction suivante.

Définition 2.1.12 (Réalisation géométrique). La *réalisation géométrique* d'un Δ -complexe $\mathfrak{X}$ est l'espace topologique quotient

$$|\mathfrak{X}|_\Delta := \left(\coprod_{n \in \mathbb{N}} X_n \times |\Delta^n| \right) / \sim,$$

par la relation d'équivalence engendrée par les relations $(x, \delta_i(y)) \sim (d_i(x), y)$, pour $x \in X_n$, $y \in |\Delta^{n-1}|$, $0 \leq i \leq n$.



Tout complexe simplicial ordonné induit un Δ -complexe dont la réalisation géométrique lui est homéomorphe $|\mathfrak{X}|_\Delta \cong |\mathfrak{X}|$. Inversement, la réalisation géométrique d'un Δ -complexe $\mathfrak{X}$ ne forme pas nécessairement un complexe simplicial pour la donnée combinatoire $\mathfrak{X}$. Par contre, il existe toujours un complexe simplicial homéomorphe à la réalisation géométrique $|\mathfrak{X}|_\Delta$, quitte pour cela à considérer des subdivisions barycentriques. Ce qu'il faut en retenir, c'est que la notion combinatoire

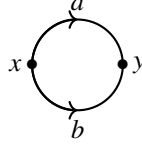
simple de Δ -complexe est plus riche et souple que celle de complexe simplicial : par exemple, on peut utiliser moins de cellules qu'auparavant, comme le montre les exemples suivants.

EXEMPLE.

◊ Le Δ -complexe

$$X_0 = \{x, y\}, X_1 = \{a, b\}, X_2 = \emptyset, \dots; \quad d_1(a) = d_1(b) = x, \quad d_0(a) = d_0(b) = y$$

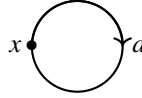
permet de réaliser le cercle comme recollement de deux segments.



◊ Le Δ -complexe

$$X_0 = \{x\}, X_1 = \{a\}, X_2 = \emptyset, \dots; \quad d_0(a) = d_1(a) = x,$$

permet de réaliser le cercle comme recollement d'un segment sur ses deux extrémités.



Deux questions se posent alors : comment obtenir la définition de Δ -complexe de manière plus simple et comment définir la notion d'application entre Δ -complexes ? Les réponses à ces deux questions viennent en utilisant la théorie des catégories. Les éléments d'un Δ -complexe sont indicés par les entiers naturels, soit, de manière équivalente, par les ensembles ordonnés $[n]$, pour $n \in \mathbb{N}$, et les applications entre deux éléments consécutifs correspondent aux applications strictement croissantes "élémentaires". On considère donc la catégorie suivante.

2/12/24

Définition 2.1.13 (Catégorie $\bar{\Delta}$). La catégorie $\bar{\Delta}$ admet pour objets les ensembles totalement ordonnés $[n] = \{0 < \dots < n\}$, pour $n \in \mathbb{N}$, et pour morphismes les applications strictement croissantes.

REMARQUE. Le notation $\bar{\Delta}$ utilisée pour représenter cette catégorie vient du fait qu'elle peut être définie de manière équivalente comme la catégorie dont les objets sont les simplexes géométriques ordonnés standards et dont les morphismes sont les applications simpliciales strictement croissantes.

Proposition 2.1.14. La notion de Δ -complexe est équivalente à celle de foncteur contravariant de la catégorie $\bar{\Delta}$ vers celle des ensembles : $\bar{\Delta}^{\text{op}} \rightarrow \text{Ens}$.

Proof. La démonstration repose exclusivement sur le fait que la catégorie $\bar{\Delta}$ admet pour présentation celle dont les générateurs sont les cofaces δ_i vérifiant les relations données au lemme 2.1.10. Nous en détaillerons tous les arguments dans la section suivante lorsque nous nous intéresserons à la catégorie Δ plus grosse encore. $\square$

Dans le langage des catégories, on parle alors de préfaisceaux ensemblistes sur la catégorie $\bar{\Delta}$. Grâce à cette description des Δ -complexes comme des foncteurs, on obtient une notion de morphisme en considérant les transformations naturelles, ce qui revient à la définition suivante. On notera la catégorie des Δ -complexes par ΔCx .

Définition 2.1.15 (Morphisme de Δ -complexes). Un *morphisme* $f : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}$ de Δ -complexes est la donnée d'une collection d'applications ensemblistes $f_n : X_n \rightarrow Y_n$ commutant aux faces respectives.

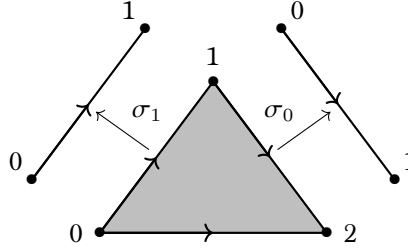
Nous avons vu que le passage des complexes simpliciaux aux Δ -complexes permettait de considérer plus d'objets. Qu'en est-il pour les applications ? Nous allons voir que le compte n'y est pas (encore).

Considérons les applications simpliciales surjectives depuis un $(n+1)$ -simplexe géométrique ordonné vers un n -simplexe géométrique ordonné; elles consistent à écraser un $(n+1)$ -simplexe géométrique sur une de ses faces de dimension n . Comme précédemment, nous allons décrire le cas des simplexes géométriques standards ordonnés. Il y a $n+1$ telles applications simpliciales, ce sont les surjections

$\sigma_i : [n+1] \rightarrow [n]$, pour $0 \leq i \leq n$, qui envoient i et $i+1$ sur i :

$$\sigma_i(k) = \begin{cases} k & \text{pour } k \leq i, \\ k-1 & \text{pour } k > i, \end{cases}$$

Ces applications sont appelées les *codégénérescences* et, par léger abus de notation, on note encore σ_i les applications correspondantes entre simplexes géométriques standards ordonnés $|\Delta^{n+1}|$ et $|\Delta^n|$.



Lemme 2.1.16. *Les codégénérescences vérifient les relations suivantes : $\sigma_j \sigma_i = \sigma_i \sigma_{j+1}$, pour $i \leq j$.*

Est-ce que ces applications simpliciales entre complexes simpliciaux peuvent être écrites au niveau des Δ -complexes associés ? La réponse est négative. En effet, le Δ -complexe associé à $|\Delta^{n+1}|$ possède un ensemble non-trivial en dimension $n+1$ alors que le Δ -complexe associé à $|\Delta^n|$ admet des ensembles vides à partir de la dimension n . Il est alors impossible de définir un morphisme du premier vers le second.

Il nous faut donc introduire une notion plus riche que celle de Δ -complexe. Pour cela, nous allons considérer une nouvelle catégorie qui a les mêmes objets que $\bar{\Delta}$ mais qui admet toutes les applications croissantes comme morphismes.

2.2. La catégorie des simplexes.

Définition 2.2.1 (Catégorie des simplexes Δ). La *catégorie des simplexes*, notée Δ , admet pour objets les ensembles totalement ordonnés $[n] = \{0 < \dots < n\}$, pour $n \in \mathbb{N}$, et pour morphismes les applications croissantes.

REMARQUE. Le nom donné à cette catégorie se justifie par le fait qu'elle peut être définie de manière équivalente comme la catégorie dont les objets sont les simplexes géométriques ordonnés standards et dont les morphismes sont les applications simpliciales croissantes.

La factorisation d'une application ensembliste comme composée d'une surjection et d'une injection se raffine de la manière suivante avec les cofaces et les codégénérescences.

Proposition 2.2.2 (Forme normale des morphismes de la catégorie des simplexes). *Tout morphisme $\varphi : [n] \rightarrow [m]$ de la catégorie des simplexes s'écrit de manière unique sous la forme :*

$$(4) \quad \varphi = \delta_{i_1} \dots \delta_{i_r} \sigma_{j_1} \dots \sigma_{j_s},$$

avec $i_1 \leq \dots \leq i_r$ et $j_1 < \dots < j_s$ où $m = n - s + r$.

DÉMONSTRATION. Montrons d'abord que tout morphisme $\varphi : [n] \rightarrow [m]$ peut s'écrire sous la forme souhaitée. Posons $p := |\text{Im} \varphi| - 1$ le cardinal de l'image de l'application φ et considérons la bijection $[p] \cong \text{Im} \varphi$ qui préserve l'ordre. L'application φ se factorise en la composée $\varphi = \iota \pi$:

$$[n] \xrightarrow{\pi} [p] \xrightarrow{\iota} [m],$$

où π est surjective et ι injective. Si on note $[m] = \text{Im} \varphi \sqcup \{i_1, i_2 + 1, \dots, i_r + r - 1\}$, avec $r = m - p$ et $i_1 \leq \dots \leq i_r$, alors $\iota = \delta_{i_1} \dots \delta_{i_r}$. Soient maintenant $q_0, \dots, q_p$ les plus grands antécédents de $0, \dots, p$ respectivement. Si on note $[n] = \{q_0, \dots, q_p\} \sqcup \{j_1, \dots, j_s\}$, avec $s = n - p$ et $j_1 < \dots < j_s$, alors $\pi = \sigma_{j_1} \dots \sigma_{j_s}$. Au final, nous avons réussi à factoriser l'application φ sous la forme voulue :

$$\varphi = \delta_{i_1} \dots \delta_{i_r} \sigma_{j_1} \dots \sigma_{j_s}.$$

Soit maintenant une autre factorisation de la même forme : $\varphi = \delta_{k_1} \dots \delta_{k_t} \sigma_{l_1} \dots \sigma_{l_u}$, avec $k_1 \leq \dots \leq k_t$ et $l_1 < \dots < l_u$ et $m - t = n - u$. Notons l'injection $\iota' := \delta_{k_1} \dots \delta_{k_t}$ et la surjection $\pi' := \sigma_{l_1} \dots \sigma_{l_u}$. Comme ι' est injective, l'image de π' est en bijection avec l'image de φ , ce qui impose $p = m - r = n - s = m - t = n - u$ et donc $t = r$ et $u = s$. Les injections ι et ι' sont égales car elles sont toutes les deux les injections croissantes de $[p]$ dans $[m]$ dont l'image est celle de φ . L'égalité $\delta_{i_1} \dots \delta_{i_r} = \delta_{k_1} \dots \delta_{k_r}$ et la caractérisation des indices $[m] = \text{Im} \varphi \sqcup \{i_1, i_2 + 1, \dots, i_r + r - 1\}$ donnée précédemment montrent que $i_1, \dots, i_r = k_1, \dots, k_r$. Au final, comme ces indices sont rangés par ordre croissant, ils sont donc égaux. On procède ensuite de même avec les surjections $\pi = \sigma_{j_1} \dots \sigma_{j_s} = \pi' = \sigma_{l_1} \dots \sigma_{l_s}$ en utilisant la caractérisation des indices donnée plus haut sous la forme $[n] = \{q_0, \dots, q_p\} \sqcup \{j_1, \dots, j_s\}$. $\square$

Lemme 2.2.3 (Relations entre cofaces et codégénérescences). *Les cofaces et les codégénérescences vérifient les relations suivantes :*

$$(5) \quad \begin{array}{ll} \delta_j \delta_i = \delta_i \delta_{j-1} & \text{pour } i < j, \\ \sigma_j \sigma_i = \sigma_i \sigma_{j+1} & \text{pour } i \leq j, \end{array} \quad \sigma_j \delta_i = \begin{cases} \delta_i \sigma_{j-1} & \text{pour } i < j, \\ \text{id} & \text{pour } i = j \text{ et } i = j + 1, \\ \delta_{i-1} \sigma_j & \text{pour } i > j + 1. \end{cases}$$

DÉMONSTRATION. Les vérifications sont automatiques. $\square$

Théorème 2.2.4 (Présentation de la catégorie des simplexes). *La catégorie Δ des simplexes admet pour présentation celle dont les générateurs sont les cofaces et les codégénérescences et dont les relations sont données au lemme 2.2.3.*

DÉMONSTRATION. Le lemme 2.2.3 montre qu'il existe un foncteur envoyant la catégorie libre engendrée par les δ_i et les σ_i modulo les relations (5) sur la catégorie Δ des simplexes. Afin de montrer que ce dernier est plein et fidèle, c'est-à-dire un isomorphisme car identité sur les objets, nous allons utiliser les méthodes de réécriture des bases de Gröbner, voir [LV12, Chapitre 4] par exemple. Pour cela, on interprète les relations (5), lues de la gauche vers la droite, comme des règles de réécriture. Il est automatique de vérifier que toutes les ambiguïtés sont confluentes. Nous avons bien donc là une base de Gröbner et la forme normale des morphismes de la catégorie libre engendrée par les δ_i et les σ_i modulo les relations exprimées au Lemme 2.2.3 est $\delta_{i_1} \dots \delta_{i_r} \sigma_{j_1} \dots \sigma_{j_s}$ avec $i_1 \leq \dots \leq i_r$ et $j_1 < \dots < j_s$. On conclut avec l'unicité de l'écriture (4) des morphismes de la catégorie simpliciale Δ établie à la proposition 2.2.2. $\square$

2.3. Ensembles simpliciaux.

Définition 2.3.1 (Ensemble simplicial). Un *ensemble simplicial* est un foncteur contravariant de la catégorie des simplexes vers celle des ensembles : $\Delta^{\text{op}} \rightarrow \text{Ens}$. La catégorie des ensembles simpliciaux, notée $\Delta\text{Ens} := \text{Fon}(\Delta^{\text{op}}, \text{Ens})$, est la catégorie dont les morphismes sont les transformations naturelles de foncteurs.

REMARQUE. Rappelons que l'on utilise aussi dans ce cas la terminologie de préfaisceau ensembliste sur la catégorie des simplexes. Certains résultats généraux sur les catégories de préfaisceaux sont donnés dans l'appendice A.1; ils seront utilisés dans ce qui suit.

Cette définition est à la fois conceptuelle et compacte. Néanmoins, en pratique, on utilise souvent la description détaillée qui suit.

Proposition 2.3.2. *La donnée d'un ensemble simplicial $\mathfrak{X}$ est équivalente à la donnée d'une collection d'ensembles X_n , pour $n \in \mathbb{N}$, munis d'applications $d_i : X_n \rightarrow X_{n-1}$ et $s_i : X_n \rightarrow X_{n+1}$, pour $0 \leq i \leq n$, appelées respectivement faces et dégénérescences, qui vérifient les relations duales de celles (5) de la catégories des simplexes, c'est-à-dire*

$$(6) \quad \begin{array}{ll} d_i d_j = d_{j-1} d_i & \text{pour } i < j, \\ s_i s_j = s_{j+1} s_i & \text{pour } i \leq j, \end{array} \quad d_i s_j = \begin{cases} s_{j-1} d_i & \text{pour } i < j, \\ \text{id} & \text{pour } i = j \text{ et } i = j + 1, \\ s_j d_{i-1} & \text{pour } i > j + 1. \end{cases}$$

Un morphisme $f : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}$ d'ensembles simpliciaux équivaut à la donnée d'une collection d'applications ensemblistes

$$f_n : X_n \rightarrow Y_n, \quad \text{pour } n \in \mathbb{N},$$

qui commutent aux faces et aux dégénérescences respectives de $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{Y}$.

DÉMONSTRATION. Il s'agit d'un corollaire direct du théorème 2.2.4. Pour cela, on note les ensembles images d'un foncteur $\mathfrak{X} : \Delta^{\text{op}} \rightarrow \text{Ens}$ par $X_n := \mathfrak{X}[n]$ et les images des opposés des cofaces et des codégénérescences par $d_i := \mathfrak{X}(\delta_i^{\text{op}})$ et $s_i := \mathfrak{X}(\sigma_i^{\text{op}})$ respectivement. $\square$

On représente donc souvent les ensembles simpliciaux de la manière suivante.

$$\begin{array}{ccccccc}
 X_0 & \xrightarrow{s_0} & X_1 & \xrightarrow{s_1} & X_2 & \xrightarrow{s_2} & X_3 & \xrightarrow{s_3} & X_4 & \cdots \\
 \xleftarrow{d_0} & & \xleftarrow{d_0} & & \xleftarrow{d_0} & & \xleftarrow{d_0} & & \xleftarrow{d_0} & \\
 & \xleftarrow{d_1} & & \xleftarrow{d_1} & & \xleftarrow{d_1} & & \xleftarrow{d_1} & & \\
 & & \xleftarrow{d_2} & & & & & & &
 \end{array}$$

EXEMPLE. Essayons d'associer un ensemble simplicial au n -simplexe géométrique ordonné et, pour cela, partons de son Δ -complexe. Pour que les applications dégénérescences existent, il faut ajouter des éléments. On considère alors *toutes* les suites croissantes d'éléments de $[n]$

$X_0 = \{0, \dots, n\}$, $X_1 = \{00, 01, \dots, (n-1)n, nn\}$, $\dots$, $X_k = \{i_0 \cdots i_k \mid 0 \leq i_0 \leq \dots \leq i_k \leq n\}$, $\dots$, que l'on munit des applications faces et dégénérescences suivantes

$$d_j(i_0 \cdots i_k) = i_0 \cdots \widehat{i_j} \cdots i_k \quad \text{et} \quad s_j(i_0 \cdots i_k) = i_0 \cdots i_j i_j \cdots i_k.$$

Définition 2.3.3 (n -simplexe standard). On appelle cet ensemble simplicial fondamental le n -simplexe standard et on le note Δ^n .

REMARQUE. Cette exemple fournit une manière particulièrement rapide de retrouver les relations simpliciales (6).

Définition 2.3.4 (n -simplexe). Les éléments de l'ensemble X_n constitutif d'un ensemble simplicial $\mathfrak{X}$ sont appelés les n -simplexes. Ils se divisent en deux parties : les simplexes *dégénérés* sont ceux qui sont dans l'image d'au moins une dégénérescence, les autres sont appelés *non-dégénérés*. On notera l'ensemble, éventuellement vide, des n -simplexes non-dégénérés par NX_n .

Dans l'exemple précédent du simplexe standard Δ^n , les k -simplexes non-dégénérés sont les éléments qui proviennent du complexe simplicial; les autres forment les k -simplexes dégénérés. De manière générale, on peut associer un ensemble simplicial à tout complexe simplicial ordonné en considérant les n -simplexes de la forme $\langle v_0, \dots, v_0, \dots, v_m, \dots, v_m \rangle$, pour tout simplexe géométrique $\langle v_0, \dots, v_m \rangle$.

EXEMPLES.

- ◊ L'ensemble simplicial $\partial\Delta^n$ associé au complexe simplicial $|\partial\Delta^n|$ admet pour d -simplexes les éléments de la forme $\underbrace{i_0 \cdots i_0 \cdots i_m \cdots i_m}_{d+1 \text{ éléments}}$, avec $m < n$ et $i_0 < \dots < i_m$ dans $[n]$. On l'appelle le *bord* du n -simplexe standard.
- ◊ L'ensemble simplicial Λ_k^n associé au k^e -cornet $|\Lambda_k^n|$ admet les mêmes d -simplexes que $\partial\Delta^n$ à l'exclusion de ceux formés à partir de $\{i_0, \dots, i_m\} = \{0, \dots, \widehat{k}, \dots, n\}$.

Le recherche d'un foncteur de la catégorie des Δ -complexes vers celle des ensembles simpliciaux est moins évidente. L'exemple suivant montre que l'on peut faire des choix pour étendre un Δ -complexe en un ensemble simplicial.

EXEMPLE. Reprenons l'exemple donné ci-dessus du Δ -complexe qui fournit un modèle du cercle avec deux cellules. On note ici le 0-simplexe x par 0 et le 1-simplexe a par 01. A la lumière des exemples précédents, si on essaie à la main de lui adjoindre assez de n -simplexes dégénérés pour créer les dégénérescences, on en vient à considérer

$$X_n := \{0 \cdots 0, 0 \cdots 01, 0 \cdots 011, \dots, 01 \cdots 1\},$$

munis des applications

$$d_j(i_0 \cdots i_k) = i_0 \cdots \widehat{i_j} \cdots i_k \quad \text{et} \quad s_j(i_0 \cdots i_k) = i_0 \cdots i_j i_j \cdots i_k,$$

sauf pour $d_0(01 \cdots 1) := 0 \cdots 0$. Ces données forment un ensemble simplicial.

Le résultat suivant montre que tout simplexe dégénéré d'un ensemble simplicial admet une forme canonique.

