

# HOMOTOPY THEORIES

JOHAN LERAY AND BRUNO VALLETTE

*“In the 20th century, any mathematical theory was starting from set theory.  
In the 21th century, the new mathematical theories will start from a homotopy theory.”*

*Yuri I. Manin*

RÉSUMÉ. These are lecture notes of a course given the Universities Paris 7 & 13 during the academic year 2018-2019. The purpose of this course is to detail several examples of homotopy theories : topological spaces, simplicial sets, and differential graded algebras. The first idea is to deal with them in a certain uniform way which will lead to thir abstractization performed by Quillen under the notion of a model category structure. The second is to provide the audience with enough material on simplicial sets to open the gates to the study of higher category theory via the notion of  $\infty$ -category. Finally, the last examples of study, differential graded algebras, will be shown to provide us with a nice setting for unraveling the rational homotopy properties of spaces and to develop deformation theory (like higher Lie theory).

## TABLE DES MATIÈRES

Introduction et motivation	2
Prerequisistes	2
Convention	2
1. Homotopy theory of topological spaces	2
1.1. Homotopy categories	2
1.2. (Co)fibre sequence	6
1.3. (Co)fibrations	11
1.4. Higher homotopy groups	15
1.5. CW-complexes	17
2. Ensembles simpliciaux	22
2.1. Espaces topologiques triangulés	22
2.2. La catégorie des simplexes	28
2.3. Ensembles simpliciaux	29
2.4. Réalisation géométrique	33
2.5. La catégorie des ensembles simpliciaux	34
2.6. Exemples conceptuels	37
2.7. Complexes de Kan et $\infty$ -catégories	40
2.8. Homotopie simpliciale	44
2.9. Simplicial homotopy	44
Annexe A. Théorie des catégories	47
A.1. Préfaisceaux	47
A.2. Extensions de Kan	49
Références	56

---

*Date:* 17 décembre 2018.

*Key words and phrases.* Homotopy theory, Topological spaces, simplicial sets, differential graded algebras.

**Prerequisites.** The following notions have been seen in the previous course on “Homology Theory” by Christian Ausoni.

CATEGORY THEORY: Category, functor, adjunction, limits and colimits, homotopy category, homotopy functor.

ALGEBRAIC TOPOLOGY: topological space, homeomorphism, homotopy equivalence, fundamental group(oid), [covering spaces].

**Convention.** “Space” will mean “topological space” and “map” will mean “continuous map”.

1. HOMOTOPY THEORY OF TOPOLOGICAL SPACES

1.1. **Homotopy categories.** We denote by  $\text{Top}$ , the category of topological spaces, with :

- the objects of  $\text{Top}$  are (all) topological spaces ;
- the morphisms of  $\text{Top}$  are continuous maps.

EXAMPLE.  $\mathbb{R}^n$ , the disks  $D^n$ , the spheres  $\partial D^n = S^{n-1}$ , the cubes  $I^n$ ,  $\partial I^n$ , the geometrical  $n$ -simplex  $|\Delta^n|$ ,  $|\partial\Delta^n| = \partial|\Delta^n|$ ,  $\mathbb{P}^n\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{P}^n\mathbb{C}$ .

REMARK. The isomorphisms in the category  $\text{Top}$  are the homeomorphisms.

**Definition 1.1** (Homotopy). Let  $f$  and  $g$  in  $\text{Top}(X, Y)$ . A *homotopy* from  $f$  to  $g$  is a continuous map  $H : X \times I \rightarrow Y$  such that  $H(-, 0) = f$  and  $H(-, 1) = g$ , i.e. we have the following commutative diagram :

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{t_0} & X \times I & \xleftarrow{t_1} & X \\ & \searrow f & \downarrow H & \swarrow g & \\ & & Y & & \end{array}$$

The maps  $f$  and  $g$  are *homotopic* if there exists a homotopy from  $f$  to  $g$ ; this will be denoted by  $f \sim g$ . We say that a continuous map  $f : X \rightarrow Y$  is *null homotopic* if  $f \sim X \rightarrow \{y_0\} \subset Y$ .

We denote the homotopy equivalence class of a continuous map  $f$  by  $[f]$ .

**Definition 1.2** (Homotopy category  $\text{hoTop}$  (Naive category)). We naively define the homotopy category  $\text{hoTop}$  :

- the objects are topological spaces ;
- the set of morphisms between  $X$  and  $Y$  is  $\text{Top}(X, Y) / \sim$ .

The composite of classes is defined as follows :

$$\begin{array}{ccc} \text{hoTop}(X, Y) \times \text{hoTop}(Y, Z) & \longrightarrow & \text{hoTop}(X, Z) \\ ([f], [g]) & \longmapsto & [g \circ f] \end{array}$$

It is well define, because, if we consider  $f, f', g, g' : X \rightarrow Y$  such that  $[f] = [f']$  and  $[g] = [g']$ , then  $gf \sim g'f$  and  $gf \sim gf'$ .

REMARK. For topological invariants, i.e. "good" functors  $F$  from  $\text{Top}$  to a category  $\mathcal{C}$  as functors  $H_\bullet, H^\bullet, \pi_1$ , we want to have a canonical factorization

$$\begin{array}{ccc} \text{Top} & \longrightarrow & \text{hoTop} \\ & \searrow F & \downarrow \text{dotted} \\ & & \mathcal{C} \end{array}$$

What is a isomorphism in the category  $\text{hoTop}$ ?

**Definition 1.3** (Homotopy equivalence for morphisms). A *homotopy equivalence* if a continuous map  $: X \rightarrow Y$  such that  $[f]$  is a isomorphism in the category  $\text{hoTop}$ , i.e., there exists a continuous map  $g : Y \rightarrow X$  such that  $gf \sim \text{id}_X$  and  $fg \sim \text{id}_Y$

**Definition 1.4** (Homotopy equivalence for spaces). Two topological spaces  $X$  and  $Y$  are *homotopy equivalent*, which is denoted by  $X \sim Y$ , if there exists a homotopy equivalence  $f : X \xrightarrow{\sim} Y$ : we will say  $X$  and  $Y$  have *the same homotopy type*. A topological space  $X$  is *contractible* if  $X \sim *$ .

**Definition 1.5** (Homotopy category (modern version)). The *homotopy category* is a category  $\text{HoTop}$  equipped with a functor  $P : \text{Top} \rightarrow \text{HoTop}$  which sends homotopy equivalence to isomorphisms, such that we have the following universal property, i.e. there exists a unique functor  $\tilde{F}$  such that the following diagram commutes

$$\begin{array}{ccc} \text{Top} & \longrightarrow & \text{HoTop} \\ & \searrow F & \downarrow \exists! \tilde{F} \\ & & \mathcal{C} \end{array}$$

REMARK. The category  $\text{HoTop}$  is the initial object in the category  $\text{Cat}_{h.eq \rightarrow iso}^{\text{Top}}$  which is defined by

- the objects are functors  $F : \text{Top} \rightarrow \mathcal{C}$  which sends homotopy equivalences to isomorphisms;
- the morphisms are functors  $\phi :$

$$\begin{array}{ccc} & \text{Top} & \\ G \swarrow & \circlearrowleft & \searrow F \\ \mathcal{C} & \xrightarrow{\phi} & \mathcal{D} \end{array}$$

- (1) If  $\text{HoTop}$  exists, there is unique up to unique isomorphism.
- (2) Does it exist?

todo

REMARK. (1) Why  $\text{HoTop}(X, Y)$  is a set?

- (2) The construction of the homotopy category is more general : there exists for every category  $\mathcal{C}$ , with a class of maps  $\mathcal{W}$  which is stable by composition, and contain  $\text{id}_X$ . Then we can consider the localized category  $\mathcal{C}[\mathcal{W}^{-1}]$ . For example, for  $\mathcal{C} = \text{dg-mod}$  and  $\mathcal{W}$  the set of quasi-isomorphism, then the category  $\text{dg-mod}[\mathcal{W}^{-1}]$  is the derived category.

- (3) We have an equivalence of categories  $\text{HoTop} \simeq \text{hoTop}$ .

todo

**Definition 1.6** (Homotopy groups). Let  $(X, x_0)$  be a pointed topological space.

- $\pi_1(X, x_0)$  is the group  $[(S^1, *), (X, x_0)] = \text{hoTop}_*(S^1, X)$ ;
- for all  $n \geq 2$ ,  $\pi_n(X, x_0)$  is the abelian group  $[(S^n, *), (X, x_0)] = \text{hoTop}_*(S^n, X)$ ;

**Definition 1.7** (Weak homotopy equivalence). A continuous map between pointed spaces  $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  is a *weak homotopy equivalence* if, for all  $n \in \mathbb{N}$ , the group morphism

$$\pi_n(f) : \pi_n(X, x_0) \longrightarrow \pi_n(Y, y_0)$$

is an isomorphism.

It is faithful on CW-complexes, i.e. for  $f : X \rightarrow Y$  is a map between CW-complexes,  $f$  is a homotopy equivalence if and only if  $f$  is a weak homotopy equivalence.

### 1.1.1. Relative version.

**Definition 1.8** (The category  $\text{Top}_{(2)}$ ). We have the category  $\text{Top}_{(2)}$  where :

- the objects are pairs of spaces  $(X, A)$  such that  $A \subset X$ ;
- a morphism  $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  is a continuous map  $f : X \rightarrow Y$  such that  $f(A) \subset B$ .

We have the associated notion of homotopy : a homotopy in  $\text{Top}_{(2)}$  is a homotopy  $H : X \times I \rightarrow Y$  such that  $H(A, t) \subset B$  for all  $t \in I$ . Then we can define  $\text{hoTop}_{(2)}$ . Two morphisms  $F, G$

REMARK. In the pointed case, this gives the good notion of "pointed homotopy" : a homotopy in  $\text{Top}_*$  is a homotopy  $H : X \times I \rightarrow Y$  such that  $H(x_0, t) = y_0$  for all  $t \in I$ . In the same way, we have  $\text{hoTop}_*$ .

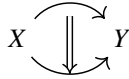
**Definition 1.9** (Homotopy relative to  $A$ ). Let  $f, g : X \rightarrow Y$  two continuous maps and  $A$  a subspace of  $X$ . We say  $f$  is homotopy to  $g$  relative to  $A$  if there exists a homotopy  $H : X \times I \rightarrow Y$  between  $f$  and  $g$  such that, for all  $t \in I$  and for all  $a \in A$ ,  $H(a, t) = f(a) = g(a)$ .

REMARK. Recall that the fundamental groupoid  $\Pi(X)$  of a topological space  $X$  has the points of  $X$  as objects and Paths up to homotopy for morphisms.

**Notation pour les 2morphismes d'une 2cat**

**Definition 1.10** (2-groupoid version of hoTop). The 2-groupoid version of hoTop has :

- for objects : the topological spaces ;
- for 1-morphisms :  $\text{Top}(X, Y)$  ;
- for 2-morphisms : the homotopies.



**Definition 1.11** (2-category). A 2-category  $\mathcal{C}$  is defined by a collection of objects (or 0-cells), for any pair  $(X, Y)$  of objects, a set  $\mathcal{C}(X, Y)$  of 1-morphisms (or 1-cells) between  $X$  and  $Y$  ..

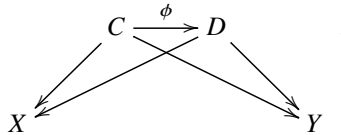
**Definition 1.12** (Strong deformation retract). Let  $A \subset X$  be a pair of topological spaces.  $A$  is a retract of  $X$  if we have

$$A \xrightarrow{i} X \xrightarrow{r} A,$$

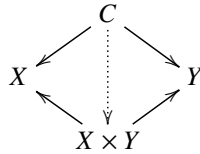
such that  $ri = \text{id}_A$  and  $ir \sim \text{id}_X$  rel.  $A$ ;  $r$  is called a *retraction*.

EXAMPLE. We take  $A = S^1$  and  $X = \mathbb{R}^2 - \{0\}$ . Then the map  $r : x \mapsto x/\|x\|$  is a retraction.

1.1.2. *Categorical constructions in Top and Top\**. Consider  $D = \bullet \leftarrow \bullet \rightarrow \bullet$ , the category with two objects and only trivial arrows and the category  $\text{Func}(D, \text{Top})$ . Such a functor  $F = (X, Y)$  is just the data of two topological spaces  $X$  and  $Y$ . To  $F$ , we associate the category  $\text{Cone}(F)$  where objects are  $X \leftarrow C \rightarrow Y$  and morphisms from  $C$  to  $D$  are commutative diagrams as follows :

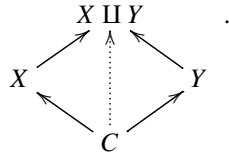


Then the product  $X \times Y$  of two topological spaces is the terminal object in the category  $\text{Cone}(F)$  :



EXERCISE 1. **a ecrire autrement ?**

(1) Dually, we can define the coproduct as the initial object of such a category



(2) Now, we consider the category  $D : \bullet \leftarrow \bullet \rightarrow \bullet$  to, as previously, viewed the pullback of  $X \rightarrow Z \leftarrow Y$  as the initial object of a certain category :

$$\begin{array}{ccc} X \times_Z Y & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow g \\ X & \xrightarrow{f} & Z \end{array} \quad \text{where } X \times_Z Y = \{(x, y) \mid f(x) = g(y)\}.$$

(3) In the same way, we have the pushout :

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{g} & Y \\ f \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ X & \longrightarrow & X \amalg_Z Y \end{array} \quad \text{where } X \amalg_Z Y = \frac{X \amalg Y}{f(x) \sim g(y)}.$$

We also have the same constructions in the category  $\text{Top}_*$  :

- the product  $(X \times Y, (x_0, y_0))$ ;
- the coproduct, called *the wedge sum* or *le bouquet*

$$X \vee Y := \left( \frac{X \amalg Y}{x_0 \sim y_0}, x_0 \sim y_0 \right).$$

At the sets level, we have the following adjunction :

$$(1) \quad \text{Set}(X \times Y, Z) \cong_{\text{nat.}} \text{Set}(X, Z^Y) \quad \text{i.e.} \quad - \times Y : \text{Set} \xrightleftharpoons{\perp} \text{Set} : (-)^Y.$$

We want to extend this adjunction at the level of topological spaces.