Lemma 2.3.5 (Eilenberg–Zilber). *Tout simplexe dégénéré $x \in X_n$ d'un ensemble simplicial $\mathfrak{X}$ s'écrit sous la forme $x = \mathfrak{X}(\varphi^{\text{op}})(y)$ avec une unique paire d'application $\varphi : [n] \rightarrow [m]$ croissante et $y \in X_m$ non-dégénéré*

DÉMONSTRATION. Pour ce qui est de l'existence d'une telle écriture, on commence par écrire $x = \mathfrak{X}(\sigma_i^{\text{op}})(y')$, avec $y' \in X_{n-1}$, comme x est dégénéré. Puis, on itère ce processus jusqu'à arriver à un y non-dégénéré. Pour ce qui est de l'unicité, supposons qu'il existe une autre paire (z, ψ) avec $z \in X_k$ non-dégénéré et $\psi : [n] \rightarrow [k]$ croissante telle que $x = \mathfrak{X}(\psi^{\text{op}})(z)$. Supposons, sans perte de généralité

que $k \leq m$. La forme normale des morphismes de la catégories des simplexes (Proposition 2.2.2) permet d'écrire φ sous la forme $\varphi = \sigma_{j_1} \dots \sigma_{j_s}$ avec $j_1 < \dots < j_s$. Considérons $\chi := \delta_{j_s} \dots \delta_{j_1}$, pour que $\varphi\chi = \text{id}$. On a alors $y = \mathfrak{X}((\psi\chi)^{\text{op}})(z)$. Comme y est non-dégénéré, l'application $\psi\chi$ est une composée de cofaces ce qui implique que y est obtenu à partir de z par applications successives de faces. Le fait que $k \leq m$ implique donc $\psi\chi = \text{id}$ puis $k = m$ et $y = z$. Like in the proof of Proposition 2.2.2, let us use the notations $q_i := \max(\varphi^{-1}(i))$ and $r_i := \max(\psi^{-1}(i))$, for $0 \leq i \leq m$. For $0 \leq i \leq m$, the image of i under the inclusion χ is equal to $\chi(i) = q_i$, which implies that $q_i \leq r_i$. Since $k = m$, we can use the same arguments once again with the roles of φ and ψ reversed. This proves that $r_i \leq q_i$ and thus $r_i = q_i$, for $0 \leq i \leq m$. This shows that $\varphi = \psi$ and the proof is complete. $\square$

Pour décrire un foncteur des Δ -complexes vers les ensembles simpliciaux, on peut donc s'inspirer du lemme d'Eilenberg–Zilber. On peut aussi raisonner de la manière suivante. Dans l'autre sens, tout ensemble simplicial induit un Δ -complexe par oubli des dégénérescences. Dit dans le langage des catégories, tout foncteur $\Delta^{\text{op}} \rightarrow \text{Ens}$ induit un foncteur $\bar{\Delta}^{\text{op}} \rightarrow \text{Ens}$ par tirage en arrière le long de l'inclusion de sous-catégorie $\Phi^{\text{op}} : \bar{\Delta}^{\text{op}} \hookrightarrow \Delta^{\text{op}}$. Une manière de décrire un foncteur dans l'autre sens est de chercher un adjoint, par exemple à gauche.

Proposition 2.3.6. *Le foncteur oubli $U := (\Phi^{\text{op}})^*$ admet un adjoint à gauche*

$$L : \Delta\text{Cx} \xrightleftharpoons[\perp]{\perp} \Delta\text{Ens} : U,$$

donné explicitement par

$$(L\mathfrak{X})_n = \{(\varphi, x) \mid \varphi : [n] \rightarrow [m] \text{ croissante}, x \in X_m\}$$

pour tout Δ -complexe $\mathfrak{X}$. Les faces sont données par $d_i(\varphi, x) = (\varphi\delta_i, x)$, si $\varphi\delta_i$ est surjective, sinon $\varphi\delta_i$ s'écrit de manière unique $\delta_j\psi$ avec ψ surjective et alors $d_i(\varphi, x) = (\psi, d_j(x))$; les dégénérescences sont données par $s_i(\varphi, x) = (\varphi\sigma_i, x)$.

DÉMONSTRATION. Commençons par remarquer que l'unicité de l'écriture $\varphi\delta_i = \delta_j\psi$, avec ψ surjective, provient de la forme normale des morphismes de la catégories des simplexes (Proposition 2.2.2). Il faut d'abord montrer que $L\mathfrak{X}$ est un ensemble simplicial. Le cas des dégénérescences est simple : pour $i \leq j$, on a

$$s_i s_j(\varphi, x) = s_i(\varphi\sigma_j, x) = (\varphi\sigma_j\sigma_i, x) = (\varphi\sigma_i\sigma_{j+1}, x) = s_{j+1}(\varphi\sigma_i, x) = s_{j+1}s_i(\varphi, x),$$

grâce au Lemme 2.1.16. Le cas des faces est assez similaire mais il faut prendre en compte les différents cas de figures; ceci est assez automatique mais la longueur fait qu'on laisse les détails aux lecteur-trices. Pour ce qui est de la structure fonctorielle, à tout morphisme $f : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}$ d'ensembles simpliciaux, on associe l'application

$$(\varphi, x) \mapsto (\varphi, f_m(x))$$

dont il est automatique de vérifier qu'elle commute aux faces et dégénérescences respectives. Enfin, pour montrer que le foncteur L est adjoint à gauche de U , on considère les deux transformations naturelles suivantes

$$\begin{array}{ccc} \nu(\mathfrak{X}) : & \mathfrak{X} & \mapsto UL\mathfrak{X} \\ & x \in X_n & \mapsto (\text{id}_{[n]}, x) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \varepsilon(\mathfrak{Y}) : & LU\mathfrak{Y} & \rightarrow \mathfrak{Y} \\ & (\varphi, y) & \mapsto \mathfrak{Y}(\varphi^{\text{op}})(y) \end{array}.$$

La première est bien définie par des morphismes de Δ -complexes et la seconde par des morphismes d'ensembles simpliciaux. On vérifie ensuite que les deux composées suivantes sont égales aux identités respectives.

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{\text{id}_L} & \\ L & \xrightarrow{\text{id}_L \circ \nu} LUL & \xrightarrow{\varepsilon \circ \text{id}_L} L \\ & \searrow & \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} & \xrightarrow{\text{id}_U} & \\ U & \xrightarrow{\nu \circ \text{id}_U} ULU & \xrightarrow{\text{id}_U \circ \varepsilon} U \\ & \searrow & \end{array}.$$

$\square$

REMARQUE. Il se trouve que ce résultat est un corollaire direct d'une théorie plus générale : celle des préfaisceaux et des extensions de Kan, voir Appendix A. Dans ce langage, le foncteur L est égal à l'extension de Kan à gauche le long de Φ , c'est-à-dire $L = L_{\Delta\text{an}\Phi^{\text{op}}}$. On peut en effet appliquer les résultats généraux des extensions de Kan à gauche ici (corollaire A.2.6 et proposition A.2.1) car la catégorie $\bar{\Delta}^{\text{op}}$ est petite, la catégorie Δ^{op} est localement petite et la catégorie Ens est cocomplète. Cette rédaction permettrait de montrer aux lecteur-trices comment l'auteur préfère travailler : trouver un objet avec une propriété particulière par une construction universelle puis l'explicitier et non l'inverse, à savoir décrire un objet et passer des heures à montrer qu'il vérifie la propriété souhaitée.

EXERCICE. En utilisant cette proposition, montrer que l'exemple ci-dessus de l'ensemble simplicial modélisant le cercle obtenu à partir du Δ -complexe est bien donné par le foncteur L .

REMARQUE. Pour tout ensemble simplicial, les n -simplexes s'injectent dans les $n + 1$ -simplexes par $s_0 : X_n \hookrightarrow X_{n+1}$ et les $n + 1$ -simplexes se "projettent" dans les n -simplexes par $d_0 : X_{n+1} \rightarrow X_n$, car $d_0 s_0 = \text{id}$.

Définition 2.3.7 (Sous-ensemble simplicial, ensemble simplicial quotient). On dit que $\mathfrak{Y}$ est un *sous-ensemble simplicial* (respectivement *ensemble simplicial quotient*) de $\mathfrak{X}$ lorsqu'il existe un morphisme d'ensembles simpliciaux $\mathfrak{Y} \hookrightarrow \mathfrak{X}$ (respectivement $\mathfrak{Y} \twoheadrightarrow \mathfrak{X}$) qui soit injectif (respectivement surjectif) composante par composante $Y_n \hookrightarrow X_n$ (respectivement $Y_n \twoheadrightarrow X_n$).

EXEMPLES.

- ◊ Les ensembles simpliciaux donnés en exemple ci-dessus s'injectent les uns dans les autres :

$$\Lambda_k^n \hookrightarrow \partial \Delta^n \hookrightarrow \Delta^n .$$

- ◊ On considère l'ensemble simplicial quotient $\Delta^n / \partial \Delta^n$, pour $n \geq 1$, dont les d -simplexes admettent les représentants suivants

$$\left\{ \underbrace{i_0 \cdots i_0 \cdots i_n \cdots i_n}_{d+1 \text{ éléments}} \mid i_0 = \cdots = i_n = 0 \text{ ou } i_0 = 0, i_1 = 1, \dots, i_n = n \right\}$$

munis des faces et dégénérescences classiques (suppression et dédoublement) sauf lorsque les faces ne font pas sens, c'est-à-dire lorsque l'on supprime un nombre apparaissant une seule fois dans la collection, auquel cas elles valent $0 \cdots 0$. Les deux seuls simplexes non-dégénérés sont 0 et $01 \cdots n$; on a là le modèle le plus économique, avec 2 cellules, de la sphère de dimension n . (Pour $n = 1$, on retrouve l'exemple donné ci-dessus). L'application évidente $\Delta^n \rightarrow \Delta^n / \partial \Delta^n$ montre qu'il s'agit d'un quotient du n -simplexe standard.

REMARQUE. Ce dernier exemple est instructif car il exhibe un ensemble simplicial qui ne provient pas d'un Δ -complexe : par exemple, il n'est pas dans l'image du foncteur décrit à la proposition 2.3.6. Il montre que les dégénérescences sont essentielles et non gratuites : ce modèle de la sphère n'existerait pas sans les dégénérescences placées en dimension 1 à $n - 1$.

Les exemples précédents montrent que l'on aimerait souvent "générer" des ensembles simpliciaux à partir de petites données. La proposition suivante donne la forme du sous-ensemble simplicial "engendré" par ses premiers simplexes.

Proposition 2.3.8. Soit $\mathfrak{X}$ un ensemble simplicial. Les simplexes suivants

$$(\text{sq}_n \mathfrak{X})_m := \{x \in X_m \mid \exists k \leq n, \exists \varphi : [m] \twoheadrightarrow [k] \text{ croissante}, \exists y \in X_k \text{ tels que } x = \mathfrak{X}(\varphi^{\text{op}})(y)\}$$

forment le plus petit sous-ensemble simplicial de $\mathfrak{X}$ contenant tous ses k -simplexes, pour $k \leq n$.

DÉMONSTRATION. On vérifie facilement qu'il s'agit là d'un sous-ensemble simplicial; par exemple, la stabilité pour les faces vient de :

$$d_i(x) = d_i(\mathfrak{X}(\varphi^{\text{op}})(y)) = \mathfrak{X}((\varphi \circ \delta_i)^{\text{op}})(y) .$$

Ce sous-ensemble simplicial contient bien tous les k -simplexes pour $k \leq n$: il suffit de considérer $k = m$, $\varphi = \text{id}$ et $y = x$. La forme normale des morphismes de la catégories des simplexes (Proposition 2.2.2) montre que, pour $m > n$:

$$(\text{sq}_n \mathfrak{X})_m = \{x \in X_m \mid \exists k \leq n, \exists \varphi : [m] \twoheadrightarrow [k] \text{ croissante et surjective}, \exists y \in X_k \text{ t.q. } x = \mathfrak{X}(\varphi^{\text{op}})(y)\} .$$

Soit maintenant un sous-ensemble simplicial $\mathfrak{Y} \subset \mathfrak{X}$ qui contient tous les k -simplexes pour $k \leq n$, alors il contient les images par les composées de dégénérescences de ces k -simplexes. Il contient donc tous les $\text{sq}_m \mathfrak{X}$, pour $m > n$, par la caractérisation précédente. $\square$

Cette démonstration montre que le sous-ensemble simplicial $\text{sq}_n \mathfrak{X}$ est formé uniquement des k -simplexes pour $k \leq n$, et de leurs images par des composées de dégénérescences, pour $k > n$.

Définition 2.3.9 (Squelette). Le sous-ensemble simplicial $\text{sq}_n \mathfrak{X}$ est appelé le *n-squelette* de l'ensemble simplicial $\mathfrak{X}$.

EXEMPLE. Le $(n - 1)^{\text{e}}$ squelette du n -simplexe standard est son bord : $\text{sq}_{n-1} \Delta^n = \partial \Delta^n$.

EXERCICE. Montrer que le 0-squelette d'un ensemble simplicial $\mathfrak{X}$ est l'ensemble simplicial constant

$$(\mathrm{sq}_0 \mathfrak{X})_m = X_0, \quad \text{pour } m \in \mathbb{N},$$

où les faces et dégénérescences sont toutes égales à l'identité.

Comme pour les CW complexes, la notion de squelette d'un ensemble simplicial permet d'effectuer des démonstrations par récurrence, voir ??? par exemple.

Définition 2.3.10 (Dimension). Un ensemble simplicial $\mathfrak{X}$ est de *dimension* n lorsque

$$\mathrm{sq}_{n-1} \mathfrak{X} \subsetneq \mathrm{sq}_n \mathfrak{X} = \mathfrak{X},$$

c'est-à-dire lorsqu'il admet au moins un simplexe non-dégénéré de dimension n et aucun en dimension supérieure.

EXEMPLES. Les exemples précédents ont les dimensions suivantes

$$\dim \Delta^n = n, \quad \dim \partial \Delta^n = n-1, \quad \dim \Lambda_k^n = n-1, \quad \text{et} \quad \dim \Delta^n / \partial \Delta^n = n.$$

Définition 2.3.11 (Objet (co)simplicial). On appelle *objet simplicial dans une catégorie* $\mathcal{C}$ un foncteur contravariant $\Delta^{\mathrm{op}} \rightarrow \mathcal{C}$ de la catégorie des simplexes vers $\mathcal{C}$. On note la catégorie correspondante $\Delta \mathcal{C}$. On appelle *objet cosimplicial dans une catégorie* $\mathcal{C}$ un foncteur covariant $\Delta \rightarrow \mathcal{C}$ de la catégorie des simplexes vers $\mathcal{C}$.

EXEMPLES.

- ◊ On peut ainsi considérer non seulement des ensembles simpliciaux mais des groupes simpliciaux, des algèbres simpliciales, etc. Par exemple, un groupe simplicial correspond à la donnée de groupes G_n , pour $n \in \mathbb{N}$, munis de morphismes de groupes $d_i : G_n \rightarrow G_{n-1}$ et $s_i : G_n \rightarrow G_{n+1}$, pour $0 \leq i \leq n$, vérifiant les relations simpliciales.
- ◊ La collection des simplexes géométriques standards ordonnés $|\Delta^n|$ munis des applications simpliciales croissantes forme un espace topologique cosimplicial.

2.4. Réalisation géométrique.

Définition 2.4.1 (Réalisation géométrique). La *réalisation géométrique* d'un ensemble simplicial $\mathfrak{X}$ est l'espace topologique quotient

$$|\mathfrak{X}| := \left(\coprod_{n \in \mathbb{N}} X_n \times |\Delta^n| \right) / \sim,$$

par la relation d'équivalence engendrée par les relations

$$(x, \delta_i(y)) \sim (d_i(x), y) \quad \text{et} \quad (x, \sigma_i(z)) \sim (s_i(x), z),$$

pour $x \in X_n$, $y \in |\Delta^{n-1}|$, $z \in |\Delta^{n+1}|$ et $0 \leq i \leq n$.

Cette construction, de prime abord non élémentaire, est en fait simple à appréhender. On considère des n -simplexes géométriques standard indicés par les n -simplexes non-dégénérés que l'on recolle entre eux grâce aux faces et au premier type de relation, comme pour un Δ -complexe. Les relations du second type montrent que tout simplexe dégénéré ne va donner naissance à aucune nouvelle cellule, et n'être vu que dans un simplexe géométrique standard issu d'un simplexe non-dégénéré. En outre, il n'y a pas plus d'identification de cellules que cela. Avant de démontrer ce résultat général, on peut se faire la main sur les exemples précédents.

EXEMPLES. Les notations choisies depuis le début trouvent ici leur cohérence.

- ◊ La réalisation géométrique $|\Delta^n|$ du n -simplexe standard Δ^n est le n -simplexe géométrique standard $|\Delta^n|$.
- ◊ La réalisation géométrique $|\partial \Delta^n|$ du bord $\partial \Delta^n$ du n -simplexe standard Δ^n est le modèle topologique $|\partial \Delta^n| \cong S^{n-1}$ pour la sphère de dimension $n-1$.
- ◊ La réalisation géométrique $|\Lambda_k^n|$ du k^e -cornet simplicial Λ_k^n est le k^e -cornet géométrique $|\Lambda_k^n|$.

REMARQUE. Notons que l'on a perdu de l'information dans cette affaire : nous étions partis de complexes simpliciaux, c'est-à-dire d'espaces topologiques munis canoniquement d'une triangulation, et le passage à la réalisation géométrique de l'ensemble simplicial associé nous a fait perdre cette dernière. (Les notations choisies ici ne sont donc pas absolument parfaites, mais elles ont l'avantage de la simplicité.)

Théorème 2.4.2. *Pour tout ensemble simplicial $\mathfrak{X}$, l'application suivante est une bijection continue*

$$\coprod_{n \in \mathbb{N}} NX_n \times |\Delta^n| \rightarrow |\mathfrak{X}|.$$

DÉMONSTRATION. L'idée de la démonstration est la suivante. L'existence dans le lemme 2.3.5 d'Eilenberg–Zilber montre que tout point associé à un simplexe dégénéré peut être identifié à un point associé à un simplexe non-dégénéré. L'unicité dans le lemme 2.3.5 d'Eilenberg–Zilber montre que ces identifications n'induisent aucune identification supplémentaire entre points indicés par des simplexes non-dégénérés. Au final, la bijection continue est établie comme dans le cas des CW-complexes, voir Exercice 2 de la feuille 3. Pour plus de détails, on renvoie le-la lecteur-trice à [GM03, Proposition I.2.10]. $\square$

Remarquez que ce résultat est l'analogue au niveau des ensembles simpliciaux de pour les CW complexes, voir Exercice 2 de la feuille 3.

Corollaire 2.4.3. *La réalisation géométrique de l'ensemble simplicial associé à un complexe simplicial est homéomorphe à ce dernier.*

DÉMONSTRATION. Comme les simplexes non-dégénérés de l'ensemble simplicial associé à un complexe simplicial sont en bijection avec les faces de ce dernier, ceci est une conséquence directe du théorème 2.4.2 dont une version similaire tient aussi pour la réalisation géométrique des complexes simpliciaux. $\square$

Proposition 2.4.4. *La réalisation géométrique d'un ensemble simplicial est un CW-complexe formé d'une seule cellule de dimension n par n -simplexe non-dégénéré.*

DÉMONSTRATION. Il s'agit d'un corollaire direct du théorème 2.4.2. $\square$

6/12/24

2.5. La catégorie des ensembles simpliciaux. La catégorie des ensembles simpliciaux est la catégorie des préfaisceaux sur la catégorie des simplexes. Ceci explique conceptuellement qu'elle possède de très bonnes propriétés catégoriques. Dans cette section, nous démontrerons tous les résultats “à la main” dans ce cas particulier afin de fonder l'intuition des lecteur-trices pour le cas général traité à l'appendice A.1.

Proposition 2.5.1. *La catégorie ΔEns des ensembles simpliciaux est complète et cocomplète. Pour tout foncteur $F : D \rightarrow \Delta\text{Ens}$, on note*

$$\begin{aligned} F_n & : D \rightarrow \text{Ens} \\ d & \mapsto F(d)_n \end{aligned}$$

le foncteur associé pour tout $n \in \mathbb{N}$. La limite et la colimite du foncteur F sont données point-par-point par

$$\left(\lim_D F \right)_n = \lim_D F_n \quad \text{et} \quad \left(\text{colim}_D F \right)_n = \text{colim}_D F_n.$$

DÉMONSTRATION. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la limite $\lim_D F_n$ dont la propriété universelle induit l'existence d'applications faces et dégénérescences qui relèvent celles présentes au niveau des ensembles simpliciaux $F(d)$, pour tout objet d de D . Elles vérifient les relations simpliciales (6) car ces dernières sont vérifiées au niveau des ensembles simpliciaux $F(d)$, pour tout objet d de D . Le cas des colimites se traite de la même manière. $\square$

L'objet terminal de la catégorie des ensembles simpliciaux est $\Delta^0 = *$ qui est formé d'un seul simplexe en chaque degré; l'objet initial est $\emptyset$ qui est formé de l'ensemble vide en chaque degré.

Les premiers exemples de préfaisceaux sur une catégorie sont les préfaisceaux représentables. Dans le cas de la catégorie des simplexes Δ , il s'agit des ensembles simpliciaux de la forme $\text{Hom}_\Delta(-, [n])$.

Proposition 2.5.2. *Les préfaisceaux représentables $\text{Hom}_\Delta(-, [n])$ sont les n -simplexes standards Δ^n .*

DÉMONSTRATION. Ce résultat se montre de manière directe. Les applications croissantes $\psi : [k] \rightarrow [n]$ sont en bijection avec les suites croissantes $i_0 \leq \dots \leq i_k$ d'éléments de $[n]$ en posant $i_j := \psi(j)$. Cette bijection préserve bien les faces et les dégénérescences :

$$d_j(\varphi) = \varphi \circ \delta_j \text{ correspond à } i_0 \cdots \widehat{i_j} \cdots i_k \quad \text{et} \quad s_j(\varphi) = \varphi \circ \sigma_j \text{ correspond à } i_0 \cdots i_j i_j \cdots i_k.$$

$\square$

Cette identification permet de munir la collection des simplexes standards d'une structure d'ensemble simplicial cosimplicial; non, il n'y a pas d'erreur dans cette phrase, cela signifie qu'il existe un foncteur $\Delta \rightarrow \Delta\text{Ens}$ dont l'image de $[n]$ est Δ^n . En effet, pour toute application croissante $\varphi : [n] \rightarrow [m]$, on considère le morphisme d'ensembles simpliciaux

$$\varphi_* : \Delta^n \cong \text{Hom}_\Delta(-, [n]) \longrightarrow \text{Hom}_\Delta(-, [m]) \cong \Delta^m.$$

Par exemple, les cofaces $(\delta_j)_* : \Delta^{n-1} \rightarrow \Delta^n$ et les codégénérescences $(\sigma_j)_* : \Delta^{n+1} \rightarrow \Delta^n$ sont données explicitement par

$$(\delta_j)_*(i_0 \cdots i_k) = \delta_j(i_0) \cdots \delta_j(i_k) \quad \text{et} \quad (\sigma_j)_*(i_0 \cdots i_k) = \sigma_j(i_0) \cdots \sigma_j(i_k),$$

pour $0 \leq j \leq n$. (Dans la suite, nous laisserons tomber la notation $(\cdot)_*$ car le contexte le permettra.) Il s'agit du relèvement au niveau des ensembles simpliciaux via la réalisation géométrique de la structure d'objet cosimplicial des simplexes géométriques standards ordonnés $|\Delta^n|$. Une première application est donnée par le lemme suivant.

Lemme 2.5.3.

◊ *Le bord $\partial\Delta^n$ du simplexe standard est égal au coégalisateur suivant :*

$$\coprod_{0 \leq i < j \leq n} \Delta^{n-2} \rightrightarrows \coprod_{0 \leq l \leq n} \Delta^{n-1} \twoheadrightarrow \partial\Delta^n,$$

où le morphisme en haut à gauche envoie la copie indicée par $i < j$ sur celle indicée par j via δ_i , le morphisme en bas à gauche envoie la copie indicée par $i < j$ sur celle indicée par i via δ_{j-1} et le morphisme de droite envoie la copie indicée par l sur $\partial\Delta^n$ via δ_l .

◊ *Le k -cortet Λ_k^n de dimension n est égal au coégalisateur suivant :*

$$\coprod_{0 \leq i < j \leq n} \Delta^{n-2} \rightrightarrows \coprod_{\substack{0 \leq l \leq n \\ l \neq k}} \Delta^{n-1} \twoheadrightarrow \Lambda_k^n,$$

avec les mêmes morphismes.

DÉMONSTRATION. L'intuition d'une telle colimite vient de la réalisation géométrique : le bord du n -simplexe géométrique standard est obtenu en recollant $n + 1$ simplexes géométriques standards de dimension $n - 1$ le long de leurs propres bords. La démonstration formelle s'obtient grâce à la proposition 2.5.1 en considérant simplement la forme combinatoire des d -simplexes respectifs et vérifiant que l'on a bien un coégalisateur ensembliste en chaque degré. $\square$

Proposition 2.5.4 (Lemme de Yoneda simplicial). *L'application*

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\Delta\text{Ens}}(\Delta^n, \mathfrak{X}) &\cong X_n \\ f &\mapsto f_n(01 \cdots n) \end{aligned}$$

décrit une bijection naturelle en $[n] \in \Delta$ et en ensemble simplicial $\mathfrak{X} \in \Delta\text{Ens}$.

DÉMONSTRATION. Dans l'autre sens, on considère la collection d'applications $f_x : \Delta^n \rightarrow \mathfrak{X}$ qui envoient $01 \cdots n \leftrightarrow \text{id}_{[n]}$ sur x et de manière générale $\varphi \in \text{Hom}_\Delta([k], [n]) \cong (\Delta^n)_k$ sur $\mathfrak{X}(\varphi^{\text{op}})(x)$. Il s'agit bien d'un morphisme d'ensembles simpliciaux. L'application définie par $x \mapsto f_x$ est l'inverse de l'application de l'énoncé. La naturalité à droite par rapport aux morphismes d'ensembles simpliciaux est évidente. La naturalité à gauche provient du fait que l'on a

$$(f \circ \varphi_*)(01 \cdots m) = \mathfrak{X}(\varphi^{\text{op}})(01 \cdots n),$$

pour toute application croissante $\varphi : [m] \rightarrow [n]$ et pour tout morphisme $f : \Delta^n \rightarrow \mathfrak{X}$ d'ensembles simpliciaux. $\square$

Ce résultat montre que l'on peut penser au n -simplexe standard comme "l'ensemble simplicial libre à un générateur en dimension n ". De manière plus formelle, le foncteur oubli $\Delta\text{Ens} \rightarrow \text{Ens}$ qui ne conserve que l'ensemble de n -simplexes $\mathfrak{X} \mapsto X_n$ admet un adjoint à gauche L dont l'image du singleton est le simplexe standard : $L(\{*\}) = \Delta^n$.

REMARQUE. La naturalité de la bijection montre que $f_{d_i(x)} = f_x \delta_i$ et que $f_{s_i(x)} = f_x \sigma_i$; ceci permet de voir un ensemble simplicial comme un module à droite sur la catégorie Δ .

Corollaire 2.5.5.

◊ *La donnée d'un morphisme $\partial\Delta^n \rightarrow \mathfrak{X}$ d'ensembles simpliciaux est équivalente à la donnée de $n + 1$ simplexes $x_0, \dots, x_n \in X_{n-1}$ vérifiant $d_i(x_j) = d_{j-1}(x_i)$, pour tout $i < j$.*

◇ La donnée d'un morphisme $\Lambda_k^n \rightarrow \mathfrak{X}$ d'ensembles simpliciaux est équivalente à la donnée de n simplexes $x_0, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n \in X_{n-1}$ vérifiant $d_i(x_j) = d_{j-1}(x_i)$, pour tout $i < j$ différent de k .

DÉMONSTRATION. Il s'agit d'un corollaire direct du lemme 2.5.3 et du lemme de Yoneda 2.5.4. $\square$

Corollaire 2.5.6. La catégorie des simplexes Δ se plonge, par le plongement de Yoneda, comme la sous-catégorie pleine des ensembles simpliciaux dont les objets sont les simplexes standards :

$$\begin{aligned} Y : \Delta &\hookrightarrow \Delta\text{Ens} \\ [n] &\mapsto \Delta^n. \end{aligned}$$

DÉMONSTRATION. Il s'agit d'un corollaire direct de la proposition 2.5.2 et du lemme de Yoneda 2.5.4 qui donnent respectivement :

$$\text{Hom}_{\Delta\text{Ens}}(\Delta^n, \Delta^m) \cong (\Delta^m)_n \cong \text{Hom}_{\Delta}([n], [m]).$$

$\square$

Ce résultat montre que la catégorie des ensembles simpliciaux est le completion cocomplète de la catégorie Δ , c'est-à-dire la plus petite catégorie cocomplète qui la contient.

REMARQUE. Il justifie une fois de plus la terminologie et la notation choisies pour la catégorie des simplexes Δ .

Nous avons vu qu'un des buts des ensembles simpliciaux était de décrire la combinatoire des triangulations d'un espace topologique. Or, toute triangulation est obtenue en recollant des simplexes géométriques les uns aux autres. La question est maintenant de savoir on peut en faire de même pour les ensembles simpliciaux eux-mêmes, c'est-à-dire : peut-on écrire tout ensemble simplicial comme une certaine colimite faite de simplexes standards Δ^n ? La formule de la réalisation géométrique des ensembles simpliciaux nous incite à considérer la catégorie suivante.

Définition 2.5.7 (Catégorie des éléments d'un ensemble simplicial). La catégorie $E(\mathfrak{X})$ des éléments d'un ensemble simplicial $\mathfrak{X}$ est la catégorie dont les objets sont tous les simplexes $\coprod_{n \in \mathbb{N}} X_n$ de $\mathfrak{X}$ et dont les morphismes $\text{Hom}_{E(\mathfrak{X})}(x, y)$ sont les morphismes φ de la catégorie Δ vérifiant $\mathfrak{X}(\varphi^{\text{op}})(y) = x$.

On peut voir que cette définition fournit en fait un foncteur $E : \Delta\text{Ens} \rightarrow \text{Cat}$ des ensembles simpliciaux vers la catégories des petites catégories. On considère le foncteur canonique de projection $\Pi : E(\mathfrak{X}) \rightarrow \Delta$ qui envoie $x \in X_n$ sur $[n]$.

Théorème 2.5.8 (Théorème de densité des ensembles simpliciaux). Tout ensemble simplicial $\mathfrak{X}$ s'écrit comme la colimite suivante

$$\mathfrak{X} \cong \text{colim}_{E(\mathfrak{X})} Y \Pi.$$

DÉMONSTRATION. La démonstration est automatique, mais nous la faisons car elle permet de mettre au jour une formule essentielle. Commençons par décrire la catégorie $\text{Cocone}(Y \Pi)$ des cocônes sur le foncteur $Y \Pi$. Chacun de ses éléments consiste en la donnée d'un ensemble simplicial $\mathfrak{Y}$ muni de morphismes d'ensembles simpliciaux $g(x) : \Delta^n \rightarrow \mathfrak{Y}$, pour chaque simplexe $x \in X_n$, tels que pour toute application croissante $\varphi : [n] \rightarrow [m]$ vérifiant $\mathfrak{X}(\varphi^{\text{op}})(y) = x$, le diagramme suivant

$$(*) \quad \begin{array}{ccc} & \mathfrak{Y} & \\ g(x) \nearrow & & \nwarrow g(y) \\ \Delta^n & \xrightarrow{\varphi_*} & \Delta^m \end{array}$$

soit commutatif. Le théorème 2.2.4 affirmant que la catégorie des simplexes est engendrée par les cofaces et les codégénérescences montre qu'il faut et il suffit que les diagrammes $(*)$ associés à ces dernières soient commutatifs. La commutativité de $(*)$ pour les cofaces $\delta_i : \Delta^{n-1} \rightarrow \Delta^n$ et pour les codégénérescences $\sigma_i : \Delta^n \rightarrow \Delta^{n+1}$ sont respectivement équivalentes à

$$(**) \quad g(d_i^{\mathfrak{X}}(x))(01 \cdots n-1) = d_i^{\mathfrak{Y}}(g(x)(01 \cdots n)) \quad \text{et} \quad g(s_i^{\mathfrak{X}}(x))(01 \cdots n+1) = s_i^{\mathfrak{Y}}(g(x)(01 \cdots n)).$$

Montrons maintenant que l'on peut munir l'ensemble simplicial $\mathfrak{X}$ d'une structure de cocône initial sur le foncteur $Y \circ \Pi$. Pour tout simplexe $x \in X_n$, on considère le morphisme canonique $f_x : \Delta^n \rightarrow \mathfrak{X}$ fourni par le lemme de Yoneda 2.5.4. La naturalité de ce dernier montre que les morphismes f_x vérifient les équations $(**)$. Enfin, pour tout autre cocône $(\mathfrak{Y}, \{g(x)\})$, il existe un unique morphisme $G : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}$ de cocônes : il s'agit de celui donné par $G(x) = g(x)(01 \cdots n)$. $\square$

Corollaire 2.5.9. *Tout ensemble simplicial $\mathfrak{X}$ est égal au coégalisateur suivant*

$$\coprod_{\substack{\varphi:[n] \rightarrow [m] \\ \varphi \in \{\delta_i, \sigma_i\}}} X_m \times \Delta^n \xrightarrow[\text{id} \times \varphi_*]{\mathfrak{X}(\varphi^{\text{op}}) \times \text{id}} \coprod_{n \in \mathbb{N}} X_n \times \Delta^n \longrightarrow \mathfrak{X},$$

où $X_n \times \Delta^n := \coprod_{X_n} \Delta^n$.

DÉMONSTRATION. C'est une conséquence directe des arguments donnés dans la démonstration précédente et en particulier les relations (**). $\square$

On vient donc de retrouver conceptuellement la forme de la formule de la réalisation géométrique donnée à la section 2.4.

9/12/24

Après avoir compris la forme que peut prendre tout ensemble simplicial, on peut maintenant se demander comment obtenir des foncteurs depuis ou vers les ensembles simpliciaux. Il se trouve que l'on peut caractériser toutes les paires de foncteurs impliquant la catégorie des ensembles simpliciaux. Tous les exemples sont obtenus de la manière suivante, voir ci-dessous et la section 2.6.1.

Définition 2.5.10 (Représentation simpliciale). Soit $\mathfrak{C}$ un objet cosimplicial d'une catégorie $\mathcal{C}$ localement petite. La *représentation simpliciale associée* $\mathfrak{C}$ est le foncteur suivant :

$$\begin{aligned} R_{\mathfrak{C}} : \mathcal{C} &\rightarrow \Delta\text{Ens} \\ c &\mapsto \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathfrak{C}, c). \end{aligned}$$

Théorème 2.5.11. *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie localement petite et cocomplète. La donnée d'une paire de foncteurs adjoints*

$$L : \Delta\text{Ens} \xrightleftharpoons{\perp} \mathcal{C} : R$$

est équivalente à la donnée d'un objet cosimplicial $\mathfrak{C} : \Delta \rightarrow \mathcal{C}$ de $\mathcal{C}$ via la restriction

$$\mathfrak{C} = L Y : \Delta \xrightarrow{Y} \Delta\text{Ens} \xrightarrow{L} \mathcal{C}$$

de l'adjoint à gauche par l'inclusion de Yoneda Y . Dans ce cas, l'adjoint à droite est donné par la représentation simpliciale associée à $\mathfrak{C}$ et l'adjoint à gauche admet pour forme explicite le coégalisateur suivant :

$$(7) \quad \coprod_{\substack{\varphi:[n] \rightarrow [m] \\ \varphi \in \{\delta_i, \sigma_i\}}} X_m \times C^n \xrightarrow[\text{id} \times \varphi_*]{\mathfrak{X}(\varphi^{\text{op}}) \times \text{id}} \coprod_{n \in \mathbb{N}} X_n \times C^n \longrightarrow L(\mathfrak{X}),$$

où $C^n = \mathfrak{C}([n])$ et où $X_n \times C^n := \coprod_{X_n} C^n$.

DÉMONSTRATION. Soit $\mathfrak{C}$ un objet cosimplicial de $\mathcal{C}$. On considère le foncteur de représentation simpliciale $R_{\mathfrak{C}} : \mathcal{C} \rightarrow \Delta\text{Ens}$. Dans l'autre sens, on pose

$$L(\mathfrak{X}) := \text{colim}_{E(\mathfrak{X})} \mathfrak{C} \Pi.$$

Comme $E : \Delta\text{Ens} \rightarrow \text{Cat}$ est un foncteur, on voit que L est aussi un foncteur. Il reste à vérifier que L est adjoint à gauche de $R_{\mathfrak{C}}$:

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(L(\mathfrak{X}), c) \cong \text{Hom}_{\Delta\text{Ens}}(\mathfrak{X}, R_{\mathfrak{C}}(c)).$$

Comme $L(\mathfrak{X}) = \text{colim}_{E(\mathfrak{X})} \mathfrak{C} \Pi$, tout morphisme dans $\mathcal{C}$ vers c est équivalent à la donnée de morphismes $g(x) : C^n \rightarrow c$ de $\mathcal{C}$, pour tout simplexe $x \in X_n$, tels que $g(x) = g(y) \circ \mathfrak{C}(\varphi)$ lorsque $\mathfrak{X}(\varphi^{\text{op}})(y) = x$. Une telle donnée est équivalente à un morphisme d'ensembles simpliciaux $\mathfrak{X} \rightarrow R_{\mathfrak{C}}(c)$ défini par $x \in X_n \mapsto g(x) \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C^n, c)$. Il est facile de voir que cette bijection est naturelle de part et d'autre.

Dans l'autre sens, la composée $L Y : \Delta \rightarrow \mathcal{C}$ définit un objet cosimplicial $\mathfrak{C}$ de $\mathcal{C}$. Comme le foncteur L est adjoint à gauche, il préserve les colimites, on a donc qu'il est de la forme $L(\mathfrak{X}) := \text{colim}_{E(\mathfrak{X})} \mathfrak{C} \Pi$. Les arguments donnés ci-dessus montrent que $R_{\mathfrak{C}}$ est son adjoint à droite et donc qu'il est égal au foncteur R .

Comme le foncteur L préserve les colimites, on peut donc aussi l'écrire avec le coégalisateur donné au corollaire 2.5.9. $\square$

Cette dernière formule a le même parfum que la réalisation géométrique; ceci n'est pas le fruit du hasard, on verra à la proposition 2.6.5 que cette dernière peut être obtenue de cette manière.

REMARQUE. Dans le langage de l'appendice A.2, l'adjoint à gauche L est l'extension de Kan à gauche de $\mathbb{C}$ le long du plongement de Yoneda :

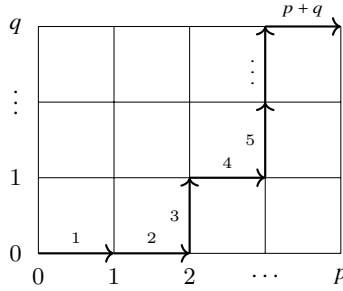
$$\begin{array}{ccc} \Delta & \xrightarrow{\mathbb{C}} & \mathbb{C} \\ & \searrow Y & \nearrow L = \text{Lan}_Y \mathbb{C} \\ & \Delta_{\text{Ens}} & . \end{array}$$

Définition 2.5.12 (Produit d'ensembles simpliciaux). Le *produit* $\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}$ de deux ensembles simpliciaux $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{Y}$ est défini par

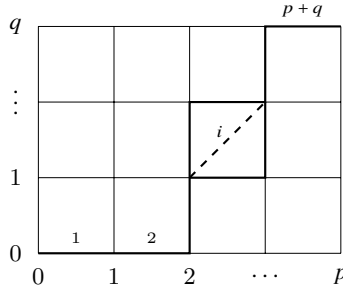
$$(\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y})_n := X_n \times Y_n$$

muni des faces $d_i^{\mathfrak{X}} \times d_i^{\mathfrak{Y}}$ et des dégénérescences $s_i^{\mathfrak{X}} \times s_i^{\mathfrak{Y}}$.

EXEMPLE (DÉCOMPOSITION PRISMATIQUE). Pour bien comprendre l'effet du produit de deux ensembles simpliciaux, on conseille l'exercice suivant : montrer que l'ensemble simplicial $\Delta^p \times \Delta^q$ est engendré par $\binom{p+q}{p}$ copies de Δ^{p+q} indicées au choix par les chemins croissants sur une grille $[p] \times [q]$



ou par les (p, q) -battages, c'est-à-dire les permutations $\sigma \in \mathbb{S}_{p+q}$ vérifiant $\sigma(1) < \dots < \sigma(p)$ et $\sigma(p+1) < \dots < \sigma(p+q)$. Dans l'exemple ci-dessus, le $(4, 3)$ -battage est $\sigma = [1247356]$. Ces $(p+q)$ -simplexes standards se recollent de la manière suivante : pour tout chemin croissant possédant une diagonale qui en est le i^{e} segment, les images par δ_i de Δ^{p+q-1} dans les copies de Δ^{p+q} indicées par le même chemin mais passant par le coin en haut à gauche et par le coin en bas à droite de la case diagonale sont égales.



Au final, on obtient $\Delta^p \times \Delta^q$ comme le coégalisateur suivant

$$\coprod \Delta^{p+q-1} \begin{array}{c} \xrightarrow{\delta_i} \\ \xrightarrow{\delta_i} \end{array} \coprod \Delta^{p+q} \twoheadrightarrow \Delta^p \times \Delta^q ,$$

où le second coproduit porte sur les chemins croissants et où le premier porte sur les chemins croissants à une diagonale.

Proposition 2.5.13. La catégorie $(\Delta_{\text{Ens}}, \times, *)$ des ensembles simpliciaux, muni de leur produit, forme une catégorie monoïdale symétrique cartésienne où l'unité est l'ensemble simplicial constant à un élément.

DÉMONSTRATION. Les vérifications sont automatiques. Rappelons que "cartésienne" signifie que le produit monoïdal est le produit catégoriel et que l'unité est l'objet terminal. $\square$

Cherchons à montrer que cette catégorie monoïdale symétrique est fermée, c'est-à-dire qu'elle possède un hom interne. Supposons que l'on possède un tel bifoncteur Hom ; il doit alors être muni d'une bijection naturelle

$$\text{Hom}_{\Delta_{\text{Ens}}}(\mathfrak{Z} \times \mathfrak{X}, \mathfrak{Y}) \cong \text{Hom}_{\Delta_{\text{Ens}}}(\mathfrak{Z}, \text{Hom}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})) .$$

On considérant le cas particulier du simplexe standard $\mathfrak{J} = \Delta^n$, le lemme de Yoneda simplicial impose la forme suivante

$$\mathfrak{H}om(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})_n \cong \text{Hom}_{\Delta\text{Ens}}(\Delta^n \times \mathfrak{X}, \mathfrak{Y}) .$$

On a là un premier exemple d'application de la définition 2.5.10 : à tout ensemble simplicial $\mathfrak{X}$, on associe le foncteur

$$\begin{aligned} \mathfrak{X} \times \Delta^\bullet & : \quad \Delta \rightarrow \Delta\text{Ens} \\ [n] & \mapsto \mathfrak{X} \times \Delta^n , \end{aligned}$$

qui est en fait la composée du plongement de Yoneda avec le produit avec $\mathfrak{X}$. La représentation simpliciale associée à cet ensemble simplicial cosimplicial $\mathfrak{X} \times \Delta^\bullet$ est

$$\begin{aligned} R_{\mathfrak{X} \times \Delta^\bullet} & : \quad \Delta\text{Ens} \rightarrow \Delta\text{Ens} \\ \mathfrak{Y} & \mapsto \text{Hom}_{\Delta\text{Ens}}(\mathfrak{X} \times \Delta^\bullet, \mathfrak{Y}) . \end{aligned}$$

Cette interprétation introduit l'ensemble simplicial recherché.