**Proposition 1.13.** *We have the adjunction*

$$- \times Y : \text{Top} \xrightleftharpoons{\perp} \text{Top} : (-)^Y.$$

*i.e. we have the following natural bijection of sets :*

$$\text{Top}(X \times Y, Z) \cong_{\text{nat.}} \text{Top}(X, Z^Y)$$

A natural question : can we internalize this adjunction, i.e. have a natural homeomorphism between  $\text{Top}(X \times Y, Z)$  and  $\text{Top}(X, Z^Y)$ ? First, we define a topology on  $\text{Top}(X, Y)$  (i.e.  $\text{Top}$  is *enriched* over itself).

**Definition-Proposition 1.14** (Compact-open topology). Let  $X$  and  $Y$  be two topological spaces. Consider, for a compact  $K$  of  $X$  and an open  $U$  of  $Y$ , the set

$$W(K, U) := \{ f : X \rightarrow Y \mid f(K) \subset U \}.$$

Then , the set of finite intersections of such  $W(K, U)$  gives us a base of a topology for  $\text{Top}(X, Y)$ , called *the compact-open topology*.

We cannot internalize the adjunction for all the category  $\text{Top}$  but this property holds for a big sub category of  $\text{Top}$

**Proposition 1.15.** *Let  $X, Y$  and  $Z$  be three compactly generated topological spaces. Then we have the natural homeomorphism*

$$\text{Top}(X \times Y, Z) \cong_{\substack{\text{nat.} \\ \text{homeo.}}} \text{Top}(X, Z^Y),$$

*where  $X \times Y$  has not the naive topology.*

EXAMPLE. It holds for three locally compact spaces. Also a nice example is the following :

$$\text{Top}(X \times I, Y) \cong \text{Top}(X, Y^I).$$

**Proposition 1.16** (Evaluation map). *Let  $X$  and  $Y$  be two topological spaces. We have the evaluation map*

$$\begin{aligned} e : Y^X \times X &\longrightarrow Y \\ (f, x) &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

*given by the adjunction (1). If  $X$  is locally compact, then  $e$  is continuous.*

**Definition 1.17** (Cohomotopy). Let  $f, g : X \rightarrow Y$  be two continuous maps. A *cohomotopy* between  $f$  and  $g$  is a map  $H : X \rightarrow Y^I$  such that the following diagram commutes :

$$\begin{array}{ccccc} & & X & & \\ & f \swarrow & \downarrow H & \searrow g & \\ Y & & Y^I & & Y \\ & \xleftarrow{e_0} & & \xrightarrow{e_1} & \end{array}$$

where, for  $t \in I$ ,  $e_t$  is given by the composite  $e_t : Y^I \times \{t\} \hookrightarrow Y^I \times I \xrightarrow{e} Y$ .

Since  $I$  is locally compact, we have the same equivalence relation.

PROPERTIES. For  $f : X \xrightarrow{\sim} Y$  then we have

$$f^* : Z^X \xrightarrow{\sim} Z^Y \quad \text{and} \quad f_* : X^Z \xrightarrow{\sim} Y^Z.$$

08/11/18

We want to have the same internal adjunction for the category of pointed topological spaces  $\text{Top}_*$ . But we do not have a canonical choice of a point in the product  $X \times Y$ , with  $X$  and  $Y$  two pointed spaces. So we need to change our product.

**Definition 1.18** (Smash product). Let  $(X, x_0)$  and  $(Y, y_0)$  be two pointed spaces. The *smash product* of  $X$  and  $Y$  is

$$X \wedge Y := \frac{X \times Y}{X \times \{y_0\} \cup \{x_0\} \times Y}.$$

**Theorem 1.19.** Let  $(X, x_0)$ ,  $(Y, y_0)$  and  $(Z, z_0)$  be three locally compact pointed spaces. Then we have the natural homeomorphism

$$\text{Top}_*(X \wedge Y, Z) \cong \text{Top}_*(X, Z^Y).$$

1.2. (Co)fibres sequence. In this subsection, we work in the category of (locally compact) pointed spaces.

1.2.1. *Pointed homotopies.* We search a **representant** for pointed homotopies.

**Definition 1.20** (Cylinder of  $(X, x_0)$ ). Let  $(X, x_0)$  be a pointed space. The *cylinder of  $X$*  is defined as follows :

$$\text{Cyl}(X) := \frac{X \times I}{\{x_0\} \times I}.$$

EXAMPLE. **todo**

We have the homeomorphism :

$$\left\{ \begin{array}{l} H : X \times I \rightarrow Y \\ H(x_0, t) = y_0 \end{array} \right\} \cong \text{Top}_*(\text{Cyl}(X), Y).$$

1.2.2. *Pointed homotopies from the constant map.*

**Definition 1.21** (Cone of  $(X, x_0)$ ). Let  $(X, x_0)$  be a pointed space. The *cone of  $X$*  is defined as follows :

$$\text{Cone}(X) := \frac{X \times I}{\{x_0\} \times I \cup X \times \{0\}}.$$

EXAMPLE. **todo**

We have the homeomorphism :

$$\left\{ \begin{array}{l} H : X \times I \rightarrow Y \\ H(x_0, t) = y_0 \\ H(x, 0) = y_0 \end{array} \right\} \cong \text{Top}_*(\text{Cone}(X), Y).$$

1.2.3. *Pointed homotopies from the constant map to constant map.*

**Definition 1.22** (Suspension of  $(X, x_0)$ ). Let  $(X, x_0)$  be a pointed space. The *suspension of  $X$*  is defined as follows :

$$\Sigma X := \frac{X \times I}{\{x_0\} \times I \cup X \times \partial I}.$$

EXAMPLE. **todo**

We have the homeomorphism :

$$\left\{ \begin{array}{l} H : X \times I \rightarrow Y \\ H(x_0, t) = y_0 \\ H(x, 0) = y_0 \\ H(x, 1) = y_0 \end{array} \right\} \cong \text{Top}_*(\Sigma X, Y).$$

EXAMPLE. Take  $S^0 := \{*, p\}$ , then  $\Sigma S^0 \cong S^1 \cong I/\partial I$ . We can iterate the construction :

$$\Sigma^2 S^0 \cong \Sigma S^1 \cong S^2.$$

REMARK. We have  $\Sigma X \cong X \vee S^1$ .

PROPERTIES. (1) The cylinder, the cone and the suspension are functors :

$$\text{Cyl}, \text{Cone}, \Sigma : \text{Top}_* \longrightarrow \text{Top}_* ;$$

we have natural transformations :

$$\text{Cyl} \implies \text{Cone} \implies \Sigma ,$$

and, for a pointed space  $X$ , we have

$$\text{Cyl}(X) \twoheadrightarrow \text{Cone}(X) \twoheadrightarrow \Sigma X.$$

(2) Any pointed homotopy  $H : X \times I \rightarrow Y$  s.t.  $H(x_0, t) = y_0$  induced a pointed homotopy

$$\Sigma H : \Sigma X \times I \longrightarrow \Sigma Y ;$$

the functor  $\Sigma$  extends to  $\Sigma : \text{hoTop}_* \rightarrow \text{hoTop}_*$ .