Définition 2.5.14 (Espace des morphismes). Pour toute paire $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$ d'ensembles simpliciaux, on appelle *espace des morphismes de $\mathfrak{X}$ vers $\mathfrak{Y}$* l'ensemble simplicial

$$\mathfrak{H}om(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}) := \text{Hom}_{\Delta\text{Ens}}(\mathfrak{X} \times \Delta^\bullet, \mathfrak{Y}) .$$

Les 0-simplexes de l'espace des morphismes est l'ensemble des morphismes d'ensembles simpliciaux :

$$\mathfrak{H}om(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})_0 = \text{Hom}_{\Delta\text{Ens}}(\mathfrak{X} \times \Delta^0, \mathfrak{Y}) = \text{Hom}_{\Delta\text{Ens}}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}) .$$

Le lemme de Yoneda simplicial (Proposition 2.5.4) montre que l'espace des morphismes du “point” * vers un ensemble simplicial $\mathfrak{Y}$ est égal à $\mathfrak{Y}$ tout entier :

$$\mathfrak{H}om(*, \mathfrak{Y}) = \mathfrak{Y} .$$

REMARQUE. L'espace des morphismes est parfois aussi appelé *objet exponentiel* et noté $\mathfrak{Y}^{\mathfrak{X}}$.

Proposition 2.5.15. *L'espace des morphismes est un hom interne, c'est-à-dire qu'il munit la catégorie des ensembles simpliciaux d'une structure de catégorie monoïdale symétrique fermée.*

DÉMONSTRATION. Il s'agit de trouver une bijection naturelle de la forme

$$\text{Hom}_{\Delta\text{Ens}}(\mathfrak{J} \times \mathfrak{X}, \mathfrak{Y}) \cong \text{Hom}_{\Delta\text{Ens}}(\mathfrak{J}, \mathfrak{H}om(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})) .$$

Pour cela, on considère le foncteur de représentation simplicial associé à $\mathfrak{X} \times \Delta^\bullet$ qui donne $R_{\mathfrak{X} \times \Delta^\bullet}(\mathfrak{Y}) = \text{hom}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$. Le théorème 2.5.11 fournit un adjoint à gauche L caractérisé par ses valeurs sur les simplexes standards : $L(\Delta^n) = \mathfrak{X} \times \Delta^n \cong \Delta^n \times \mathfrak{X}$. Ce foncteur L est donc le foncteur «produit avec $\mathfrak{X}$ », c'est-à-dire $L(\mathfrak{Y}) = \mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}$, car ce dernier préserve les colimites. Ceci conclut la démonstration. $\square$

La counité de cette adjonction fournit un morphisme naturel *d'évaluation* :

$$\text{ev}_{\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}} : \mathfrak{H}om(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}) \times \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y} .$$

On définit une composition au niveau des espaces de morphismes

$$\mathfrak{H}om(\mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}) \times \mathfrak{H}om(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}) \rightarrow \mathfrak{H}om(\mathfrak{X}, \mathfrak{Z})$$

en considérant le morphisme d'ensembles simpliciaux adjoint de la double évaluation suivante :

$$\mathfrak{H}om(\mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}) \times \mathfrak{H}om(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}) \times \mathfrak{X} \xrightarrow{\text{ev}_{\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}}} \mathfrak{H}om(\mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}) \times \mathfrak{Y} \xrightarrow{\text{ev}_{\mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}}} \mathfrak{Z} .$$

Corollaire 2.5.16. *La catégorie des ensembles simpliciaux muni de l'espace des morphismes est enrichie sur elle-même.*

DÉMONSTRATION. Avec la composition générale décrite ci-dessus, toute catégorie monoïdale symétrique fermée est enrichie sur elle-même, voir par exemple [Kel80, Section 1.6]. $\square$

Corollaire 2.5.17. *Il existe une bijection naturelle*

$$\mathfrak{H}om(\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}) \cong \mathfrak{H}om(\mathfrak{X}, \mathfrak{H}om(\mathfrak{Y}, \mathfrak{Z})) .$$

DÉMONSTRATION. Il s'agit d'un cas particulier de la théorie générale des catégories monoïdales symétriques fermées, voir par exemple [Kel80, Section 1.5]. $\square$

2.6. Exemples conceptuels. Nous poursuivons ici dans la même veine que celle qui a motivée la définition des espaces de morphismes : *tous* les exemples de foncteurs à valeurs dans les ensembles simpliciaux donnés ci-dessous sont de la forme décrite à la définition 2.5.10 et au théorème 2.5.11.

2.6.1. Ensembles simpliciaux constants.

Définition 2.6.1 (Ensemble simplicial constant). À tout ensemble E , on peut associer l'ensemble simplicial constant $c(E)$ défini par

$$X_n := E, \text{ pour } n \in \mathbb{N}, \quad \text{et} \quad d_i := \text{id}_E, s_i := \text{id}_E, \text{ pour } 0 \leq i \leq n.$$

Cette première famille, particulièrement simple, d'exemples d'ensembles simpliciaux est de la forme de celles obtenues par le théorème 2.5.11; il suffit pour cela de considérer la catégorie $C = \text{Ens}$ des ensembles et l'ensemble cosimplicial constant $\mathfrak{C} : [n] \mapsto \{*\}$ dont l'image est l'ensemble à un élément. Avec les notations de ce théorème, on a $R_{\mathfrak{C}}(E) = c(E)$.

Proposition 2.6.2. La construction des ensembles simpliciaux constants fournit un foncteur plein et fidèle

$$c : \text{Ens} \rightarrow \Delta\text{Ens}$$

dont l'image est formée des ensembles simpliciaux de dimension 0.

DÉMONSTRATION. Les vérifications sont automatiques. $\square$

Ce résultat montre que la notion d'ensemble simplicial généralise, de manière homotopique, celle d'ensemble.

Proposition 2.6.3. Le foncteur "ensemble simplicial constant" c admet un adjoint à droite donné par le foncteur de troncation

$$T : \Delta\text{Ens} \rightarrow \text{Ens}, \quad \mathfrak{X} \mapsto X_0$$

et un adjoint à gauche donné par le foncteur de troncation modulo les images des premières faces

$$\tilde{T} : \Delta\text{Ens} \rightarrow \text{Ens}, \quad \mathfrak{X} \mapsto X_0 / \sim,$$

où $d_0(x) \sim d_1(x)$, pour $x \in X_1$.

$$c : \text{Ens} \xrightleftharpoons[\perp]{} \Delta\text{Ens} : T \quad \tilde{T} : \Delta\text{Ens} \xrightleftharpoons[\perp]{} \text{Ens} : c.$$

DÉMONSTRATION. Les vérifications sont automatiques. Remarquons néanmoins que le second cas est produit par le théorème 2.5.11 appliqué à l'ensemble cosimplicial constant $\mathfrak{C} : [n] \mapsto \{*\}$ dont l'image est l'ensemble à un élément. $\square$

L'adjonction $c \dashv T$ fournit l'équivalence de catégories entre la catégorie des ensembles et celle des ensembles simpliciaux de dimension 0 établie à la proposition 2.6.2.

2.6.2. Ensemble simplicial singulier. Utilisons le théorème 2.5.11 pour associer fonctoriellement un ensemble simplicial à tout espace topologique. Nous avons déjà vu que la collection des simplexes géométriques standards munis de leurs cofaces et codégénérescences formaient un espace topologique cosimplicial :

$$\begin{aligned} |\Delta^\bullet| & : \Delta \rightarrow \text{Top} \\ [n] & \mapsto |\Delta^n|. \end{aligned}$$

Définition 2.6.4 (Ensemble simplicial singulier). L'ensemble simplicial singulier d'un espace topologique X est défini par

$$\text{Sing } X := \text{Hom}_{\text{Top}}(|\Delta^\bullet|, X).$$

Ses éléments, appelés *simplexes singuliers*, sont les applications continues $f : |\Delta^n| \rightarrow X$. Ses faces et dégénérescences sont données par $d_i(f) = f \circ \delta_i$ et $s_i(f) = f \circ \sigma_i$.

Proposition 2.6.5. L'application qui associe l'ensemble simplicial singulier à un espace topologique est un foncteur

$$\begin{aligned} \text{Sing} & : \text{Top} \rightarrow \Delta\text{Ens} \\ X & \mapsto \text{Sing } X \end{aligned}$$

dont l'adjoint à gauche est la réalisation géométrique

$$|-| : \Delta\text{Ens} \xrightleftharpoons[\perp]{} \text{Top} : \text{Sing}.$$

DÉMONSTRATION. Ce résultat est un cas particulier du théorème 2.5.11 : le foncteur des ensembles simpliciaux singuliers est représenté par l'espace topologique cosimplicial $|\Delta^\bullet|$. Il admet un adjoint à gauche donné par le coégalisateur

$$\coprod_{\substack{\varphi : [n] \rightarrow [m] \\ \varphi \in \{\delta_i, \sigma_i\}}} X_m \times |\Delta^n| \xrightarrow[\text{id} \times \varphi]{\mathfrak{X}(\varphi^{\text{op}}) \times \text{id}} \coprod_{n \in \mathbb{N}} X_n \times |\Delta^n| \longrightarrow \mathfrak{X}$$

qui est la formule utilisée pour définir la réalisation géométrique. $\square$

Cette série de résultats explique donc conceptuellement et rétrospectivement la formule choisie pour la réalisation géométrique.

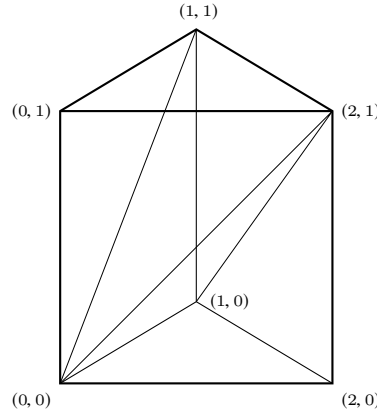
Proposition 2.6.6. *Soit une paire $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$ d'ensembles simpliciaux tels que soit les deux ont une quantité dénombrable de simplexes soit au moins une des deux réalisations géométriques est localement finie, c'est-à-dire que tout point est à l'intérieur d'un polyèdre simplicial. Dans ce cas, on a un homéomorphisme*

$$|\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}| \cong |\mathfrak{X}| \times |\mathfrak{Y}| .$$

Proof. On renvoie le-la lecteur-trice à [May92, Theorem 14.3] $\square$

REMARQUE. Le problème soulevé par les hypothèses techniques est toujours le même : il trait à la topologie considérée sur les espaces produits. La propriété mentionnée ci-dessus est donc vraie si on travaille dans la catégorie des espaces topologiques compactement engendrés et faiblement Hausdorff. Sinon, il suffit de demander que $|\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}|$ soit un CW-complexe, ce qu'impliquent les hypothèses utilisées ici.

Il convient de remarquer que cet homéomorphisme, vu de la gauche vers la droite, n'est pas cellulaire. Ceci est en fait positif : le membre de gauche fournit une triangulation canonique pour le produit d'espaces topologiques de droite. Dans le cas de $\Delta^p \times \Delta^q$, on obtient la décomposition prismatique donnée par les chemins croissants ou le (p, q) -battages. Le dessin ci-dessous montre le cas de $\Delta^2 \times \Delta^1$.



2.6.3. *Nerf d'une catégorie.* On considère la catégorie Cat des petites catégories. Le foncteur suivant fournit un objet cosimplicial dans la catégorie des catégories :

$$\begin{aligned} \mathfrak{C} &: \Delta \rightarrow \text{Cat} \\ [n] &\mapsto \text{Cat}[n] := \{0 \rightarrow 1 \rightarrow \cdots \rightarrow n\} , \end{aligned}$$

où $\text{Cat}[n]$ est la catégorie associée à l'ensemble totalement ordonné $[n]$.

Définition 2.6.7 (Nerf d'une catégorie). Le *nerf d'une petite catégorie* $\mathcal{C}$ est l'ensemble simplicial

$$\mathfrak{N}\mathcal{C} := \text{Hom}_{\text{Cat}}(\mathfrak{C}, \mathcal{C}) .$$

EXERCICE. Montrer que le nerf de la catégorie $\text{Cat}[n]$ est le n -simplexe standard : $\mathfrak{N}\text{Cat}[n] = \Delta^n$.

Proposition 2.6.8. *Les n -simplexes du nerf d'une catégorie $\mathcal{C}$ sont les chaînes de n -morphismes composables*

$$\mathfrak{N}\mathcal{C}_n = \left\{ c_0 \xrightarrow{f_1} c_1 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_n} c_n \right\} ,$$

avec pour convention que $\mathfrak{N}\mathcal{C}_0$ est formé des objets de $\mathcal{C}$. Les faces sont données par

$$d_i(f_1, \dots, f_n) = (f_1, \dots, f_{i+1}f_i, \dots, f_n), \quad \text{pour } 1 \leq i \leq n-1$$

et $d_0(f_1, \dots, f_n) = (f_2, \dots, f_n)$, $d_n(f_1, \dots, f_n) = (f_1, \dots, f_{n-1})$. Les dégénérescences sont données par

$$s_i(f_1, \dots, f_n) = (f_1, \dots, f_i, \text{id}, f_{i+1}, \dots, f_n), \quad \text{pour } 0 \leq i \leq n .$$

DÉMONSTRATION. Les vérifications sont automatiques. $\square$

EXEMPLE. Le *nerf* BG d'un groupe est le nerf de la catégorie à un seul objet associée. Explicitement, cet ensemble simplicial est formé des n -simplexes $BG_n = G^n$, avec $BG_0 = \{1\}$, munis des faces et dégénérescences suivantes

$$\begin{aligned} d_i(g_1, \dots, g_n) &= \begin{cases} (g_2, \dots, g_n) & \text{pour } i = 0, \\ (g_1, \dots, g_{i+1}g_i, \dots, g_n) & \text{pour } 1 \leq i \leq n-1, \\ (g_1, \dots, g_{n-1}) & \text{pour } i = n, \end{cases} \\ s_i(g_1, \dots, g_n) &= (g_1, \dots, g_i, 1, g_{i+1}, \dots, g_n). \end{aligned}$$

Sa réalisation géométrique $|BG|$ est l'espace classifiant du groupe G .

Une utilité de cette approche conceptuelle, plutôt qu'avec la définition explicite, vient de l'application complète du théorème 2.5.11 qui montre que cette construction est fonctorielle et qu'elle admet un adjoint à gauche calculable.

Définition 2.6.9 (Catégorie fondamentale $\tau_1(\mathfrak{X})$). A tout ensemble simplicial $\mathfrak{X}$, on associe la *catégorie fondamentale* $\tau_1(\mathfrak{X})$ dont les objets sont les 0-simplexes X_0 et dont les morphismes sont donnés par le graphe libre sur des flèches indicées par les 1-simplexes

$$d_1(x) \xrightarrow{x \in X_1} d_0(x)$$

quotienté par les relations données par les 2-simplexes

$$\begin{array}{ccc} & \bullet & \\ d_2(y) \nearrow & & \searrow d_0(y) \\ \bullet & \xrightarrow{d_1(y)} & \bullet \end{array} \quad y \in X_2$$

Dans cette catégorie, les images de la première dégénérescence $s_0 : X_0 \rightarrow X_1$ donnent les morphismes d'identité. Les deux secondes dégénérescences $s_0 : X_1 \rightarrow X_2$ et $s_1 : X_1 \rightarrow X_2$ montrent respectivement que la composée à droite et à gauche par ces identités laissent invariant les morphismes.

Proposition 2.6.10. *L'application qui associe le nerf à une petite catégorie est un foncteur*

$$\begin{array}{ccc} \text{Cat} & \rightarrow & \Delta\text{Ens} \\ \mathcal{C} & \mapsto & \mathfrak{N}\mathcal{C} \end{array}$$

qui admet pour adjoint à gauche le foncteur catégorie fondamentale τ_1

$$\tau_1 : \Delta\text{Ens} \xrightleftharpoons{\perp} \text{Cat} : \mathfrak{N}.$$

DÉMONSTRATION. Il s'agit d'un corollaire direct du théorème 2.5.11. Il suffit pour cela de montrer que la catégorie fondamentale $\tau_1(\mathfrak{X})$ est isomorphe au coégalisateur (7). On commence déjà par remarquer que la catégorie fondamentale associée au simplexe standard est la catégorie associée au poset $[n]$, i.e. $\tau_1(\Delta^n) \cong \text{Cat}[n]$. Ensuite, **démonstration à reprendre** $\square$

REMARQUE. Rappelons qu'un groupoïde est une catégorie où tous les morphismes sont inversibles. Le foncteur oubli de la catégorie des petits groupoïdes vers celle des petites catégories admet un adjoint à gauche. Et l'image de la catégorie fondamentale $\tau_1(\mathfrak{X})$ par ce dernier fournit un groupoïde $\pi_1(\mathfrak{X})$ appelé le *groupoïde fondamental de l'ensemble simplicial* $\mathfrak{X}$.

2.6.4. *Correspondance de Dold–Kan.* Cette exemple est l'occasion d'introduire quelques constructions qui relient les ensembles simpliciaux aux complexes de chaînes. On travaille ici sur $\mathbb{Z}$ mais on aurait aussi bien pu travailler sur un autre anneau de base. Les applications linéaires entre modules libres provenant d'applications ensemblistes seront notées avec une police romane droite, comme par exemple d_i .

Définition 2.6.11 (Complexe de Moore). Le *complexe de Moore* $C\mathfrak{X}$ d'un ensemble simplicial $\mathfrak{X}$ a pour chaînes de degré n le module libre sur les n -simplexes et pour différentielle la somme alternée des faces :

$$d := \sum_{i=0}^n (-1)^i d_i : \mathbb{Z}X_n \rightarrow \mathbb{Z}X_{n-1}.$$

Les relations simpliciales (6) montrent rapidement que l'opérateur d est de carré nul. On peut considérer le sous-complexe de chaînes $D\mathfrak{X}$ du complexe de Moore engendré par les simplexes dégénérés.

Définition 2.6.12 (Complexe normalisé). Le *complexe normalisé* $N\mathfrak{X}$ d'un ensemble simplicial $\mathfrak{X}$ est le complexe de chaînes quotient du complexe de Moore par le complexe des dégénérescences :

$$N\mathfrak{X} := (C\mathfrak{X}/D\mathfrak{X}, d) .$$

Proposition 2.6.13. *Pour tout ensemble simplicial $\mathfrak{X}$, la projection canonique $C\mathfrak{X} \rightarrow N\mathfrak{X}$ est une équivalence d'homotopie.*

DÉMONSTRATION. L'idée consiste à utiliser les dégénérescences pour créer une homotopie contractante. Il s'agit d'un bon exercice qui est donc laissé aux lecteur-trice-s. Pour plus de détails, on renvoie à [ML95, Théorème VIII.6.1]. $\square$

Le complexe normalisé admet donc pour base les simplexes non-dégénérés. Le complexe de Moore et le complexe normalisé définissent des foncteurs depuis la catégorie des ensembles simpliciaux.

EXEMPLE. Le complexe normalisé $N\Delta^n$ associé au n -simplexe standard admet pour base les éléments de la forme $i_0 \cdots i_m$ de degré m , pour $i_0 < \cdots < i_m$ dans $[n]$ et pour différentielle

$$d(i_0 \cdots i_m) = \sum_{j=0}^m (-1)^j i_0 \cdots \widehat{i_j} \cdots i_m .$$

La structure d'objet cosimplicial sur les simplexes standards fournie par le plongement de Yoneda (corollaire 2.5.6) munit ces complexes normalisés d'une structure de complexe de chaînes cosimplicial :

$$N\Delta : \Delta \rightarrow \text{Ch} .$$

Proposition 2.6.14. *Le foncteur des chaînes normalisées admet un adjoint à droite*

$$N : \Delta\text{Ens} \xrightleftharpoons{\perp} \text{Ch} : R_{N\Delta}$$

donné par

$$R_{N\Delta}(C) \cong \bigoplus_{0 \leq i_0 < \cdots < i_k \leq n} C_k .$$

DÉMONSTRATION. Il s'agit d'un corollaire direct du Théorème 2.5.11. $\square$

Le foncteur des chaînes normalisées induit un foncteur $\overline{N} : \text{sAb} \rightarrow \text{Ch}_{\geq 0}$ des groupes abéliens simpliciaux vers les complexes de chaînes positivement gradués par la formule $(\overline{N}\mathfrak{A})_n := A_n$. On considère la restriction $\overline{R}_{N\Delta} : \text{Ch}_{\geq 0} \rightarrow \text{sAb}$ de l'autre foncteur.