**Proposition 1.23.** *Let  $X$  be a topological space and  $n$ , an integer. We have*

$$\Sigma^n X \cong X \wedge I^n / \partial I^n.$$

*Démonstration.* We prove the result by induction : for  $n = 1$ , we have  $\Sigma X \cong X \wedge I^n / \partial I^n$ . Suppose the result is true for  $n \in \mathcal{N}$ . We have :

$$\begin{aligned} \Sigma^{n+1} X &\cong \Sigma \Sigma^n X \stackrel{\text{ind.}}{\cong} \Sigma(X \wedge I^n / \partial I^n) \\ &\cong (X \wedge I^n / \partial I^n) \wedge I / \partial I \\ &\cong X \wedge (I^n / \partial I^n \wedge I / \partial I) \\ &\cong X \wedge I^{n+1} / \partial I^{n+1}. \end{aligned}$$

□

**Corollary 1.24.** *We have the natural homeomorphisms :*

$$\Sigma^n S^0 \stackrel{\textcircled{1}}{\cong} I^n / \partial I^n \stackrel{\textcircled{2}}{\cong} S^n.$$

*Démonstration.* For ① : we have

$$\Sigma^n S^0 \cong \Sigma^{n-1} I / \partial I \cong I^{n-1} / \partial I^{n-1} \wedge I / \partial I \cong I^n / \partial I^n.$$

For ② : we have

$$S^n := \partial D^{n+1} \cong \partial I^{n+1} \cong I^{n+1} / \partial I^{n+1}.$$

**justifier le dernier  $\cong$**

□

REMARQUE (SPHERE SPECTRUM). The following sequence of sphere

$$S^0 \xrightarrow{\Sigma} S^1 \xrightarrow{\Sigma} S^2 \xrightarrow{\Sigma} S^3 \xrightarrow{\Sigma} \dots$$

is called *the sphere spectrum*. The category of spectra is the good category to represent cohomology theories, and the sphere spectrum is the unit in this category.

**Definition 1.25** (Pinch map). The *pinch map* is the following map

$$p_i : \Sigma X \longrightarrow \Sigma X \vee \Sigma X$$

given by **un joli dessin a faire**

The pinch map gives us a product on the space  $\text{Top}(\Sigma X, Y)$  :

$$\begin{array}{ccc} \text{Top}_*(\Sigma X, Y) \times \text{Top}_*(\Sigma X, Y) & \xrightarrow{\cong} & \text{Top}_*(\Sigma X \vee \Sigma X, Y) /; \\ & \searrow + & \downarrow p_i^* \\ & & \text{Top}_*(\Sigma X, Y) \end{array}$$

explicitly, for two maps  $f, g : \Sigma X \rightarrow Y$ , we have

$$f + g : (x, t) \mapsto \begin{cases} f(x, 2t) & \text{for } t \leq \frac{1}{2} \\ g(x, 2t - 1) & \text{for } t \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

As there is re-parametrization, the product  $+$  is *not* a group structure on  $\text{Top}_*(\Sigma X, Y)$  but it holds in the homotopy category.

**Proposition 1.26.** *The above product induces a group structure on  $([\Sigma X, Y]_*, +, \text{cst})$ , where  $[\Sigma X, Y]_* := \text{hoTop}_*(\Sigma X, Y)$ .*

*Démonstration.* We have

$$\text{Top}_*(\Sigma X, Y) \cong \left\{ \begin{array}{l} \text{pointed homotopy} \\ H : X \times I \rightarrow Y \\ H(x_0, t) = y_0 \\ H(x, 0) = y_0 = H(x, 1) \end{array} \right\}$$

**a finir**

$$([\Sigma X, Y]_*, +, \text{cst}) \cong \pi_1(\text{Top}_*(X, Y), \text{cst}).$$

□

REMARQUE. This proposition is related to the 2-groupoid mentioned above. **reference ?**

REMARQUE. We have

$$([\Sigma S^0, Y]_*, +, \text{cst}) \cong \pi_1(Y).$$

The proposition 1.26 permits to define the higher homotopy groups.

**Definition 1.27** ( $n$ -th homotopy group). The  $n$ -th *homotopy group* of a space  $X$  is defined by

$$(\pi_n(X), +, 0) := ([\Sigma^n S^0, Y]_*, +, \text{cst}).$$

**Proposition 1.28.** *For  $n \geq 2$ , the group  $([\Sigma^n X, Y], +, \text{cst})$  is abelian, e.g.  $\pi_n(X)$  is an abelian group.*

*Démonstration.* We have

$$\begin{array}{ccc} \text{Top}_*(\Sigma^n X, Y) & \xrightarrow{\cong} & [\Sigma^n X, Y]_* \\ \downarrow & & \\ \text{Top}_*(X \times I^n, Y) & & \end{array}$$

For two maps  $f, g : X \times I^n \rightarrow Y$ , we define, for all  $1 \leq i \leq n$ , the  $i$ -th sum :

$$f +_i g : (x, t_1, \dots, t_i, \dots, t_n) \mapsto \begin{cases} f(x, t_1, \dots, 2t_i, \dots, t_n) & \text{for } t_i \leq \frac{1}{2} \\ g(x, t_1, \dots, 2t_i - 1, \dots, t_n) & \text{for } t_i \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$



This is well defined on  $[\Sigma^n X, Y]_*$ , they satisfy the *interchanging law*, i.e., for all  $1 \leq i \neq j \leq n$ , we have

$$(\alpha +_i \beta) +_j (\gamma +_i \delta) = (\alpha +_j \gamma) +_i (\beta +_j \delta),$$

the reader can be prove that. By the Echman-Hilton principle (see 1.29), all  $+_i$  are equal.  $\square$

**Lemme 1.29** (Echman-Hilton principle). *Let  $(+_1, e_1)$  and  $(+_2, e_2)$  be two monoidal structures. If they satisfy the interchanging law, then  $(+_1, e_1)$  and  $(+_2, e_2)$  are the same.*

*Démonstration.* This is a easy exercise for the reader.  $\square$

REMARQUE. The map  $([\Sigma X, Y], +) \rightarrow ([\Sigma^2 X, Y], +)$  is a group morphism.

#### 1.2.4. Cofiber sequences.

**Definition 1.30** (Mapping cone). Let  $f : X \rightarrow Y$  be a pointed map. We define the *mapping cone of  $f$* , denoted by  $\text{Cone}(f)$ , as the following pushout :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow f_1 \\ \text{Cone}(X) & \xrightarrow{j} & \text{Cone}(f) \end{array} \quad \text{with } \text{Cone}(f) \cong \frac{\text{Cone}(X) \amalg Y}{(x, 1) \sim f(x)}.$$

dessin pour  $X = D^2$

Partie concernant la nulle homotopie d'une composition

**Definition 1.31** (h-coexact sequence). A sequence  $U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} W$  of continuous maps is *h-coexact* if, for all topological space  $Z$ , the sequence

$$[U, Z]_* \xleftarrow{f^*} [V, Z]_* \xleftarrow{g^*} [W, Z]_*$$

is exact in sets, i.e. for all  $\psi : V \rightarrow Z$ , the composition  $U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{\psi} Z$  is null homotopic if, and only if there exists  $\phi : W \rightarrow Z$  such that  $\psi \sim \phi \circ g$ .

EXEMPLE. The sequence  $X \xrightarrow{f} Y \rightarrow \text{Cone}(f)$  is h-coexact.

REMARQUE. for  $Z = W$  and  $\phi = \text{id}_W$ , then  $gf$  is null homotopic.

How to continue the sequence  $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{f_1} \text{Cone}(f_1) \rightarrow \dots$  ?

**Theorem 1.32** (Cofibre sequence). *For any pointed map  $f : X \rightarrow Y$ , the following sequence is h-coexact :*

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{f_1} \text{Cone}(f) \rightarrow \Sigma X \xrightarrow{\Sigma f} \Sigma Y \rightarrow \Sigma \text{Cone}(f) \rightarrow \Sigma^2 X \xrightarrow{\Sigma^2 f} \Sigma^2 Y \rightarrow \Sigma^2 \text{Cone}(f) \rightarrow \dots$$

where  $\text{Cone}(f) \rightarrow \text{Cone}(f)/f_1(Y) \cong \Sigma X$ , i.e. for all  $Z \in \text{Top}_*$ , the following sequence of sets is exact :

$$\begin{array}{ccccccc} [X, Z]_* & \longleftarrow & [Y, Z]_* & \longleftarrow & [\text{Cone}(f), Z]_* & \longleftarrow & \\ & & \longleftarrow & & \longleftarrow & & \\ & & [\Sigma X, Z]_* & \longleftarrow & [\Sigma Y, Z]_* & \longleftarrow & [\Sigma \text{Cone}(f), Z]_* \longleftarrow \\ & & & & \longleftarrow & & \\ & & & & [\Sigma^2 X, Z]_* & \longleftarrow & [\Sigma^2 Y, Z]_* \longleftarrow & [\Sigma^2 \text{Cone}(f), Z]_* \end{array}$$

exact en groupe, en groupe abelien

1.2.5. *Dual construction : the fiber sequence.* **manque l'intro**

**Definition 1.33** (Path space). Let  $X$  be a topological space. The *path space* of  $X$  is

$$\text{Path}(X) := \{\phi : I \rightarrow X \mid \phi(0) = x_0\} \subset X^I.$$

**Proposition 1.34.** *The path space is functorial, i.e.  $\text{Path} : \text{Top}_* \rightarrow \text{Top}_*$  is a functor, which is the right adjoint of the cone :*

$$\text{Cone} : \text{Top}_* \overset{\perp}{\underset{\perp}{\rightleftarrows}} \text{Top}_* : \text{Path},$$

so we have the natural bijection *homeo?*

$$\text{Top}_*(\text{Cone}(X), Y) \cong \text{Top}_*(X, \text{Path}(Y)).$$

**Definition 1.35** (Path space of a map). Let  $f : X \rightarrow Y$  be a continuous map. We define the *path space of  $f$*  as the following pullback :

$$\begin{array}{ccc} \text{Path}(f) & \longrightarrow & \text{Path}(Y) \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array} \quad \text{where } \text{Path}(f) \cong X \times_Y \text{Path}(Y) \cong \{(x, \phi) \mid \phi(1) = f(x)\}.$$

**Definition 1.36** (h-exact sequence). A sequence  $U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} W$  of continuous maps is *h-coexact* if, for all topological space  $Z$ , the sequence

$$[Z, U]_* \xrightarrow{f_*} [Z, V]_* \xrightarrow{g_*} [Z, W]_*$$

is exact in sets.

EXAMPLE. The sequence  $\text{Path}(f) \rightarrow X \xrightarrow{f} Y$  is h-exact.

**intro a l'espace des lacets**

**Definition 1.37** (Loop space). Let  $X$  be a topological space. The *loop space* of  $X$  is

$$\Omega X := \{\phi : I \rightarrow X \mid \phi(0) = x_0 = \phi(1)\} \subset X^I.$$

**Proposition 1.38.** *The loop space is functorial, i.e.  $\Omega : \text{Top}_* \rightarrow \text{Top}_*$  is a functor, which is the right adjoint of the suspension :*

$$\Sigma : \text{Top}_* \overset{\perp}{\underset{\perp}{\rightleftarrows}} \text{Top}_* : \Omega,$$

so we have the natural bijection *homeo?*

$$\text{Top}_*(\Sigma X, Y) \cong \text{Top}_*(X, \Omega Y).$$

**Theorem 1.39** (Fiber sequence). *For any pointed map  $f : X \rightarrow Y$ , the following sequence is h-coexact :*

$$Y \xleftarrow{f} X \leftarrow \text{Path}(f) \leftarrow \Omega Y \leftarrow \Omega X \leftarrow \Omega \text{Path}(f) \leftarrow \Omega^2 Y \leftarrow \Omega^2 X \leftarrow \Omega^2 \text{Path}(f) \leftarrow \dots$$

where  $\Omega Y \rightarrow \text{Path}(f)$  is the map which sends  $\phi$  on  $(x_0, \phi)$ , i.e. for all  $Z \in \text{Top}_*$ , the following sequence of sets is exact :

$$\begin{array}{ccccccc} [Z, Y]_* & \longleftarrow & [Z, X]_* & \longleftarrow & [Z, \text{Path}(f)]_* & \longleftarrow & \\ & & & & \longleftarrow & & \\ & & [Z, \Omega Y]_* & \longleftarrow & [Z, \Omega X]_* & \longleftarrow & [Z, \Omega \text{Path}(f)]_* \longleftarrow \\ & & & & & & \\ & & [Z, \Omega^2 Y]_* & \longleftarrow & [Z, \Omega^2 X]_* & \longleftarrow & [Z, \Omega^2 \text{Path}(f)]_* \end{array}$$

*exact en groupe, en groupe abelien*

1.3. **(Co)fibrations.** We leave the pointed world.

**Definition 1.40** (Mapping cylinder). Let  $f$  be a continuous map (not necessarily pointed) from  $X$  to  $Y$ . We define *the mapping cylinder of  $f$* , denoted by  $\text{Cyl}(f)$ , as the following pushout :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow f_1 \\ X \times I & \xrightarrow{j} & \text{Cyl}(f) \end{array} \quad \text{with } \text{Cyl}(f) \cong \frac{(X \times I) \amalg Y}{(x, 1) \sim f(x)}.$$

mettre  $\text{Cyl}(X)$  a la place de  $X \times I$ ?

Remarque : meme construction que pour le cone.

Question : a-t-on  $\text{Cyl}(f) \rightarrow \text{Cone}(f)$  naturelle? upgrade de  $\text{Cyl} \Rightarrow \text{Cone}$ ?