Théorème 2.6.15 (Équivalence de Dold–Kan). *L'adjonction*

$$\overline{N} : \text{sAb} \xrightleftharpoons{\perp} \text{Ch}_{\geq 0} : \overline{R}_{N\Delta}$$

est une équivalence entre la catégorie des groupes abéliens simpliciaux et la catégorie des complexes de chaînes positivement gradués.

DÉMONSTRATION. Les mêmes formules qu'à la Proposition 2.6.14 donne l'adjonction considérée ici. Il est ensuite automatique de montrer que l'unité et la counité d'adjonction sont des isomorphismes. $\square$

2.7. Complexes de Kan et ∞ -catégories. Nous sommes maintenant suffisamment armés pour mettre au jour une notion simple et efficace de catégorie supérieure. Le cahier des charges impose que les catégories en soit des exemples.

Lemme 2.7.1. *Le foncteur nerf $\mathfrak{N} : \text{Cat} \hookrightarrow \Delta\text{Ens}$ est plein et fidèle.*

DÉMONSTRATION. On commence par remarquer que la counité $\varepsilon_C : \tau_1 \mathfrak{N}C \xrightarrow{\cong} C$ de l'adjonction $\tau_1 \dashv \mathfrak{N}$ est un isomorphisme naturel. En tirant en arrière par cette dernière, on obtient la bijection naturelle recherchée :

$$\text{Hom}_{\text{Cat}}(C, D) \cong \text{Hom}_{\Delta\text{Ens}}(\tau_1 \mathfrak{N}C, D) \cong \text{Hom}_{\Delta\text{Ens}}(\mathfrak{N}C, \mathfrak{N}D) .$$

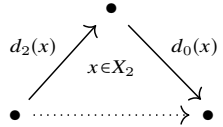
$\square$

Les ensembles simpliciaux fournissent donc un cadre suffisamment large dans lequel on peut espérer définir une notion supérieure de catégorie. Commençons pour cela par caractériser les catégories parmi les ensembles simpliciaux, c'est-à-dire par décrire l'image essentielle du foncteur nerf .

Le résultat précédent utilise le fait crucial que la counité de l'adjonction catégorie fondamentale-nerf est un isomorphisme naturel. Il n'en est pas de même pour l'unité d'adjonction $v_{\mathfrak{X}} : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{N} \tau_1(\mathfrak{X})$. C'est déjà faux pour les 1-simplexes : tout élément $x \in X_1$ fournit un morphisme $d_2(x) \rightarrow d_0(x)$ mais les morphismes de $\mathfrak{N} \tau_1(\mathfrak{X})$ sont représentés par des compositions libres de tels morphismes. Dans le cas du cornet $\mathfrak{X} = \Lambda_1^2$, l'unité d'adjonction est égale à l'inclusion

$$v_{\Lambda_1^2} : \Lambda_1^2 \hookrightarrow \Delta^2 \cong \mathfrak{N} \tau_1(\Lambda_1^2),$$

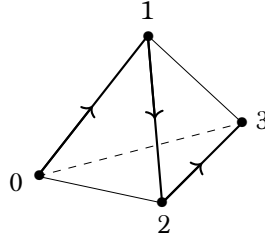
qui n'est pas un isomorphisme : il manque à gauche tout ce qui est dans Δ^2 mais pas dans le cornet Λ_1^2 . Pour comprendre à quelle famille d'ensembles simpliciaux il faut se restreindre, on continue et on considère les 2-simplexes $x \in X_2$ dont l'image par l'unité d'adjonction vaut $v(x) = (d_2(x), d_0(x))$. Graphiquement, on ne conserve que les deux faces "composables" du 2-simplexe :



Pour que l'unité d'adjonction soit un isomorphisme, il faut que cette seule donnée puisse caractériser tous les 2-simplexes de $\mathfrak{X}$. Pour cela, on remarque d'abord que cette donnée correspond aux morphismes d'ensembles simpliciaux $\Lambda_1^2 \rightarrow \mathfrak{X}$. Puis, qu'elle caractérise le 2-simplexe si et seulement le diagramme suivant admet une unique extension

$$(*) \quad \begin{array}{ccc} \Lambda_1^2 & \longrightarrow & \mathfrak{X} \\ \downarrow & \nearrow \exists! & \\ \Delta^2 & & \end{array}.$$

De manière générale, l'unité d'adjonction ne retient que la «plus longue suite d'arêtes composables» d'un n -simplexe



à savoir explicitement

$$v(x) = (d_2^{n-1}(x), d_2^{n-2}d_0(x), \dots, d_2d_0^{n-2}(x), d_0^{n-1}(x)),$$

où $x \in X_n$ (avec un léger abus de notation pour les faces). Pour un 3-simplexe $x \in X_3$, on peut récupérer de manière unique la donnée «de la face 012», à savoir $d_3(x)$ grâce à la propriété (*), puis de même celle «de la face 123», à savoir $d_0(x)$ et enfin celle «de la face 013», à savoir $d_2(x)$. Ceci correspond à un morphisme d'ensembles simpliciaux $\Lambda_1^3 \rightarrow \mathfrak{X}$. Nous avons donc besoin que le diagramme suivant admette une unique extension

$$(*) \quad \begin{array}{ccc} \Lambda_1^3 & \longrightarrow & \mathfrak{X} \\ \downarrow & \nearrow \exists! & \\ \Delta^3 & & \end{array}.$$

Nous aurions aussi bien pu commencer de la même manière en finissant par la donnée «de la face 023», à savoir $d_1(x)$. Il faudrait alors demander une unique extension du morphisme $\Lambda_2^3 \rightarrow \mathfrak{X}$ depuis le cornet Λ_2^3 . En dimension supérieure, on est naturellement amené à considérer les définitions et conditions suivantes.

Définition 2.7.2 (Cornets internes et externes). Les *cornets internes* sont ceux de la forme Λ_k^n pour $1 \leq k \leq n-1$. Les *cornets externes* sont ceux de la forme Λ_0^n et Λ_n^n .

Proposition 2.7.3. La catégorie des petites catégories s'identifie à la sous-catégorie pleine des ensembles simpliciaux qui vérifient la propriété d'unique extension le long des cornets internes :

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_k^n & \longrightarrow & \mathfrak{X} \\ \downarrow & \nearrow \exists! & \\ \Delta^n & & \end{array} \quad \text{pour } n \geq 2 \text{ et } 1 \leq k \leq n-1.$$

DÉMONSTRATION. On commence par remarquer que le nerf d'une catégorie vérifie cette propriété d'unique extension le long des cornets internes. Ensuite, on montre, en utilisant les arguments donnés dans l'analyse ci-dessus et par récurrence sur n , que l'unité de l'adjonction nerf-catégorie fondamentale est un isomorphisme naturel lorsque l'on se restreint aux ensembles simpliciaux qui vérifient cette propriété d'unique extension. $\square$

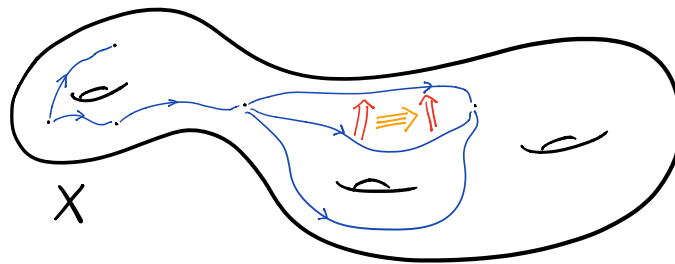
REMARQUE. Le nerf d'une catégorie ne vérifie en général pas de propriété d'extension le long des cornets externes. Si on considère, par exemple, les cornets externes de dimension 2 suivants

$$\begin{array}{ccc} & y & \\ g \nearrow & & \\ x & \xrightarrow{\text{id}_x} & x \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} x & & \\ & f \searrow & \\ y & \xrightarrow{\text{id}_y} & y \end{array},$$

la propriété d'extension impliquerait l'existence d'inverse à gauche et à droite respectivement.

EXERCISE. Montrer que la catégorie des petits groupoïdes, c'est-à-dire des petites catégories où tous les morphismes sont inversibles, s'identifie à la sous-catégorie pleine des ensembles simpliciaux qui vérifient la propriété d'unique extension le long de tout corne Λ_k^n , pour $n \geq 2$ et $0 \leq k \leq n$.

Comment des morphismes en dimension supérieure peuvent-ils apparaître naturellement sur un objet mathématique ? Nous avons déjà considéré cette question à la section 1.1.3. On peut aussi répondre à cette question en essayant de construire un ∞ -groupoïde *fondamental* associé à un espace topologique. Rappelons que le groupoïde fondamental d'un espace topologique X est la catégorie dont les objets sont les points de X et dont les morphismes sont les classes d'homotopie de chemins entre deux points. Notons qu'à cause de la paramétrisation des chemins, le quotient par la relation d'homotopie permet d'avoir une composition des morphismes associatives. L'écueil d'une telle construction est qu'elle ne voit pas la donnée homotopique supérieure des espaces topologiques. On a donc envie de considérer un ∞ -groupoïde fondamental d'un espace topologique X dont les objets seraient les points de X , les 1-morphismes les chemins entre deux points, les 2-morphismes les homotopies entre chemins, les 3-morphismes les homotopies entre homotopies, etc.



Premier problème : la composition des chemins n'est alors pas associative ... mais on peut contrôler le défaut d'associativité grâce aux 2-morphismes. Néanmoins l'hypothèse homotopique de Grothendieck voudrait que les notions d' ∞ -groupoïde et d'espace topologique soient équivalentes, dans un sens à préciser. La version décrite ci-dessus serait une version globulaire d'un potentiel ∞ -groupoïde fondamental. À la place, on préfère ici considérer le modèle simplicial donné par l'ensemble simplicial singulier.

On veut donc que les espaces topologiques à travers leurs ensembles simpliciaux singuliers soient des exemples pour la notion recherchée de catégorie supérieure. Pour cela, nous aimerions reprendre

l'étude précédente mais avec le foncteur des ensembles simpliciaux singuliers à la place du foncteur nerf. Mais le premier résultat de la partie précédente ne tient partiellement plus ici.

Lemme 2.7.4. *Le foncteur des ensembles simpliciaux singuliers est fidèle mais pas plein.*

DÉMONSTRATION. Soit $f : X \rightarrow Y$ une application continue entre espaces topologiques. Le morphisme induit au niveau des ensembles simpliciaux singuliers $\text{Sing}(f) : \text{Sing}X \rightarrow \text{Sing}Y$ envoie un simplexe singulier $\varphi : |\Delta^n| \rightarrow X$ sur $f \circ \varphi$. L'ensemble des 0-simplexes singuliers est en bijection avec les éléments de l'espace topologique et, avec cette identification, l'application $\text{Sing}(f)_0 : X \rightarrow Y$ est l'application f . Donc le foncteur Sing est fidèle.

Considérons un espace topologique totalement discontinu, par exemple $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, et l'espace topologique discret de même ensemble sous-jacent, noté ici $\mathbb{Q}^{\text{dis}}$. Dans les deux cas, les simplexes singuliers sont les applications constantes et l'ensemble simplicial singulier est l'ensemble simplicial constant $\mathbb{Q}$. Or, le morphisme simplicial identité $\text{Sing}\mathbb{Q} \rightarrow \text{Sing}\mathbb{Q}^{\text{dis}}$ ne saurait venir de l'identité $\text{id} : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}^{\text{dis}}$ car cette dernière n'est pas continue. $\square$

Il est en fait illusoire de chercher à réduire la catégorie des ensembles simpliciaux pour faire de l'adjonction ensemble simplicial singulier-réalisation géométrique une équivalence de catégories. Néanmoins cette dernière induit une équivalence au niveau des catégories homotopiques, cf. Théorème 2.8.19. Dans ce contexte, la notion simpliciale «équivalente» à celle d'espace topologique est la suivante.

Définition 2.7.5 (Complexe de Kan). Un *complexe de Kan* est un ensemble simplicial $\mathfrak{X}$ qui vérifie la propriété d'extension le long de tous les cornets :

$$(8) \quad \begin{array}{ccc} \Lambda_k^n & \longrightarrow & \mathfrak{X} \\ \downarrow & \nearrow \exists & \\ \Delta^n & & \end{array} \quad \text{pour } n \geq 2 \text{ et } 0 \leq k \leq n.$$

REMARQUE. Remarquez la similitude avec la propriété d'extension homotopique des fibrations d'espaces topologiques donnée à la définition 1.5.2.

Proposition 2.7.6. *Pour tout espace topologique X , l'ensemble simplicial singulier $\text{Sing}X$ est un complexe de Kan.*

DÉMONSTRATION. L'adjonction ensemble simplicial singulier-réalisation géométrique de la proposition 2.6.5 montre que la propriété d'extension de Kan (8) est équivalente à la propriété d'extension similaire au niveau des espaces topologiques

$$\begin{array}{ccc} |\Lambda_k^n| & \longrightarrow & X \\ \downarrow & \nearrow \exists & \\ |\Delta^n| & & \end{array}.$$

Cette dernière se démontre en réalisant le k^{e} -cortet $|\Lambda_k^n|$ comme un retract du n -simplexe géométrique standard $|\Delta^n|$. $\square$

La propriété d'extension le long des cornets admet la description purement combinatoire suivante.

Lemme 2.7.7. *Un ensemble simplicial $\mathfrak{X}$ est un complexe de Kan si et seulement si pour tout $n \geq 2$ et $0 \leq k \leq n$, toute collection de n simplexes $x_0, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n \in X_{n-1}$ vérifiant $d_i(x_j) = d_{j-1}(x_i)$, pour $i < j$ différents de k , admet un n -simplexe $x \in X_n$ tel que $d_i(x) = x_i$, pour $0 \leq i \leq n$ différent de k .*

DÉMONSTRATION. C'est une application directe du corollaire 2.5.5 et du lemme de Yoneda 2.5.4. $\square$

EXERCICE.

- ◊ Montrer que le nerf d'un groupe est un complexe de Kan et que si le groupe est non-trivial, il ne peut pas être isomorphe à un ensemble simplicial singulier. Donc les complexes de Kan ne forment pas l'image essentielle du foncteur des ensembles simpliciaux singuliers.
- ◊ Montrer que l'ensemble simplicial sous-jacent à un groupe simplicial est un complexe de Kan.
- ◊ Montrer que les n -simplexes standard Δ^n ne sont pas des complexes de Kan pour $n \geq 2$.

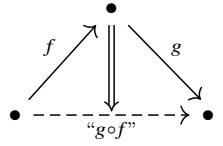
Nous y sommes, pour obtenir une bonne définition de catégorie supérieure, il suffit de considérer des ensembles simpliciaux qui vérifient une propriété commune aux nerfs de catégories et aux ensembles simpliciaux singuliers : celle d'extension, non-nécessairement unique, le long des cornets internes.

Définition 2.7.8 (∞ -catégorie). Une ∞ -catégorie est un ensemble simplicial $\mathfrak{X}$ qui vérifie la propriété d'extension le long des cornets internes :

$$(9) \quad \begin{array}{ccc} \Lambda_k^n & \longrightarrow & \mathfrak{X} \\ \downarrow & \nearrow \exists & \\ \Delta^n & & \end{array} \quad \text{pour } n \geq 2 \text{ et } 1 \leq k \leq n-1 .$$

Cette notion a été introduite par Boardman–Vogt dans leur étude des propriétés homotopiques des structures algébriques [BV73] sous le nom de *complexe de Kan faible*. Elle a été intensivement étudiée d'abord par Joyal [Joy02] puis par Lurie [Lur09].

Rétrospectivement, on peut interpréter les 0-simplexes d'une ∞ -catégorie comme ses objets et les 1-simplexes comme ses morphismes. La condition d'extension le long du cornet Λ_1^2



fournit un candidat pour la composée “ $g \circ f$ ” de deux morphismes composables ainsi qu’une “homotopie” de (g, f) vers “ $g \circ f$ ”. La composition n’est donc pas unique, ni stricte. Ceci n’est pas un problème, au contraire. Ce degré de liberté est souhaité et, de toute façon, les différents choix sont homotopiquement uniques.

Définition 2.7.9 (∞ -groupeïde). Un ∞ -groupeïde est un ensemble simplicial $\mathfrak{X}$ qui vérifie la propriété d'extension le long de tous les cornets Λ_k^n pour $n \geq 2$ et $0 \leq k \leq n$.

REMARQUE. Les notions d' ∞ -catégorie et d' ∞ -groupeïde sont définies par une *propriété* : existence de remplissages de cornets. Il peut parfois être nécessaire d'adopter une approche plus algébrique et d'exiger la donnée de ces remplissages. On obtient alors les notions d' ∞ -catégorie *algébrique* et d' ∞ -groupeïde *algébrique* qui sont en fait des algèbres sur des monades. Ceci leur permet par exemple d'avoir toutes les limites et colimites. Un exemple fondamental d'application de la dernière notion est donnée dans [RNV20] où les formules de la théorie de Lie (Baker–Campbell–Hausdorff) sont retrouvées et généralisées en remplissant des cornets.

13/12/24

2.8. Homotopie simpliciale. L'homotopie simpliciale est la première raison d'être des ensembles simpliciaux. Elle permet d'encoder combinatoirement les propriétés homotopiques des espaces topologiques. Il faut bien faire attention que la théorie générale ne s'applique pas à tous les ensembles simpliciaux, mais uniquement à ceux qui sont des "espaces", c'est-à-dire les complexes de Kan.

Définition 2.8.1 (Chemin). Un *chemin* dans un ensemble simplicial $\mathfrak{X}$ est un morphisme d'ensemble simpliciaux $p: \Delta^1 \rightarrow \mathfrak{X}$.

Une telle donnée correspond à

$$0 \xrightarrow{01} 1 \xrightarrow{p} p(0) = d_1(x) \xrightarrow{x} p(1) = d_0(x) ,$$

avec $p(01) = x \in X_1$.

Définition 2.8.2 (Éléments homotopes). Deux 0-simplexes $a, b \in X_0$ d'un ensemble simplicial $\mathfrak{X}$ sont *homotopes* $a \sim b$ s'il existe un chemin $p: \Delta^1 \rightarrow \mathfrak{X}$ tel que $p(0) = a$ et $p(1) = b$, c'est-à-dire s'il existe $x \in X_1$ tel que $d_1(x) = a$ et $d_0(x) = b$.

On dit aussi que a et b sont dans la *même composante connexe*.

REMARQUE. Le relation binaire $\sim$ n'est pas une relation d'équivalence en général. Il suffit de penser au simplexe standard Δ^1 de dimension 1 : dans ce dernier 0 est homotope à 1, mais 1 n'est pas homotope à 0.

C'est précisément pour pallier cela qu'il faut considérer des complexes de Kan.

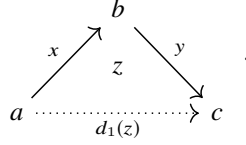
Proposition 2.8.3. *Pour tout complexe de Kan $\mathfrak{X}$, la relation $\sim$ est une relation d'équivalence.*

Proof.

REFLEXIVITÉ: Pour tout 0-simplexe $a \in X_0$, on a $a \sim a$; pour cela il suffit de considérer le chemin donné par $s_0(a)$:

$$a = d_1 s_0(a) \xrightarrow{s_0(a)} d_0 s_0(a) = a .$$

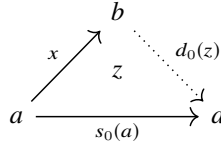
TRANSITIVITÉ: Soient $a \sim b$ et $b \sim c$ avec pour chemin respectif x et y . Une telle donnée est équivalente au 2-cornet suivant de $\mathfrak{X}$:



La propriété d'extension de Kan fournit un 2-simplexe $z \in X_2$ tel que $d_2(z) = x$, $d_0(z) = y$.

Le 1-simplexe $d_1(z)$ est un chemin qui relie a et c .

SYMÉTRIE: Soient $a \sim b$ reliés par un chemin $x \in X_1$. On considère le 2-cornet suivant



qui admet un remplissage par la propriété d'extension de Kan. Alors le 1-simplexe $d_1(z)$ est un chemin qui relie b à a .

□

REMARQUE. On a utilisé "tous" les cornets de dimensions 2 : interne et externe.

Dans le reste de cette section, nous ne considérerons que des complexes de Kan, sauf mention explicite du contraire.

Définition 2.8.4 (Composantes connexes). Soit $\mathfrak{X}$ un complexe de Kan. On note

$$\pi_0(\mathfrak{X}) := X_0 / \sim$$

l'ensemble de ses *composantes connexes*.

On va maintenant appliquer cette définition à l'espace des morphismes $\mathfrak{Hom}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ entre deux ensembles simpliciaux. On rappelle la forme de ses 0-simplexes et 1-simplexes :

$$\mathfrak{Hom}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})_0 = \text{Hom}_{\Delta\text{Ens}}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}) \quad \text{et} \quad \mathfrak{Hom}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})_1 = \text{Hom}_{\Delta\text{Ens}}(\mathfrak{X} \times \Delta^1, \mathfrak{Y}) .$$

Définition 2.8.5 (Morphismes homotopes). Deux morphismes $f, g : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}$ d'ensembles simpliciaux sont *homotopes* s'ils le sont comme 0-simplexes de l'espace des morphismes $\mathfrak{Hom}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$; cela signifie qu'il existe un morphisme d'ensembles simpliciaux $H : \mathfrak{X} \times \Delta^1 \rightarrow \mathfrak{Y}$ tel que $H(-, 0) = f$ et $H(-, 1) = g$.