EXEMPLE. Take  $X = S^1$  and  $Y = I$ . **todo : dessin**

With this construction, we can factored the map  $f$  as follows :

$$X \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xleftarrow{i_0} \text{Cyl}(f) \xrightarrow{P} \end{array} Y \quad \text{with} \quad \begin{array}{ccc} P : \text{Cyl}(f) & \longrightarrow & Y \\ (x, t) & \longmapsto & f(x) \\ y & \longmapsto & y \end{array}$$

which is well-defined and continuous. If we take  $j : Y \rightarrow \text{Cyl}(f)$ , the canonical inclusion, we can check that  $P \circ j = \text{id}_Y$  and  $j \circ P \sim \text{id}_{\text{Cyl}(f)}$ . Then  $Y$  is a (strong) deformation retract of  $\text{Cyl}(f)$  and  $P$  is a **weak equivalence** :

$$X \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xleftarrow{i_0} \text{Cyl}(f) \xrightarrow{\sim} \end{array} Y .$$

A natural question is what is the universal property of the map  $i_0$ ? **intro a la HEP**

**Definition 1.41** (Homotopy Extension Property (HEP)). Let  $i : A \rightarrow X$  be a continuous map. We say  $i$  satisfies the *Homotopy Extension Property (HEP) with respect to  $Z$*  if, for all pairs of maps  $g : X \rightarrow Z$  and  $h : A \times X \rightarrow Z$  such that  $hi_0^A = gi$  (with  $i_0^A : A \rightarrow A \times I$ , the inclusion in "the floor 0"), there exists a map  $H : X \times I \rightarrow Z$  such that the following diagram commutes :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i_0^A} & A \times I \\ \downarrow i & & \downarrow i \times I \\ X & \xrightarrow{i_0^X} & X \times I \end{array} \begin{array}{c} \xrightarrow{h} \\ \xrightarrow{\exists H} \\ \xrightarrow{g} \end{array} Z ;$$

we say that  $H$  extends  $h$  with initial condition  $g$ .

EXEMPLE ( $S^1 \hookrightarrow D^2$ ). **todo : dessin**

**Definition 1.42** (Cofibration). A continuous map  $i$  is a *cofibration* if it satisfies the HEP for all space  $Z$ .

EXEMPLE.  $Z = \text{Cyl}(i)$ ??

**Proposition 1.43.** Let  $i : A \rightarrow X$  be a continuous map. The following assumption are equivalent :

- (1)  $i$  is a cofibration ;
- (2)  $i$  satisfies the HEP with respect to  $\text{Cyl}(i)$  ;
- (3)  $\text{Cyl}(i) \hookrightarrow X \times I$  admits a retraction.

*Démonstration.* We just need to prove (3)  $\Rightarrow$  (1). **to finish** □

EXEMPLE. The maps  $\text{id}_X, S^{n_1} \hookrightarrow D^n$  and  $\partial I^n \hookrightarrow I^n$  are cofibrations.

REMARQUE. By adjunction, we have :

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{i_0^A} & A \times I \\
 \downarrow j & & \downarrow i \times I \\
 X & \xrightarrow{i_0^X} & X \times I \\
 & \searrow g & \downarrow h \\
 & & Z
 \end{array}
 \iff
 \begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{h} & Z^I \\
 i \downarrow & \nearrow \tilde{H} & \downarrow e_0 \\
 X & \xrightarrow{g} & Z
 \end{array}$$

and we say  $\tilde{H}$  is an extension of  $h$  along  $i$ .

15/11/18

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{i_0^A} & A \times I \\
 \downarrow i & & \downarrow i \times I \\
 X & \xrightarrow{i_0^X} & X \times I \\
 & \searrow g & \downarrow h \\
 & & \text{Cyl}(i)
 \end{array}
 \quad ; \quad
 \begin{array}{c}
 \exists H \dots
 \end{array}$$

REMARQUE. We can check that if  $i$  is a cofibration, then  $i$  is an embedding with  $i(A)$  closed ( $X$  Hausdorff). In fact, take  $\iota_0 : A \rightarrow \text{Cyl}(i)$ , then we have

$$\iota_0 = r s i_0 = r(i \times \text{id}_I) i_0^A = r i_0^X i.$$

**Proposition 1.44.** *Let  $i : A \hookrightarrow X$  be an embedding. The map  $i$  is a cofibration if and only if the map  $X \times \{1\} \cup A \times I \hookrightarrow X \times I$  admits a retraction.*

*Démonstration.* cf dessin 1 □

EXEMPLE. The maps  $S^{n-1} \hookrightarrow D^n$  and  $\partial I^n \hookrightarrow I^n$  are cofibrations. All identity maps  $\text{id}_X$  and all homeomorphisms also are cofibrations.

**Proposition 1.45** (Cobase change). *Consider the following pushout :*

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{f} & C \\
 i \downarrow & \lrcorner & \downarrow j \\
 X & \longrightarrow & X \cup_f C
 \end{array}
 ,$$

*if  $i$  is a cofibration, then  $j$  too.*

*Démonstration.* contenu... □

**Theorem 1.46.** *Let  $f : X \rightarrow Y$  be a continuous map. Then, we have the following factorization :*

$$X \xrightarrow{i_0} \text{Cyl}(f) \xrightarrow{P} Y \quad .$$

*Démonstration.* We want to show that the map  $i_0 : X \rightarrow \text{Cyl}(f)$  is a cofibration, i.e. the map  $\text{Cyl}(f) \times \{0\} \cup X \times I \hookrightarrow \text{Cyl}(f) \times I$  has a retraction  $r$ , which is given by :

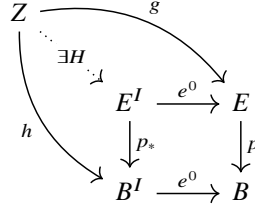
$$\begin{array}{ccc}
 r : \text{Cyl}(f) \times I & \longrightarrow & \text{Cyl}(f) \times \{0\} \cup X \times I \\
 (x, t, s) & \longmapsto & \begin{cases} (x, \frac{2t-s}{2s}, 0) & \text{if } 2t - s \geq 0 \\ (x, 0, s - 2t) & \text{if } 2t - s \leq 0 \end{cases} \\
 (y, s) & \longmapsto & (y, 0)
 \end{array}$$

dessin2 □

REMARQUE. Any map can be replaced by a cofibration up to homotopy.

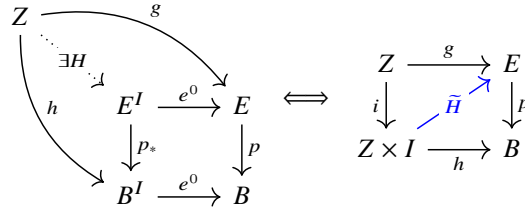
1.3.1. *Fibrations. motivations*

**Definition 1.47** (Homotopy Lifting Property (HLP)). A map  $p : E \rightarrow B$  satisfies the *Homotopy Lifting Property (HLP)* with respect the space  $Z$  when for all maps  $g : Z \rightarrow E$  and  $h : Z \rightarrow B^I$ , there exists a map  $H : Z \rightarrow E^I$  such that the following diagram commutes :



We say " $H$  is a lifting of  $h$  with initial condition  $g$ ".

REMARQUE. By adjunction, we have :



and we say  $\tilde{H}$  is an extension of  $h$  along  $i$ .

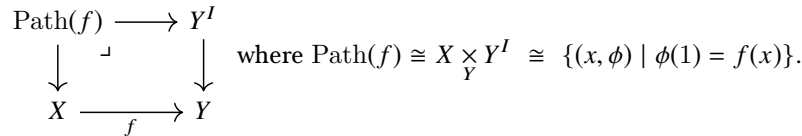
**Definition 1.48** (Hurewicz and Serre fibrations). Let  $p : E \rightarrow B$  be a continuous map.

- (1)  $p$  is a *Hurewicz fibration* if it satisfies (HLP) with respect to any space  $Z$ .
- (2)  $p$  is a *Serre fibration* if it satisfies (HLP) with respect to any cube  $I^n$ ,  $n \geq 0$ .

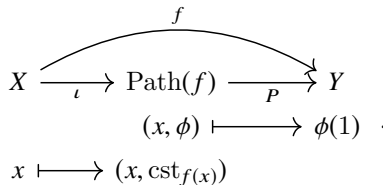
We denote cofibration by  $\rightarrow$ .

REMARQUE. A Hurewicz fibration is a Serre fibration.

**Definition 1.49** ((Unpointed) Path space of a map). Let  $f : X \rightarrow Y$  be a continuous map. We define the *path space of  $f$*  as the following pullback :



We have the following factorization :



**Lemme 1.50.** *The map  $\iota : X \rightarrow \text{Path}(f)$  is a (strong) deformation retract.*

*Démonstration. proof 1*

□

**Proposition 1.51.** *The map  $e^1 : \text{Path}(f) \rightarrow Y$  is a (Hurewicz) fibration.*

*Démonstration.* Check the HLP with respect to any  $Z$ . Let  $g : Z \rightarrow \text{Path}(f)$  and  $h : Z \times I \rightarrow Y$  be maps such that the following diagram commutes :

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{g} & \text{Path}(f) \\ i_0 \downarrow & \swarrow H & \downarrow e^1 \\ Z \times I & \xrightarrow{h} & Y \end{array}$$

We proceed by "analyse-synthèse". We denote :

- $g : z \mapsto (x_z, \phi_z)$  such that  $\phi_z(0) = f(x_z)$ ;
- $H : (z, t) \mapsto (x_z, \Psi_{z,t})$  such that  $\Psi_{z,t}(0) = f(x_z)$ ;

then  $e^1 g = \phi_z(1) = h(z, 0) = h i_0$ . The commutativity of the diagram implies : **blabla a finir : dessin + numerotation des hypotheses que l'oon veut respecter pour definir H definition de  $\Psi_{z,t}$**   $\square$

REMARQUE. Up to homotopy, any map is equivalent to a fibration.

EXEMPLE. Take  $Z = \text{Path}(p)$ ,

$$\begin{array}{ccc} \text{Path}(p) & \xrightarrow{g} & E \\ \downarrow h & \swarrow \exists! \rho & \downarrow e^0 \\ E^I & \xrightarrow{e^0} & E \\ p_* \downarrow & & \downarrow p \\ B^I & \xrightarrow{e^0} & B \end{array}$$

$\rho$  exists by the pullback universal property.

REMARQUE. A fibration  $p : E \rightarrow B$  is surjective.

**Proposition 1.52.** *The following assumption are equivalent :*

- (1) *the map  $p : E \rightarrow B$  is a fibration ;*
- (2) *the map  $p$  satisfies the HLP with respect to  $\text{Path}(p)$  ;*
- (3) *the map  $\rho : E^I \rightarrow \text{Path}(p)$  admits a section  $\sigma$ , such that  $\rho \sigma = \text{id}$ .*

*Démonstration.*

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{g} & E \\ \downarrow h & \swarrow \exists! \rho & \downarrow e^0 \\ \text{Path}(p) & \xrightarrow{g} & E \\ \downarrow h & \swarrow \exists! \rho & \downarrow e^0 \\ E^I & \xrightarrow{e^0} & E \\ p_* \downarrow & & \downarrow p \\ B^I & \xrightarrow{e^0} & B \end{array}$$

$\square$

EXEMPLE (TOY MODEL).

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R} & \longrightarrow & S^1 \\ \theta & \longmapsto & e^{i\theta} \end{array}$$

**Definition 1.53** (Covering). A *covering* (or *cover*, or *cover space*) of a space  $B$  is a surjective map  $p : E \rightarrow B$  such that for all  $b$  in  $B$ , it exists an open neighborhood  $U$  of  $b$  such that any connected component  $C$  of  $p^{-1}(U) \cong \amalg C$  satisfies  $P|_C : C \xrightarrow{\cong} U$ .

**Proposition 1.54.** *If  $p : E \rightarrow B$  is a covering, then  $p$  is a fibration with a unique section  $\sigma$ .*

Démonstration. Take

$$\begin{array}{ccc} & \xleftarrow{\rho} & \\ \rho : E^I & \longrightarrow & \text{Path}(p) \cong \{(e, \phi) | \phi(0) = p(e)\} \\ \psi & \longmapsto & (\psi(0), p\psi) \end{array}$$

a finir □

**Proposition 1.55** (Base change). *Fibrations are stable under base change, i.e*

$$\begin{array}{ccc} B \times_f P & \xrightarrow{p'} & E \\ i_0 \downarrow & & \downarrow p \\ B' & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

then  $p'$  is also a fibration.

Démonstration. Exercise. □

**Proposition 1.56.** — Let  $i : A \hookrightarrow X$  be a cofibration between locally compact space then, for all space  $Z$ , the map  $i^* : Z^X \rightarrow Z^A$  is a fibration too.

— Let  $p : E \rightarrow B$  be a fibration between locally compact spaces, then, for all compact space  $Z$ , the map  $p_* : E^Z \rightarrow B^Z$  is a fibration.

EXEMPLE. —  $X^I \rightarrow X^{\partial I} = X \amalg X$  is a fibration for  $i : \partial I \hookrightarrow I$ .

—  $e^1 : Y^I \rightarrow Y$  is a fibration where  $e^1 = i^*$  with

**exemple 1**

REMARQUE (PARADIGM : MOEBIUS BAND). **todo**

covering  $\subset$  fiber bundle  $\subset$  fibration  $\subset$  Serre fibration

**Definition 1.57** (Fiber bundle). A *fiber bundle of  $X$  with fiber  $F$*  is a surjective map  $P : E \rightarrow B$  such that for all  $b$  in  $B$ , there exists a open neighborhood  $U$  of  $b$  and there exists a "local trivialization"  $h : p^{-1}(U) \cong U \times F$  such that the following diagram commutes :

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U) & \xrightarrow{h} & U \times F \\ & \searrow p & \downarrow \text{proj} \\ & & U \end{array}$$

EXEMPLE.  $E = B \times F \rightarrow B$  trivial fiber bundle.

**Proposition 1.58.** — Any fiber bundle with a discrete fiber  $F$  is a covering.

— A covering with all fibers of same cardinality is a fiber bundle  **$B$  connected.**

**Theorem 1.59.** For a fiber bundle  $f : E \rightarrow B$  with  $B$ , a paracompact space, then  $f$  is fibration.

### 1.4. Higher homotopy groups.

1.4.1. *Relative homotopy groups.* We take  $(X, *)$ , a pointed space. Recall we have

$$\pi_n(X) := [S^n, X]_* \cong [\Sigma^n S^0, X]_0 \cong [S^0, \Omega^n X]_* \cong \pi_{n-1}(\Omega X) \cong \dots \cong \pi_0(\Omega^n X).$$

**question : notion d'Omega-spectre ?**

REMARQUE. If  $f : X \rightarrow Y$  is a weak equivalence, then  $f_* : \pi_n(X) \rightarrow \pi_n(Y)$  is an isomorphism.