La similitude avec la notion d'homotopie entre applications continues est frappante. Le résultat suivant est l'analogue dans le cadre des ensembles simpliciaux de la structure d'espace topologique sur les ensembles d'applications continues.

Théorème 2.8.6. *Pour tout complexe de Kan $\mathfrak{Y}$, l'espace des morphismes $\mathfrak{Hom}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ est un complexe de Kan.*

DÉMONSTRATION. La démonstration combinatoire est longue, c'est pourquoi on renvoie à [May92, Theorem 6.9]. Une démonstration catégorique repose sur la notion très utile d'extension anodine : il suffit pour cela de considérer le cas $K = \emptyset$ dans [GJ09, Corollary I.5.3.]. □

Corollary 2.8.7. *Soit $\mathfrak{X}$ un ensemble simplicial et $\mathfrak{Y}$ un complexe de Kan. La relation d'homotopie $\sim$ entre morphismes de $\mathfrak{X}$ vers $\mathfrak{Y}$ est une relation d'équivalence.*

DÉMONSTRATION. Il s'agit d'un corollaire de la proposition 2.8.3 et du théorème 2.8.6. □

On note $[\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}] := \mathfrak{Hom}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}) / \sim$ l'ensemble des classes d'équivalence de morphismes d'ensembles simpliciaux à homotopie près. On peut montrer rapidement que la relation d'homotopie vérifie la propriété

$$f \sim g \implies fk \sim gk \quad \text{et} \quad lf \sim lg,$$

pour $f, g: \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}$, $k: \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{X}$ et $l: \mathfrak{Y} \rightarrow \mathfrak{Z}$.

Définition 2.8.8 (Équivalence d'homotopie). Une *équivalence d'homotopie* est un morphisme d'ensemble simpliciaux $f: \mathfrak{X} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{Y}$ qui admet un morphisme $g: \mathfrak{Y} \rightarrow \mathfrak{X}$ vérifiant $gf \sim \text{id}_{\mathfrak{X}}$ et $fg \sim \text{id}_{\mathfrak{Y}}$. Deux complexes de Kan sont *homotopiquement équivalents* $\mathfrak{X} \sim \mathfrak{Y}$ s'ils sont reliés par une équivalence d'homotopie

Proposition 2.8.9. (1) *Le foncteur de réalisation géométrique $| \cdot | : \Delta\text{Ens} \rightarrow \text{Top}$ envoie les homotopies simpliciales sur les homotopies topologiques.*

(2) *Toute homotopie topologique $H: X \times I \rightarrow Y$ entre deux applications continues $f, g: X \rightarrow Y$ induit une homotopie simpliciale entre $\text{Sing}(f), \text{Sing}(g): \text{Sing}(X) \rightarrow \text{Sing}(Y)$ par la formule*

$$\text{Sing}(X) \times \Delta^1 \rightarrow \text{Sing}(X) \times \text{Sing}(I) \rightarrow \text{Sing}(X \times I) \xrightarrow{\text{Sing}(H)} \text{Sing}(Y),$$

où le morphisme de gauche est défini par $01 \mapsto \text{id}_I$.

Ceci montre que les foncteurs réalisation géométrique et ensemble simplicial singulier induisent des bijections entre les classes d'homotopie de morphismes d'ensembles simpliciaux $\mathfrak{X} \rightarrow \text{Sing}(Y)$ et les classes d'homotopie d'applications continues $|\mathfrak{X}| \rightarrow Y$:

$$[|\mathfrak{X}|, Y] = \text{Hom}_{\text{Top}}(|\mathfrak{X}|, Y) / \sim \cong \text{Hom}_{\Delta\text{Ens}}(\mathfrak{X}, \text{Sing}(Y)) / \sim = [\mathfrak{X}, \text{Sing}(Y)].$$

DÉMONSTRATION.

- (1) Soit $H: \mathfrak{X} \times \Delta^1 \rightarrow \mathfrak{Y}$ une homotopie simpliciale entre deux morphismes $f, g: \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}$ d'ensembles simpliciaux. Comme $|\Delta^1|$ est localement fini, l'homéomorphisme $|\mathfrak{X} \times \Delta^1| \cong |\mathfrak{X}| \times |\Delta^1| \cong |\mathfrak{X}| \times I$ de la proposition 2.6.6 montre que $|H|: |\mathfrak{X}| \times I \rightarrow |\mathfrak{Y}|$ est une homotopie topologique entre les applications continues $|f|, |g|: |\mathfrak{X}| \rightarrow |\mathfrak{Y}|$.
- (2) Tout est dans l'énoncé.

□

L'analogie avec les espaces topologiques peut se poursuivre, mais nous ne rentrerons pas dans les détails ici. Nous citons néanmoins rapidement les notions suivantes.

- ◇ Une *paire d'ensembles simpliciaux* $(\mathfrak{X}, \mathfrak{U})$ est la donnée d'un sous-ensemble simplicial $\mathfrak{U}$ de $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{X}$.
- ◇ Une *paire de complexes de Kan* $(\mathfrak{X}, \mathfrak{U})$ est une paire d'ensembles simpliciaux telle que les deux soient des complexes de Kan. Par exemple, pour tout complexe de Kan $\mathfrak{X}$, la paire est $(\mathfrak{X}, *)$ est une paire de complexes de Kan.
- ◇ Une *homotopie relative* à $\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{X}$ est une homotopie H entre deux morphismes d'ensembles simpliciaux $f, g: \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}$ vérifiant $H(a, t) = f(a) = g(a)$, pour tout $a \in \mathfrak{U}$ et $t \in \Delta^1$. Dans ce cas, on utilise la notation classique $f \sim g \text{ rel } \mathfrak{U}$.

Un *complexe de Kan pointé* est un complexe de Kan $\mathfrak{X}$ muni d'un morphisme d'ensembles simpliciaux $* = \Delta^0 \rightarrow \mathfrak{X}$, ce qui est équivalent à la donnée d'un 0-simplexe $a \in X_0$. (Par un simple abus, on notera $*$ le seul simplexe de dimension n , pour tout $n \in \mathbb{N}$.) On peut définir leurs groupes d'homotopie comme pour les espaces topologiques : on commence par considérer les classes d'homotopie relative

$$\pi_n(\mathfrak{X}, *) := [(\Delta^n, \partial\Delta^n), (\mathfrak{X}, *)] = \{f: \Delta^n \rightarrow \mathfrak{X} \text{ s.t. } f|_{\partial\Delta^n}: \partial\Delta^n \rightarrow *\} / \sim_{\text{rel } \partial\Delta^n}.$$

REMARQUE. La proposition 2.8.9 montre que $\pi_n(X, x) \cong \pi_n(\text{Sing}(X), \text{Sing}(x))$, pour tout espace topologique X et tout $x \in X$.

Afin d'expliciter combinatoirement cette définition, on utilisera la notation suivante, pour tout n -simplexe $x \in X_n$:

$$\partial x := (d_0(x), d_1(x), \dots, d_{n-1}(x), d_n(x)).$$

Lemme 2.8.10. Soit $(\mathfrak{X}, *)$ un complexe de Kan pointé. La donnée d'un morphisme $f: (\Delta^n, \partial\Delta^n) \rightarrow (\mathfrak{X}, *)$ est équivalente à celle d'un n -simplexe $x \in X_n$ vérifiant $\partial x = (*, \dots, *)$. Via cette identification, deux morphismes sont f, g sont homotopes relativement à $\partial\Delta^n$ si et seulement s'il existe un $(n+1)$ -simplexe $w \in X_{n+1}$ reliant les deux n -simplexes x, y correspondant de la manière suivante : $\partial w = (*, \dots, *, y, x)$.

Proof. La première partie est une conséquence directe du lemme de Yoneda 2.5.4. La seconde partie est plus longue. On commence par considérer, pour tout $n \geq 1$ et tout $0 \leq i \leq n$, la relation suivante sur les n -simplexes $x \in X_n$ vérifiant $\partial x = (*, \dots, *)$:

$$x \sim_i y \text{ s'il existe } w \in X_{n+1} \text{ tel que } \partial w = (*, \dots, *, y, x, *, \dots, *) ,$$

où y se trouve à la i^{e} place et x à la $(i+1)^{\text{e}}$ place. On montre qu'il s'agit de relations d'équivalence. La démonstration est similaire à celle donnée à la proposition 2.8.3; les calculs peuvent paraître compliqués, mais il n'en est rien si on fait des dessins en dimension 3.

REFLEXIVITÉ: En utilisant la dégénérescence s_i , on voit que $\partial s_i(x) = (*, \dots, *, x, x, *, \dots, *)$ et donc que $x \sim_i x$.

TRANSITIVITÉ: Soient $x \sim_i y$ et $y \sim_i z$ avec respectivement $v, w \in X_{n+1}$ tels que $\partial v = (*, \dots, *, y, x, *, \dots, *)$ et $\partial w = (*, \dots, *, z, y, *, \dots, *)$. On considère $W := (*, \dots, *, w, -, v, *, \dots, *)$, où w est à la i^{e} place. Le corollaire 2.5.5 montre qu'il s'agit d'un $(i+1)^{\text{e}}$ cornet de dimension $n+1$ de $\mathfrak{X}$. Comme $\mathfrak{X}$ est un complexe de Kan, ce cornet admet un remplissage $Z \in X_{n+2}$, c'est-à-dire $W \subset \partial Z$. On calcule $\partial d_{i+1}(Z) = (*, \dots, *, z, x, *, \dots, *)$ grâce au corollaire 2.5.5. Ceci montre $x \sim_i z$.

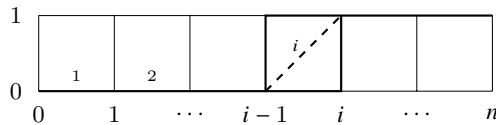
SYMÉTRIE: Soient $x \sim_i y$ avec $w \in X_{n+1}$ tels que $\partial w = (*, \dots, *, y, x, *, \dots, *)$. On considère $W := (*, \dots, *, -, s_i(x), w, *, \dots, *)$, où w est à la $(i+2)^{\text{e}}$ place. Il s'agit d'un i^{e} cornet de dimension $n+1$ de $\mathfrak{X}$, qui admet un remplissage $Z \in X_{n+2}$: $W \subset \partial Z$. On calcule $\partial d_i(Z) = (*, \dots, *, x, y, *, \dots, *)$ qui montre $y \sim_i x$.

On montre maintenant que toutes ces relations d'équivalences sont équivalentes. Soit $0 \leq i \leq n-1$. Dans un sens, donnons nous $x \sim_{i+1} y$ avec $w \in X_{n+1}$ tels que $\partial w = (*, \dots, *, y, x, *, \dots, *)$, où y est à la $(i+1)^{\text{e}}$ position. On considère $W := (*, \dots, *, w, s_{i+1}(y), s_i(y), -, *, \dots, *)$, où w est à la i^{e} place. Il s'agit d'un $(i+3)^{\text{e}}$ cornet de dimension $n+1$ de $\mathfrak{X}$ qui admet un remplissage $Z \in X_{n+2}$. On calcule $\partial d_{i+3}(Z) = (*, \dots, *, x, y, *, \dots, *)$ où x est à la place i^{e} place, ce qui montre $x \sim_i y$, car $\sim_i$ est reflexive. Dans l'autre sens, on se donne $x \sim_i y$ avec $w \in X_{n+1}$ tels que $\partial w = (*, \dots, *, y, x, *, \dots, *)$, où y est à la i^{e} position. On considère $W := (*, \dots, *, -, s_{i+1}(x), s_i(x), w, *, \dots, *)$, où w est à la $(i+3)^{\text{e}}$ place. Il s'agit d'un i^{e} cornet de dimension $n+1$ de $\mathfrak{X}$ qui admet un remplissage $Z \in X_{n+2}$. On calcule $\partial d_i(Z) = (*, \dots, *, x, y, *, \dots, *)$ où x est à la place $(i+1)^{\text{e}}$ place, ce qui montre $x \sim_{i+1} y$.

La démonstration de l'énoncé est maintenant automatique. Soient $f \sim g$ rel $\partial \Delta^n$ et soient $x, y \in X_n$ les deux n -simplexes représentant f et g respectivement. On considère un morphisme $H: \Delta^n \times \Delta^1 \rightarrow \mathfrak{X}$ tel que $H(-, 0) = f$, $H(-, 1) = g$ et $H(\partial \Delta^n, -) = *$. La décomposition prismatique donnée à la section 2.5 donne ici le coégalisateur

$$\coprod_{1 \leq i \leq n} \Delta^n \xrightarrow[\delta_i]{\delta_i} \coprod_{0 \leq j \leq n} \Delta^{n+1} \twoheadrightarrow \Delta^n \times \Delta^1 ,$$

où les deux morphismes de gauche arrivent respectivement dans la i^{e} copie et la $(i-1)^{\text{e}}$ copie.



Le lemme de Yoneda 2.5.4 montre alors que la donnée du morphisme H est équivalente à la donnée de $n+1$ simplexes $z_0, z_1, \dots, z_n \in X_{n+1}$ de dimension $n+1$ vérifiant $\partial z_0 = (y, d_1(z_1), *, \dots, *)$, $\partial z_n = (*, \dots, *, d_n(z_n), x)$ et $\partial z_i = (*, \dots, *, d_i(z_i), d_{i+1}(z_{i+1}), *, \dots, *)$, pour tout $1 \leq i \leq n-1$. Ceci signifie que

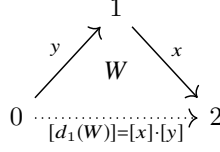
$$x \sim_n d_n(z_n) \sim_{n-1} d_{n-1}(z_{n-1}) \sim_{n-2} \dots \sim_1 d_1(z_1) \sim_0 y .$$

Par ce qui précède, ceci implique $x \sim_n y$ et donc qu'il existe $w \in X_{n+1}$ tel que $\partial w = (*, \dots, *, y, x)$. Dans l'autre sens, soit $x \sim_n y$ avec $w \in X_{n+1}$ tel que $\partial w = (*, \dots, *, y, x)$. On considère les $n+1$ simplexes $s_0(y), s_1(y), \dots, s_{n-1}(y), w$ qui définissent un morphisme $H: \Delta^n \times \Delta^1 \rightarrow \mathfrak{X}$ tel que $H(-, 0) = f$, $H(-, 1) = g$ et $H(\partial \Delta^n, -) = *$. On a donc $f \sim g$ rel $\partial \Delta^n$. $\square$

On note par $[x]$ la classe d'équivalence de $x \in X_n$ vérifiant $\partial x = (*, \dots, *)$ pour la relation d'équivalence du lemme 2.8.10. Soient $x, y \in X_n$ deux n -simplexes de $\mathfrak{X}$ vérifiant $\partial x = \partial y = (*, \dots, *)$. La donnée $w := (*, \dots, *, x, -, y)$ définit un n^{e} cornet de dimension $n+1$ de $\mathfrak{X}$ par le corollaire 2.5.5. Comme $\mathfrak{X}$

est un complexe de Kan, ce cornet se remplit par un $(n+1)$ -simplexe $W \in X_{n+1}$. On voit rapidement que $\partial d_n(W) = (*, \dots, *)$ et on pose alors

$$[x] \cdot [y] := [d_n(W)] .$$



Lemme 2.8.11. *Le produit $\cdot$ est bien défini.*

DÉMONSTRATION. Montrons déjà que la définition ne dépend pas du $(n+1)$ -simplexe $W \in X_{n+1}$. Soit $W' \in X_{n+1}$ un $(n+1)$ -simplexe tel que $\partial W' = (*, \dots, *, x, d_n(W'), y)$. Le cornet $(*, \dots, *, s_n(x), -, W, W')$ admet un remplissage $Z \in X_{n+2}$ dont on peut vérifier que $\partial d_n(Z) = (*, \dots, *, d_n(W), d_n(W'))$. Ceci implique $[d_n(W)] = [d_n(W')]$.

Montrons maintenant que la définition du produit $\cdot$ ne dépend pas du choix de représentant des classes de $[x]$ et de $[y]$. Nous ne traitons explicitement que le cas de $[y]$, celui de $[x]$ étant similaire. Soit $y' \in X_n$ tel que $y \sim y'$, c'est-à-dire qu'il existe $w \in X_{n+1}$ vérifiant $\partial w = (*, \dots, *, y', y)$. Soient $W \in X_{n+1}$ remplissant $(*, \dots, *, x, -, y)$ et $W' \in X_{n+1}$ remplissant $(*, \dots, *, x, -, y')$. On considère le cornet $(*, \dots, *, s_{n-1}(x), W', -, w)$ que l'on remplit avec un $(n+2)$ -simplexe $Z \in X_{n+2}$. Ce dernier vérifie $\partial d_{n+1}(Z) = (*, \dots, *, x, d_n(W'), y)$, ce qui montre que $[x] \cdot [y] = [x] \cdot [y']$. $\square$

Définition 2.8.12 (Groupes d'homotopie d'un complexe de Kan). Pour $n \geq 1$, le n -ième groupe d'homotopie d'un complexe de Kan $\mathfrak{X}$ est défini par

$$(\pi_n(\mathfrak{X}, *), \cdot, [*]) .$$

Théorème 2.8.13. *Soit $(\mathfrak{X}, *)$ un complexe de Kan pointé.*

- (1) *Pour tout $n \geq 1$, le triplet $(\pi_n(\mathfrak{X}, *), \cdot, [*])$ est un groupe.*
- (2) *Pour tout $n \geq 2$, le groupe $(\pi_n(\mathfrak{X}, *), \cdot, [*])$ est abélien.*
- (3) *Les groupes d'homotopie simpliciaux sont des invariants homotopiques.*
- (4) *Pour tout $n \geq 0$, il existe une isomorphisme (bijection pour $n = 0$) naturel*

$$(\pi_n(\mathfrak{X}, *), \cdot, [*]) \cong (\pi_n(|\mathfrak{X}|, |*|), \cdot, [\text{cst}]) .$$

Proof.

- (1) UNITÉ: Pour tout $x \in X_n$ vérifiant $\partial x = (*, \dots, *)$, on a $\partial s_n(x) = (*, \dots, *, x, x)$ et $\partial s_{n-1}(x) = (*, \dots, *, x, *)$, ce qui montre respectivement que $[*] \cdot [x] = [x]$ et $[x] \cdot [*] = [x]$.

INVERSE: Pour tout $x \in X_n$ vérifiant $\partial x = (*, \dots, *)$, on considère le $(n+1)$ ^e cornet défini par $(*, \dots, *, x, *, -)$ qui se remplit avec un $(n+1)$ -simplexe $W \in X_{n+1}$. Ceci montre que $[x] \cdot [d_{n+1}(W)] = [*]$. De la même manière, la $(n-1)$ ^e cornet défini par $(*, \dots, *, -, *, x)$ se remplit avec un $(n+1)$ -simplexe $Z \in X_{n+1}$. Ceci montre que $[d_{n-1}(Z)] \cdot [x] = [*]$ et conclut la démonstration de l'existence d'un inverse.

ASSOCIATIVITÉ: Soient $x, y, z \in X_n$ vérifiant $\partial x = \partial y = \partial z = (*, \dots, *)$. On considère un $(n+1)$ -simplexe $W_{n-1} \in X_{n+1}$ remplissant le cornet $(*, \dots, *, x, -, y)$, un $(n+1)$ -simplexe $W_{n+2} \in X_{n+1}$ remplissant le cornet $(*, \dots, *, y, -, z)$ et un $(n+1)$ -simplexe $W_{n+1} \in X_{n+1}$ remplissant le cornet $(*, \dots, *, d_n(W_{n-1}), -, z)$. Il existe un $(n+2)$ -simplexe $Z \in X_{n+2}$ qui remplit le cornet $(*, \dots, *, W_{n-1}, -, W_{n+1}, W_{n+2})$. Le calcul $\partial d_n(Z) = (*, \dots, *, x, d_n(W_{n+1}), d_n(W_{n+2}))$ montre que $[x] \cdot ([y] \cdot [z]) = ([x] \cdot [y]) \cdot [z]$.

- (2) Ce point peut être montré de manière purement combinatoire, comme tous les résultats précédents. Néanmoins la longueur de la démonstration nous incite à renvoyer le-la lectrice à [May92, Proposition 4.4]. D'autant plus qu'une autre démonstration est donnée avec le point (4) et le théorème 1.3.7.
- (3) Il est automatique de voir à partir des définitions que les groupes d'homotopie simpliciaux définissent des foncteurs depuis la sous-catégorie des complexes de Kan vers la catégorie des groupes (abéliens) qui envoient les équivalences d'homotopie sur les isomorphismes.
- (4) On renvoie à [May92, Section 16] pour la démonstration de cette propriété.

$\square$

Définition 2.8.14 (Fibration de Kan). Un morphisme d'ensembles simpliciaux $p: \mathfrak{E} \rightarrow \mathfrak{B}$ est une fibration de Kan s'il vérifie la propriété d'extension suivante

$$\begin{array}{ccc} \Delta_k^n & \longrightarrow & \mathfrak{E} \\ \downarrow & \searrow \exists & \downarrow p \\ \Delta^n & \longrightarrow & \mathfrak{B} \end{array}$$

On note les fibrations de Kan avec des doubles flèches. L'ensemble simplicial $\mathfrak{E}$ est appelé *espace (ou complexe) total* et l'ensemble simplicial $\mathfrak{B}$ est appelé *l'espace (ou complexe) de base*. La donnée complète $p: \mathfrak{E} \rightarrow \mathfrak{B}$ est appelée aussi *espace fibré*.

EXEMPLE. Un ensemble simplicial $\mathfrak{X}$ est un complexe de Kan si et seulement si l'application terminale $\mathfrak{X} \rightarrow *$ est une fibration de Kan.

Pour tout 0-simplexe b de $\mathfrak{B}$, on considère le sous-ensemble simplicial qu'il engendre que l'on note encore par b ainsi que tous ses simplexes (même si formellement ces dernières sous les images de b par les dégénérescences itérées). On considère l'ensemble simplicial $\mathfrak{F} := p^{-1}(b)$ défini par $F_n := p_n^{-1}(b)$ que l'on appelle *la fibre de p au point b* .

Lemme 2.8.15. *Pour toute fibration de Kan $p: \mathfrak{E} \rightarrow \mathfrak{B}$ et pour tout point $b \in \mathfrak{B}$, la fibre $\mathfrak{F}$ au point b est un complexe de Kan.*

DÉMONSTRATION. La démonstration est automatique en utilisant la caractérisation combinatoire des complexes de Kan donnée au lemme 2.7.7. $\square$

A toute fin utile, on peut caractériser combinatoirement les fibrations de Kan de la manière suivante.

Lemme 2.8.16. *Un morphisme d'ensembles simpliciaux $p: \mathfrak{E} \rightarrow \mathfrak{B}$ est une fibration de Kan si et seulement si pour tout $n \geq 2$ et $0 \leq k \leq n$, toute collection de n simplexes $x_0, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n \in E_{n-1}$ vérifiant $d_i^{\mathfrak{E}}(x_j) = d_{j-1}^{\mathfrak{E}}(x_i)$, pour $i < j$ différents de k , et tout n -simplexe $y \in B_n$ tel que $d_i^{\mathfrak{B}}(y) = p(x_i)$, il existe $x \in E_n$ tel que $p(x) = b$ et $d_i^{\mathfrak{E}}(x) = x_i$, pour $0 \leq i \leq n$ différent de k .*

DÉMONSTRATION. La démonstration est automatique à partir du lemme 2.7.7 et du lemme de Yoneda 2.5.4. $\square$

EXERCICE. En guise de bon exercice, on peut montrer les deux propriétés suivantes. Soit $p: \mathfrak{E} \rightarrow \mathfrak{B}$ une fibration de Kan.

- ◇ Si $\mathfrak{E}$ est un complexe de Kan et p surjective en tout degré, alors $\mathfrak{B}$ est un complexe de Kan.
- ◇ Si $\mathfrak{B}$ est un complexe de Kan alors $\mathfrak{E}$ est un complexe de Kan.

Pour tout 0-simplexe f de la fibre $\mathfrak{F}$, on considère la composée

$$(\mathfrak{F}, f) \xrightarrow{i} (\mathfrak{E}, f) \xrightarrow{p} (\mathfrak{B}, b)$$

d'ensembles simpliciaux pointés.

Théorème 2.8.17. *Toute fibration de Kan*

$$(\mathfrak{F}, f) \xrightarrow{i} (\mathfrak{E}, f) \xrightarrow{p} (\mathfrak{B}, b)$$

faites de complexes de Kan $\mathfrak{F}, \mathfrak{E}, \mathfrak{B}$ induit une longue suite exacte

$$\dots \longrightarrow \pi_2(\mathfrak{B}, b) \longrightarrow \pi_1(\mathfrak{F}, f) \longrightarrow \pi_1(\mathfrak{E}, f) \longrightarrow \pi_1(\mathfrak{B}, b) \longrightarrow \pi_0(\mathfrak{F}) \longrightarrow \pi_0(\mathfrak{E}) \longrightarrow \pi_0(\mathfrak{B}) \longrightarrow \{*\}.$$

DÉMONSTRATION. On peut donner une démonstration *ad hoc* dont le degré de difficulté est du même acabit que les précédentes. On renvoie à [May92, Theorem 7.6] pour les détails. $\square$

REMARQUE. Il est facile de voir que $\text{Sing}(f) := \text{Sing}(X) \rightarrow \text{Sing}(Y)$ est une fibration de Kan si et seulement si $f := X \rightarrow Y$ est une fibration de Serre. La «réciproque» affirmant que $|p|: |\mathfrak{E}| \rightarrow |\mathfrak{B}|$ est une fibration de Serre dès lors que $p: \mathfrak{E} \rightarrow \mathfrak{B}$ est une fibration de Kan est aussi vraie, mais la démonstration est plus ardue, voir l'article éponyme [Qui68]. Avec cela, on obtient une autre démonstration du résultat ci-dessus à partir de sa version topologique donnée au théorème 1.6.3, en utilisant l'isomorphisme avec les groupes d'homotopie des réalisations géométriques associées (Théorème 2.8.13).

Définition 2.8.18 (Cofibration et équivalence faible). Un morphisme $f: \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}$ d'ensembles simpliciaux est

- ◊ une *cofibration* si toutes les applications $f_n: X_n \hookrightarrow Y_n$ sont injectives, pour $n \in \mathbb{N}$,
- ◊ une *équivalence faible* si tous les morphismes $\pi_n(|f|): \pi_n(|\mathfrak{X}|, x) \cong \pi_n(|\mathfrak{Y}|, |f|(x))$ sont des isomorphismes, pour $n \geq 1$ et $x \in |\mathfrak{X}|$, et une bijection pour $n = 0$.

Le résultat suivant relie directement les deux parties de ce cours.

Théorème 2.8.19 ([Qui67]). *L'adjonction réalisation géométrique-foncteur singulier induit l'équivalence suivante de catégories*

$$\mathrm{Top}[\mathrm{eq}\text{-}\mathrm{faible}^{-1}] \simeq \mathrm{CW}\text{-}\mathrm{cx}/ \sim \simeq \mathrm{Kan}\text{-}\mathrm{cx}/ \sim \simeq \Delta\mathrm{Ens}[\mathrm{eq}\text{-}\mathrm{faible}^{-1}],$$

où les deux catégories du milieu sont respectivement celle des CW-complexes et des complexes de Kan avec morphismes modulo la relation d'équivalence d'homotopie.

La beauté de ce théorème tient en au moins deux points : il établit une équivalence entre les théories homotopiques des espaces topologiques et des ensembles simpliciaux et il donne une forme simple de catégories localisées (les deux extrêmes). Sa démonstration est trop élaborée pour être donnée ici; elle fera l'objet du cours suivant de Grégory Ginot.

Le but de cet appendice est de rappeler des résultats un peu plus avancés de la théorie des catégories, qui sont souvent mal connus mais dont nous nous servons à travers ce livre. On commence par la notion de préfaisceau en se focalisant sur le plongement de Yoneda qui permet de voir toute catégorie localement petite comme une sous-catégorie pleine de sa catégorie de préfaisceaux. Ce résultat ne nécessite pas d'idée nouvelle, il suffit juste de connaître les définitions de base pour le démontrer. On traite ensuite des extensions de Kan, qui sont les objets les plus fondamentaux de la théorie des catégories : Saunders MacLane a d'ailleurs intitulé une des sections de son livre [ML98] : “All concepts are Kan extensions”. En effet, (presque) toutes les notions de la théorie des catégories (adjonction, limites, colimites, etc.) s'expriment en ces termes. Néanmoins la notion d'extensions de Kan est très abordable et naturelle, quand elle est prise par le bon bout.

A.1. Préfaisceaux.

Definition A.1.1 (Préfaisceau). Un *préfaisceau* sur la catégorie C est un foncteur contravariant de C vers la catégorie des ensembles : $C^{\text{op}} \rightarrow \text{Ens}$. La catégorie des préfaisceaux sur C est une catégorie de foncteurs : elle admet pour morphismes les transformations naturelles. On la note $\text{Fon}(C^{\text{op}}, \text{Ens})$.

EXEMPLE. Soit C une catégorie *localement petite*, c'est-à-dire que chaque classe de morphismes $\text{Hom}_C(b, a)$ est un ensemble, pour a, b dans C . À tout objet a de C , on associe le foncteur représentable suivant

$$\begin{aligned} Y_a &: C^{\text{op}} \rightarrow \text{Ens} \\ b &\mapsto \text{Hom}_C(b, a) \end{aligned}$$

qui est un préfaisceau sur C .

Definition A.1.2 (Plongement de Yoneda). On appelle *plongement de Yoneda* le foncteur

$$\begin{aligned} Y &: C \rightarrow \text{Fon}(C^{\text{op}}, \text{Ens}) \\ a &\mapsto Y_a. \end{aligned}$$

Le fait que le plongement de Yoneda soit un foncteur signifie en particulier que tout morphisme $f : a \rightarrow a'$ dans la catégorie C induit une transformation naturelle $f_* : Y_a \Rightarrow Y_{a'}$, obtenue en composant par f . Le théorème suivant montre notamment qu'il n'y en a pas d'autres.

Theorem A.1.3 (Lemme de Yoneda). *Soit C une catégorie localement petite. Il existe une bijection*

$$\text{Nat}(Y_a, X) \cong X(a)$$

naturelle en a dans C et en X dans $\text{Fon}(C^{\text{op}}, \text{Ens})$.

DÉMONSTRATION. Considérons une transformation naturelle $\psi : Y_a \Rightarrow X$. Appliquée en a , elle donne une application ensembliste $\psi_a : \text{Hom}_C(a, a) \rightarrow X(a)$ qui envoie l'identité id_a sur un élément x_ψ de $X(a)$. Cet élément caractérise complètement la transformation naturelle ψ :

$$\psi_b(g) = X(g)(x_\psi),$$

pour tout $g \in \text{Hom}_C(b, a)$. Il reste à montrer que cette bijection est naturelle, ce qui est automatique et donc laissé au lecteur-trice. $\square$

Si on applique ce résultat au préfaisceau $Y_{a'}$, la bijection $\text{Nat}(Y_a, Y_{a'}) \cong Y_{a'}(a) = \text{Hom}_C(a, a')$, décrite dans cette démonstration, associe $f^* \mapsto f$, pour tout morphisme $f : a \rightarrow a'$ dans C . Ceci montre que les seules transformations naturelles entre foncteurs représentables sont celles issues de morphismes de la catégorie C par tirage en arrière. En d'autres termes, cela donne le résultat suivant.

Corollary A.1.4. *Le plongement de Yoneda est plein et fidèle.*

DÉMONSTRATION. Cela signifie que l'application

$$\begin{aligned} \text{Hom}_C(a, a') &\rightarrow \text{Nat}(Y_a, Y_{a'}) \\ f &\mapsto f^* \end{aligned}$$

est bijective, ce qui est une conséquence directe du lemme de Yoneda (Théorème A.1.3) par les arguments donnés ci-dessus. $\square$

REMARQUE. Ce corollaire nous dit que deux préfaisceaux représentables Y_a et $Y_{a'}$ sont isomorphes si et seulement si a et a' sont isomorphes dans la catégorie C .

Ce résultat est une forme de mise an abîme : tout catégorie localement petite est une sous-catégorie pleine de sa catégorie de préfaisceaux. Plus précisément, elle est identifiée avec la sous-catégorie des préfaisceaux représentables.

Proposition A.1.5. *Pour toute catégorie C , sa catégorie des préfaisceaux $\text{Fon}(C^{\text{op}}, \text{Ens})$ est complète et cocomplète.*

DÉMONSTRATION. Les limites et colimites dans la catégorie des préfaisceaux sont données point-par-point par celles de la catégorie des ensembles. Soit $F : D \rightarrow \text{Fon}(C^{\text{op}}, \text{Ens})$ un foncteur; on note

$$\begin{aligned} F_c & : D \rightarrow \text{Ens} \\ d & \mapsto F(d)(c) \end{aligned}$$

le foncteur associé pour tout c dans C . La limite et la colimite du foncteur F sont données par

$$\left(\lim_D F \right)(c) = \lim_D F_c \quad \text{et} \quad \left(\text{colim}_D F \right)(c) = \text{colim}_D F_c .$$

□

Le plongement de Yoneda permet donc de voir une catégorie localement petite dans une catégorie complète et cocomplète. La catégorie des préfaisceaux satisfait même la propriété universelle pour cette dernière propriété : pour tout foncteur $F : C \rightarrow D$ vers une catégorie cocomplète, il existe un foncteur G *cocontinu*, c'est-à-dire qui préserve les colimites, unique à unique isomorphisme qui factorise F par Y :

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{Y} & \text{Fon}(C^{\text{op}}, \text{Ens}) \\ & \searrow F & \downarrow \exists! G \\ & & D \end{array}$$

On peut alors parler de “complétion cocomplète” de la catégorie initiale.

EXERCISE. Avec le lemme de Yoneda, montrer le théorème de Cayley : tout groupe fini est un sous-groupe d'un groupe de permutations.

L'omniprésence des préfaisceaux représentables dans la catégorie des préfaisceaux est encore plus forte que cela. Le résultat suivant montre qu'ils forment une sous-catégorie *dense*, c'est-à-dire que tout préfaisceau peut s'écrire canoniquement comme une colimite de préfaisceaux représentables. Tout l'enjeu est alors de trouver la catégorie qui indice cette colimite.

Soit $X \in \text{Fon}(C^{\text{op}}, \text{Ens})$ un préfaisceau. On cherche donc une catégorie E munie d'un foncteur $\Pi : E \rightarrow C$ telle que la colimite de $Y \circ \Pi$ sur E donne le foncteur X . Comme le foncteur colimite est adjoint à gauche du foncteur constant Δ , qui à tout préfaisceau Z associe le foncteur $\Delta_Z : e \in E \mapsto Z \in \text{Fon}(C^{\text{op}}, \text{Ens})$, on doit avoir une bijection naturelle

$$\text{Nat}(X, Z) \cong \text{Nat}(Y \circ \Pi, \Delta_Z) .$$

Une transformation naturelle $\alpha : X \Rightarrow Z$ est équivalente à la donnée d'un élément $z_{(c,x)} \in Z(c)$ pour tout $c \in C$ et tout $x \in X(c)$ vérifiant $Z(f^{\text{op}})(z_{(d,y)}) = z_{(c,x)}$ pour tout morphisme $f : c \rightarrow d$ de C et tout $y \in X(d)$ tel que $X(f^{\text{op}})(y) = x$. On est donc amené à considérer cette catégorie d'indices issue du préfaisceau X .

Definition A.1.6 (Catégorie des éléments d'un préfaisceau). La *catégorie des éléments d'un préfaisceau* X admet pour objets les paires (c, x) , avec $c \in C$ et $x \in X(c)$, et pour morphismes entre (c, x) et (d, y) les morphismes $f : c \rightarrow d$ de la catégorie C qui vérifient $X(f^{\text{op}})(y) = x$. On la note $E(X)$.

La catégorie des éléments d'un préfaisceau X est munie d'un foncteur oubli canonique

$$\Pi : E(X) \rightarrow C, \quad (c, x) \mapsto c .$$

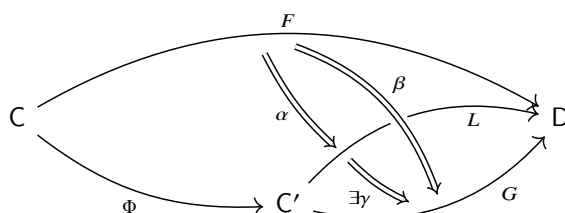
Theorem A.1.7 (Théorème de densité). *Tout préfaisceau $X \in \text{Fon}(C^{\text{op}}, \text{Ens})$ sur une catégorie C localement petite est la colimite de la composée du foncteur oubli avec le plongement de Yoneda sur la catégorie de ses éléments :*

$$X \cong \text{colim}_{E(X)} Y \circ \Pi .$$

A.2. Extensions de Kan. L'idée à la base de la notion d'extensions de Kan est celle d'extension des foncteurs. On sait que toute application ensembliste peut s'étendre à un domaine plus gros, mais de façon non-canonique. Dans le contexte des catégories, la situation est différente : les extensions de Kan montrent que l'on peut étendre les foncteurs à un autre domaine de façon canonique et optimale. Dans cette section, nous ne traiterons en détail que la notion d'extension de Kan à gauche, la notion duale à droite étant l'exacte opposée. Dans le corps de ce texte, nous n'utilisons que les extensions de Kan à gauche et la théorie des extensions de Kan à droite s'obtient automatiquement en changeant le sens des transformations naturelles, en considérant des limites à la place des colimites pour des limites, etc.

$$\Phi^* : \text{Fon}(C', D) \rightarrow \text{Fon}(C, D) .$$

Proposition A.2.1. *Le foncteur Φ^* admet un adjoint à gauche si et seulement si, pour tout foncteur $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$, il existe un foncteur $L : \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{D}$ et une transformation naturelle $\alpha : F \Rightarrow L \circ \Phi$ telle que, pour tout foncteur $G : \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{D}$ équipé aussi d'une transformation naturelle $\beta : F \Rightarrow G \circ \Phi$, il existe une unique transformation naturelle $\gamma : L \Rightarrow G$ factorisant β , c'est-à-dire $\beta = (\gamma \Phi) \circ \alpha$.*



DÉMONSTRATION. Ce résultat est l'application à un cas particulier d'un théorème général sur les adjonctions. Il se démontre néanmoins sans surprise de la manière suivante. Pour montrer que la condition est nécessaire, on se donne un adjoint à gauche $\mathcal{L} : \text{Fon}(C, D) \rightarrow \text{Fon}(C', D)$ et on pose

$$\chi_{F \circ G} : \text{Nat}(\mathcal{L}(F), G) \cong \text{Nat}(F, G \circ \Phi)$$

$$\alpha := \chi_{F, \mathcal{L}(F)}(\mathbb{1}_{\mathcal{L}(F)}) : F \Rightarrow \mathcal{L}(F) \circ \Phi,$$
$$(*) \quad \chi_{F.G}(\gamma) = (\Phi\gamma) \circ \alpha,$$

La condition de l'énoncé est suffisante. Posons $\mathcal{L}(F) := L$, pour tout foncteur $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$. Soit $\varphi : F \Rightarrow F'$ une transformation naturelle. La propriété universelle vérifiée par α implique qu'il existe une unique transformation naturelle $\mathcal{L}(\varphi) : \mathcal{L}(F) \Rightarrow \mathcal{L}(F')$ telle que $(\mathcal{L}(\varphi)\Phi) \circ \alpha = \alpha' \circ \varphi$. Cette propriété universelle montre à nouveau que $\mathcal{L}$ définit bien un foncteur. On définit alors l'application $\chi_{F,G}$ par la formule (*). Elle est naturelle par la condition définissant $\mathcal{L}(\varphi)$ et elle est bijective par la propriété universelle vérifiée par les α . $\square$

Comme tout objet de la théorie des catégories, une paire (L, α) vérifiant la propriété universelle énoncée dans la proposition précédente est unique à isomorphisme près; elle a donc le droit à un petit nom.

Définition A.2.2 (Extensions de Kan). On appelle *extension de Kan à gauche du foncteur F le long du foncteur Φ* la paire (L, α) vérifiant la propriété universelle de la proposition A.2.1. On la note $(\text{Lan}_\Phi F, \alpha)$. La paire vérifiant la condition duale est appelée *extension de Kan à droite du foncteur F le long du foncteur Φ* et notée $(\text{Ran}_\Phi F, \alpha)$.

Les extensions de Kan ne factorisent en général pas le foncteur initial F (chose impossible à moins que d'avoir une sous-catégorie par exemple), mais leur composée avec le foncteur Φ fournit est la meilleure approximation de F . Les notions d'extensions de Kan sont omniprésentes en théorie des catégories, elles supplantent par exemple celles de (co)limite et d'adjonction.

EXEMPLE. Soit $C' = 1$ la catégorie terminale à un seul objet $*$ (et un seul morphisme) et soit $\Pi : C \rightarrow 1$ l'unique foncteur de la catégorie C vers cette dernière. Dans ce cas, l'extension de Kan à gauche d'un foncteur $F : C \rightarrow D$ est équivalente à sa colimite

$$\text{Lan}_\Pi(F)(*) = \text{colim}_C F$$

et son extension de Kan à droite est équivalente à sa limite

$$\text{Ran}_\Pi(F)(*) = \lim_C F.$$

EXERCISE.

- (1) Montrer qu'un foncteur $F : A \rightarrow B$ admet un adjoint à droite si et seulement si le foncteur $1_A : A \rightarrow A$ admet une extension de Kan à gauche $(\text{Lan}_F 1_A, \alpha)$ le long de F vérifiant la propriété que $(F \circ \text{Lan}_F 1_A, F\alpha)$ est une extension de Kan à gauche de F le long de lui-même.
- (2) Lorsque c'est le cas, Montrer que l'extension de Kan à gauche $\text{Lan}_F 1_A$ est l'adjoint à droite de F ,

$$F \dashv \text{Lan}_F 1_A$$

et que l'unité d'adjonction est donnée par $F\alpha$.

- (3) Écrire le résultat dual pour l'existence d'adjoints à gauche en terme d'extensions de Kan à droite.

Pour une nouvelle mise en abîme, rappelons que les notions d'extensions de Kan résolvent un problème d'existence d'adjonction : la proposition A.2.1 affirme que le foncteur Φ^* admet un adjoint à gauche (respectivement à droite) si et seulement si tout foncteur $F : C \rightarrow D$ admet une extension de Kan à gauche (respectivement à droite). Dans ce cas de figure, on a

$$\text{Lan}_\Phi \dashv \Phi^* \dashv \text{Ran}_\Phi.$$

Il reste donc à montrer que les extensions de Kan existent. Analysons le cas où le foncteur $\Phi : C \hookrightarrow C'$ est une inclusion d'une sous-catégorie pleine. Supposons que l'on dispose d'une extension $L : C' \rightarrow D$ de F , c'est-à-dire $F = L \circ \Phi$, le long d'un foncteur

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{F} & D \\ & \searrow \Phi & \nearrow L \\ & C' & \end{array}$$

Soit x un objet de C' et cherchons à caractériser l'image de x par le foncteur L . Pour toute paire $(a, f : a \rightarrow x)$ avec a un objet de C et f un morphisme de C' , on dispose d'un morphisme $L(f) : L(a) = F(a) \rightarrow L(x)$ de la catégorie D . Tout triangle commutatif

$$\begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{h} & b \\ & \searrow f & \nearrow g \\ & x & \end{array},$$

où h est un morphisme de C , induit un triangle commutatif

$$\begin{array}{ccc} F(a) & \xrightarrow{F(h)} & F(b) \\ & \searrow L(f) & \nearrow L(g) \\ & L(x) & \end{array}.$$

Il est alors naturel d'introduire la catégorie $C \downarrow x$ dont les objets sont les paires $(a, f : a \rightarrow x)$ comme ci-dessus et dont les morphismes sont ceux de C qui forment un triangle commutatif. On pose $\Pi : C \downarrow x \rightarrow C, (a, f) \mapsto a$ le foncteur de projection. En ces termes, l'image $L(x)$ est un cocône pour le foncteur $F \circ \Pi$ sur la catégorie $C \downarrow x$.

Dans le cas général, on considère la catégorie suivante pour tout objet x de C' .

Définition A.2.3 (Catégorie $\Phi \downarrow x$). Les objets de la catégorie $\Phi \downarrow x$ sont les paires $(a, f : \Phi(a) \rightarrow x)$, où a un objet de C et f un morphisme de C' . Les morphismes de $(a, f : \Phi(a) \rightarrow x)$ vers $(b, g : \Phi(b) \rightarrow x)$ sont les morphismes $h : a \rightarrow b$ de la catégorie C vérifiant $f = g \circ \Phi(h)$.

EXERCISE. Écrire la catégorie des éléments d'un préfaisceau X (Définition A.1.6) comme une catégorie $x \downarrow X$ définie de manière similaire mais par des objets de la forme $(a, f : x \rightarrow X(a))$.

On considère la composée $F \circ \Pi : \Phi \downarrow x \rightarrow D$ du foncteur F avec la projection canonique $\Pi : \Phi \downarrow x \rightarrow C$. Les études faites ci-dessus des colimites comme extensions de Kan à gauche le long du foncteur $C \rightarrow 1$ et des extensions de foncteurs suggèrent que la colimite du foncteur $F \circ \Pi$, cocône initial, doit être intimement reliée à l'image de l'extension de Kan de l'objet x . Le théorème suivant va nous donner raison.

Théorème A.2.4. Soient $\Phi : C \rightarrow C'$ et $F : C \rightarrow D$ deux foncteurs tels que, pour tout objet x de la catégorie C' , le foncteur $F \circ \Pi : \Phi \downarrow x \rightarrow D$ admet une colimite dans la catégorie D . Dans ce cas, l'extension de Kan à gauche du foncteur F le long du foncteur Φ existe et elle est donnée ponctuellement par cette colimite:

$$(\text{Lan}_\Phi F)(x) = \text{colim}_{\Phi \downarrow x} F \circ \Pi .$$

DÉMONSTRATION. Les arguments sont automatiques une fois que l'on a bien compris la construction ci-dessus. Pour plus de précision, nous noterons ici le foncteur de projection par $\Pi_x : \Phi \downarrow x \rightarrow C$. Posons

$$L(x) := \text{colim}_{\Phi \downarrow x} F \circ \Pi ,$$

pour tout objet x de la catégorie C' .

Montrons d'abord que L définit bien un foncteur $L : C' \rightarrow D$. Soit $k : x \rightarrow y$ un morphisme de la catégorie C' . Il induit un foncteur $k_* : \Phi \downarrow x \rightarrow \Phi \downarrow y, (a, f) \mapsto (a, k \circ f)$ qui vérifie $F \circ \Pi_y = F \circ \Pi_x \circ k_*$. Ceci montre que $L(y)$ est un cocône pour le foncteur $F \circ \Pi_x$ sur la catégorie $\Phi \downarrow x$. Comme $L(x)$ est la colimite de ce foncteur, on définit $L(k) : L(x) \rightarrow L(y)$ par sa propriété universelle. En utilisant les mêmes arguments, on voit facilement que toute paire de morphismes $k : x \rightarrow y$ et $l : y \rightarrow z$ de C' vérifient $L(l \circ k) = L(l) \circ L(k)$.

Définissons maintenant une transformation naturelle $\alpha : F \Rightarrow L \circ \Phi$. Soit c un objet de la catégorie C ; on note λ_f les morphismes de structures du cocône $L(\Phi(c))$:

$$\begin{array}{ccc} F \circ \Pi_{\Phi(c)}(a, f) = F(a) & \xrightarrow{F(h)} & F(b) = F \circ \Pi_{\Phi(c)}(b, g) \\ & \searrow \lambda_f & \swarrow \lambda_g \\ & L(\Phi(c)) & \end{array}$$

On pose alors

$$\alpha(c) := \lambda_{\text{id}} : F(c) = F \circ \Pi_{\Phi(c)}(a, \text{id} : \Phi(c) \rightarrow \Phi(c)) \rightarrow L(\Phi(c)) .$$

Pour montrer que cela définit bien une transformation naturelle, on considère le diagramme suivant associé à tout morphisme $i : c \rightarrow d$ de la catégorie C :

$$\begin{array}{ccc} F(c) & \xrightarrow{F(i)} & F(d) \\ \alpha(c)=\lambda_{\text{id}} \downarrow & \searrow \mu_{\Phi(i)} & \downarrow \alpha(d)=\mu_{\text{id}} \\ L(\Phi(c)) & \xrightarrow{L(\Phi(i))} & L(\Phi(d)) \end{array}$$

qui est commutatif : le triangle supérieur droit est commutatif par la définition de $L(\Phi(d))$ comme un cocône et le triangle inférieur gauche est commutatif par la définition de $L(\Phi(i))$.

Il reste à montrer que la transformation naturelle α est universelle. Soit $G : C' \rightarrow D$ un foncteur muni d'une transformation naturelle $\beta : F \Rightarrow G \circ \Phi$. Soit x un objet de la catégorie C' . Pour tout

morphisme h d'un objet $(a, f : \Phi(a) \rightarrow x)$ vers un objet $(b, g : \Phi(b) \rightarrow x)$ de la catégorie $\Phi \downarrow x$, c'est-à-dire $h : a \rightarrow b$ morphisme de C vérifiant $f = g \circ \Phi(h)$, le digramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 F(a) = F \circ \Pi_x(a, f) & \xrightarrow{F(h)} & F \circ \Pi_x(b, g) = F(b) \\
 \downarrow \beta(a) & & \downarrow \beta(b) \\
 G(\Phi(a)) & \xrightarrow{G(\Phi(h))} & G(\Phi(b)) \\
 \searrow G(f) & & \swarrow G(g) \\
 & G(x) &
 \end{array}
 .$$

Le carré du haut l'est par définition de la transformation naturelle β et le triangle du bas l'est par définition de h et du foncteur G . Ceci montre que $G(x)$ est un cocône pour le foncteur $F \circ \Pi_x$ sur la catégorie $\Phi \downarrow x$; comme $L(x)$ est la colimite de ce foncteur, on définit $\gamma(x) : L(x) \rightarrow G(x)$ par sa propriété universelle.

Montrons maintenant que γ est une transformation naturelle. Soit $k : x \rightarrow y$ un morphisme de la catégorie C' . Pour tout objet $(a, f : \Phi(a) \rightarrow x)$ de la catégorie $\Phi \downarrow x$, on considère le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \mu_{k,f} & & \\
 & \swarrow & & \searrow & \\
 F \circ \Pi_y(a, kf) = F(a) = F \circ \Pi_x(a, f) & \xrightarrow{\lambda_f} & L(x) & \xrightarrow{L(k)} & L(y) \\
 \downarrow \beta(a) & & \downarrow \gamma(x) & & \downarrow \gamma(y) \\
 G(\Phi(a)) & \xrightarrow{G(f)} & G(x) & \xrightarrow{G(k)} & G(y) , \\
 & \searrow & & \swarrow & \\
 & G(kf) & & &
 \end{array}$$

où λ et μ dénotent respectivement les morphismes de structure des cocônes $L(x)$ et $L(y)$. Le carré de gauche est commutatif par définition de $\gamma(x)$, le triangle du haut est commutatif par définition de $L(k)$, celui du bas l'est par définition du foncteur G , enfin le carré extérieur est commutatif par définition de $L(y)$. Le carré de droite est donc toujours commutatif une fois précomposé par λ_f , et ce pour tout objet (a, f) de la catégorie $\Phi \downarrow x$. Par définition de $L(x)$ comme colimite, on obtient que ce carré est en fait commutatif.

Enfin, on montre l'universalité de la transformation naturelle γ . Par définition de α et de γ , on a $\beta(a) = \gamma(\Phi(a)) \circ \alpha(a)$. Il reste à établir l'unicité de la transformation naturelle γ . Soit donc $\gamma' : L \Rightarrow G$ une transformation naturelle vérifiant $\beta = (\gamma' \circ \Phi) \circ \alpha$. Pour les autres éléments y de C' , on applique le diagramme ci-dessus à $x = \Phi(a)$, $f = \text{id}_{\Phi(a)}$ et $k : \Phi(a) \rightarrow y$ morphisme de C' . On obtient alors $\gamma'(y) \circ \mu_k = \gamma(y) \circ \mu_k$, ce qui implique $\gamma'(y) = \gamma(y)$ par la propriété de colimite de $L(y)$. $\square$

Corollary A.2.5. *Sous les hypothèses d'existence données au théorème A.2.4 et dans le cas où le foncteur Φ est plein et fidèle, il existe une extension de Kan à gauche du foncteur F qui en soit une extension :*

$$F = (\text{Lan}_{\Phi} F) \circ \Phi \quad \text{et} \quad \alpha = \text{id} .$$

DÉMONSTRATION. Lorsque le foncteur Φ est plein et fidèle, la catégorie $\Phi \downarrow \Phi(c)$ est isomorphe à la catégorie $C \downarrow c$ des objets au-dessus de c . Cette dernière admet pour objet terminal (c, id_c) et donc la colimite $L(\Phi(c))$ est donnée simplement par $F(c)$. $\square$

C'est par exemple le cas lorsque C est une sous-catégorie pleine de C' .

Plutôt que d'exiger l'existence point-par-point de certaines colimites, les conditions générales suivantes assurent l'existence d'extensions de Kan.

Corollary A.2.6. *Si la catégorie C est petite, la catégorie C' localement petite et la catégorie D cocomplète, alors tout foncteur $F : C \rightarrow D$ admet une extension de Kan le long de tout foncteur $\Phi : C \rightarrow C'$.*

DÉMONSTRATION. On rappelle à toutes fins utiles qu'une catégorie est petite lorsque ses objets forment un ensemble et que tous ses classes de morphismes forment un ensemble. Une catégorie est cocomplète lorsque tout foncteur depuis une petite catégorie vers cette dernière admet une colimite. Lorsque la catégorie C est petite et la catégorie C' localement petite, alors toute catégorie $\Phi \downarrow x$ est petite, pour x de C' . Et comme la catégorie D est cocomplète, la colimite du foncteur $F \circ \Pi$ existe. On peut alors appliquer le théorème A.2.4. $\square$

Les conditions d'existence de ce corollaire ne sont pas très restrictives; elles sont toujours vérifiées dans les exemples qui forment le corps de ce texte. Dans ce qui suit, on les suppose vérifiées. Par contre, la colimite donnée au théorème A.2.4 peut être difficile à calculer. Néanmoins, on peut calculer plus efficacement l'extension de Kan à gauche à l'aide d'un autre type de colimite.

Soient a, b deux objets de la catégorie C et soit x un objet de la catégorie C' . On considère l'ensemble $\text{Hom}_{C'}(\Phi(b), x)$ puis le coproduit de l'objet constant $F(a)$ indicé par ce dernier; on le note traditionnellement comme un *tenseur* :

$$\text{Hom}_{C'}(\Phi(b), x) \cdot F(a) := \coprod_{\text{Hom}_{C'}(\Phi(b), x)} F(a) .$$

Tout morphisme $h : a \rightarrow b$ de la catégorie C induit les deux morphismes suivants dans la catégorie D :

$$\begin{array}{ccc} & \text{Hom}_{C'}(\Phi(b), x) \cdot F(a) & \\ \Phi(h)^* \cdot \text{id} \swarrow & & \searrow \text{id} \cdot F(h) \\ \text{Hom}_{C'}(\Phi(a), x) \cdot F(a) & & \text{Hom}_{C'}(\Phi(b), x) \cdot F(b) . \end{array}$$

En considérant tous les morphismes de la catégorie C , on obtient ainsi un diagramme $\mathcal{D}$ de la catégorie D .

Definition A.2.7 (Cofin). On appelle *bouquet* pour le diagramme $\mathcal{D}$ tout élément d de D muni d'applications $\lambda_a : \text{Hom}_{C'}(\Phi(a), x) \cdot F(a) \rightarrow d$ qui rendent le diagramme associé commutatif, voir ci-dessous. La *cofin* du diagramme $\mathcal{D}$, notée

$$\int^a \text{Hom}_{C'}(\Phi(a), x) \cdot F(a) ,$$

est son bouquet universel :

$$\begin{array}{ccccc} & \text{Hom}_{C'}(\Phi(b), x) \cdot F(a) & & & \\ & \Phi(h)^* \cdot \text{id} \swarrow & & \searrow \text{id} \cdot F(h) & \\ \text{Hom}_{C'}(\Phi(a), x) \cdot F(a) & & & & \text{Hom}_{C'}(\Phi(b), x) \cdot F(b) \\ & \searrow & & \swarrow & \\ & \int^a \text{Hom}_{C'}(\Phi(a), x) \cdot F(a) & & & \\ & \downarrow \exists! & & & \\ & d & & & \end{array}$$

λ_a λ_b

REMARQUE. Même si elle en a la même saveur, la notion de bouquet n'est pas la notion de cocône; il faudrait pour cela plus de morphismes de structure. Et donc la notion de cofin n'est pas la colimite du diagramme $\mathcal{D}$.

Proposition A.2.8. Soient C une petite catégorie, C' une catégorie localement petite et D une catégorie cocomplète. L'extension de Kan à gauche d'un foncteur $F : C \rightarrow D$ le long d'un foncteur $\Phi : C \rightarrow C'$ est donnée ponctuellement par la cofin

$$(10) \quad (\text{Lan}_{\Phi} F)(x) = \int^a \text{Hom}_{C'}(\Phi(a), x) \cdot F(a) .$$

DÉMONSTRATION. La démonstration de cette propriété ne recèle pas d'idée originale, mais utilise les propriétés générales des cofins. Par soucis de concision, nous ne la reproduisons pas ici, mais nous renvoyons à [ML98, Section X.4]. $\square$

Ce résultat montre que l'on peut écrire la cofin comme une colimite mais sur un diagramme différent.

Corollary A.2.9. *Sous les hypothèses de la proposition A.2.8, l'extension de Kan à gauche est donnée ponctuellement par le coégalisateur suivant*

$$\coprod_{\substack{h:a \rightarrow b \\ \text{dans } \mathbf{C}}} \text{Hom}_{C'}(\Phi(b), x) \cdot F(a) \xrightarrow[\text{\scriptsize $F(h)$}]{\text{\scriptsize $\Phi(h)^*$}} \coprod_{a \in \mathbf{C}} \text{Hom}_{C'}(\Phi(a), x) \cdot F(a) \dashrightarrow \int^a \text{Hom}_{C'}(\Phi(a), x) \cdot F(a) .$$

DÉMONSTRATION. La démonstration est immédiate. □

REMARQUE. Lorsque la catégorie $\mathbf{D}$ est la catégorie $\mathbf{Ens}$ des ensembles, les extensions de Kan correspondent à l'image directe et réciproque des préfaisceaux.

REFERENCES

- [BV73] J. M. Boardman and R. M. Vogt, *Homotopy invariant algebraic structures on topological spaces*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 347, Springer-Verlag, Berlin, 1973. 73
- [EM45] Samuel Eilenberg and Saunders MacLane, *Relations between homology and homotopy groups of spaces*, Ann. of Math. (2) **46** (1945), 480–509. 2
- [GH81] Marvin J. Greenberg and John R. Harper, *Algebraic topology*, Mathematics Lecture Note Series, vol. 58, Benjamin/Cummings Publishing Co., Inc., Advanced Book Program, Reading, Mass., 1981, A first course. 37
- [GJ09] Paul G. Goerss and John F. Jardine, *Simplicial homotopy theory*, Modern Birkhäuser Classics, Birkhäuser Verlag, Basel, 2009, Reprint of the 1999 edition [MR1711612]. 74
- [GM03] Sergei I. Gelfand and Yuri I. Manin, *Methods of homological algebra*, second ed., Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2003. 60
- [GM13] Phillip A. Griffiths and John Morgan, *Rational homotopy theory and differential forms. 2nd revised and corrected ed*, 2nd revised and corrected ed. ed., vol. 16, New York, NY: Birkhäuser/Springer, 2013. 50
- [Hat02] Allen Hatcher, *Algebraic topology*, Cambridge University Press, Cambridge, 2002. 3, 36
- [Joy02] A. Joyal, *Quasi-categories and Kan complexes*, J. Pure Appl. Algebra **175** (2002), no. 1-3, 207–222, Special volume celebrating the 70th birthday of Professor Max Kelly. 73
- [Kel80] G. M. Kelly, *A unified treatment of transfinite constructions for free algebras, free monoids, colimits, associated sheaves, and so on*, Bull. Austral. Math. Soc. **22** (1980). 65
- [Lur09] Jacob Lurie, *Higher topos theory*, Annals of Mathematics Studies, vol. 170, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2009. 2, 73
- [LV12] Jean-Louis Loday and Bruno Vallette, *Algebraic operads*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 346, Springer-Verlag, Berlin, 2012. 2, 55
- [Man06] Michael A. Mandell, *Cochains and homotopy type*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. (2006), no. 103, 213–246. 2
- [May92] J. Peter May, *Simplicial objects in algebraic topology*, Chicago: The University of Chicago Press, 1992. 67, 74, 77, 78
- [May99] Jon Peter May, *A concise course in algebraic topology*, Chicago Lectures in Mathematics, University of Chicago Press, Chicago, IL, 1999. 3, 12, 36
- [ML95] Saunders Mac Lane, *Homology*, Classics in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1995, Reprint of the 1975 edition. 69
- [ML98] ———, *Categories for the working mathematician*, second ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 5, Springer-Verlag, New York, 1998. 80, 86
- [Qui67] Daniel G. Quillen, *Homotopical algebra*, Lecture Notes in Mathematics, No. 43, Springer-Verlag, Berlin, 1967. 2, 30, 79
- [Qui68] Daniel G. Quillen, *The geometric realization of a Kan fibration is a Serre fibration*, Proc. Am. Math. Soc. **19** (1968), 1499–1500. 78
- [RNV20] Daniel Robert-Nicoud and Bruno Vallette, *Higher Lie theory*, arXiv:2010.10485 (2020). 73
- [Ser51] J.-P. Serre, *Homologie singulière des espaces fibrés. Applications*, Ann. of Math. (2) **54** (1951), 425–505. 46
- [Sm68] Arne Strøm, *Note on cofibrations. II*, Math. Scand. **22** (1968), 130–142 (1969). 30, 34
- [tD08] Tammo tom Dieck, *Algebraic topology*, EMS Textbooks in Mathematics, European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2008. 3, 42
- [Whi40] J. H. C. Whitehead, *On C^1 -complexes*, Ann. Math. (2) **41** (1940), 809–824. 50

LABORATOIRE ANALYSE, GÉOMÉTRIE ET APPLICATIONS, UNIVERSITÉ PARIS 13, SORBONNE PARIS CITÉ, CNRS, UMR 7539, 93430 VILLETANEUSE, FRANCE.

E-mail address: vallette@math.univ-paris13.fr