Let  $i : A \hookrightarrow X$  be a pointed continuous map et denote by  $\mathcal{P}$ , the *relative path space* given by

$$\text{Path}((X, *), A) = \{(a, \phi) | \phi(0) = *, \phi(1) = a\}.$$

To the following sequence

$$X \xleftarrow{i} A \leftarrow \mathcal{P} \leftarrow \Omega X \leftarrow \Omega A \leftarrow \Omega \mathcal{P} \leftarrow \Omega^2 X \leftarrow \Omega^2 A \leftarrow \Omega^2 \mathcal{P} \leftarrow \dots,$$

we apply the functor  $[S^0, -]_*$  and we obtain the following long exact sequence

$$\begin{array}{c} \pi_0(X) \leftarrow \pi_0(A) \leftarrow \pi_0(\mathcal{P}) \leftarrow \\ \left\{ \begin{array}{l} \pi_1(X) \leftarrow \pi_1(A) \leftarrow \pi_1(\mathcal{P}) \leftarrow \\ \pi_2(X) \leftarrow \pi_2(A) \leftarrow \pi_2(\mathcal{P}) \leftarrow \dots \end{array} \right. \end{array} .$$

**Definition-Proposition 1.60** (Relative homotopy groups). We define the  $n$ -th relative homotopy group by

$$\pi_n(X, A) := \pi_{n-1}(\text{Path}(X, A)) \cong \pi_0(\Omega^{n-1}\text{Path}(X, A));$$

$\pi_2(X, A)$  is a group and for  $n \geq 3$ ,  $\pi_n(X, A)$  is an abelian group.

**Theorem 1.61** (Long exact sequence for a pair  $(X, A)$ ). We have the long exact sequence :

$$\begin{array}{c} \pi_0(X) \xleftarrow{\partial} \pi_0(A) \leftarrow \\ \left\{ \begin{array}{l} \pi_1(X, A) \xleftarrow{\partial} \pi_1(X) \leftarrow \pi_1(A) \leftarrow \\ \pi_2(X, A) \xleftarrow{\partial} \pi_2(X) \leftarrow \pi_2(A) \leftarrow \dots \end{array} \right. \end{array} .$$

REMARQUE. The map

$$[\Sigma^{n-1}S^0, \Omega X] = \pi_n(X) \rightarrow \pi_n(X, A) = [\Sigma^{n-1}S^0, \text{Path}(X, A)]$$

given by the inclusion  $\Omega(X) \rightarrow \text{Path}(X, A)$ , is well defined and coincide with the previous construction.

REMARQUE. **a completer** We want to explicit the map  $\partial$ . Consider  $J^n := \partial I^{n-1} \times I \cup I^{n-1} \times \{0\}$ , and maps  $(I^n, \partial I^n, J^n) \rightarrow (X, A, *)$  in  $\text{Top}_{(3)}$ . Then we have the isomorphism

$$\pi_n(X, A) \cong [(I^n, \partial I^n, J^n), (X, A, *)].$$

**a finir**

1.4.2. Long exact sequence for a fibration and computations.

**Theorem 1.62** (Long exact sequence for a fibration). Let  $p : E \rightarrow B$  be a Serre fibration, with  $(B, b_0)$ , a pointed path connected space, and  $e_0 \in F \subset E$ , the basepoint of  $F := p^{-1}(b_0)$ , the fiber of  $p$ . We have the long exact sequence :

$$\begin{array}{c} \{*\} \cong \pi_0(B) \leftarrow \pi_0(E) \leftarrow \pi_0(F) \leftarrow \\ \left\{ \begin{array}{l} \pi_1(E, F) \cong \pi_1(B) \leftarrow \pi_1(E) \leftarrow \pi_1(F) \leftarrow \\ \pi_2(E, F) \cong \pi_2(B) \leftarrow \pi_2(E) \leftarrow \pi_2(F) \leftarrow \end{array} \right. \end{array} ,$$

i.e. to a short exact sequence of space  $F \rightarrow E \rightarrow B$ , we have an associate long exact sequence in homotopy.

EXEMPLE. If  $X$  is a contractible space, then for all  $n \geq 0$ , we have  $\pi_n(X) = 0$ . If  $X$  is discrete, then for all  $n > 0$ , we have  $\pi_n(X) = 0$ .

**Proposition 1.63.** Let  $p : E \rightarrow B$  be a covering, with  $F$  the fiber.

- (1) We have, for  $n \geq 2$ , we have  $\pi_n(E) \cong \pi_n(B)$ .
- (2) If  $p$  is universal, i.e. if  $E$  is simply connected, then  $\pi_1(B) \cong_{\text{set}} \pi_0(F)$

EXEMPLE. Consider the covering  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow S^1$ . We have, for all  $n \geq 2$ ,

$$\pi_n(S^1) \cong \pi_n(\mathbb{R}) = 0$$

and  $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ .

**Theorem 1.64** (Homotopy groups of spheres). For all  $d > n$ , we have  $\pi_n(S^d) = 0$ , and  $\pi_n(S^n) = \mathbb{Z}$ .



1.5. CW-complexes.

MOTIVATION. Restrict to topological spaces (which have the same homotopy type) as "gluing of cells". The Historical origin is Euler characteristic, the first topological invariant : for all polygonal decomposition of  $S^2$

$$\chi(S^2) = \eta(0) - \eta(1) + \eta(2) = 2.$$

EXEMPLE (TOY MODEL). dessin 1

**Definition 1.65** (CW complex). A CW complex is a topological space  $X$  which is homeomorphic to

$$\emptyset \subset X^{(-1)} \subset X^{(0)} \subset \dots \subset X^{(n)} \subset \dots \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X^{(n)} = \text{Colim}_{n \in \mathbb{N}} X^{(n)}$$

where

$$\begin{array}{ccc} J_n \times S^{n-1} & \xrightarrow{\phi_n} & X^{(n-1)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ J_n \times D^n & \xrightarrow{\Phi_n} & X^{(n)} \end{array} .$$

with  $J_n$ , a discrete space, which is the set of  $n$ -dimensional cells that you glue on  $X^{(n-1)}$ .  $X^{(n)}$  is called the  $n$ -th skeleton of  $X$ ,  $\Phi_n$  the characteristic map and  $\phi_n$  the attaching map.

When there exists  $N \in \mathbb{N}$  such that for all  $m \geq N$ ,  $X^{(m)} = X^{(m+1)}$ , then we say  $X$  is a finite dimensional CW complex of dimension  $N$ .

REMARQUE (UNFOLD). a faire

- $n = 0:$
- $n = 1:$
- $n = 2:$

EXEMPLE (SPHERE).  $S^n \cong \{*\} \cup_f D^n$  with  $f : \partial D^n \mapsto \{*\}$ .

EXEMPLE (TORUS  $S^1 \times S^1$ ). One vertex, two 1-cells and one 2-cells. dessin

EXEMPLE (COMPLEX PROJECTIVE SPACE).  $\mathbb{P}^n \mathbb{C} = D^0 \cup_{f_0} D^2 \cup_{f_2} D^4 \cup_{f_4} \dots \cup_{f_{2n-2}} D^{2n}$

- $\mathbb{P}^0 \mathbb{C} = \mathbb{P} \mathbb{C} = \{*\} = D^0$
- $\mathbb{P}^1 \mathbb{C} =$
- $\mathbb{P}^{n+1} \mathbb{C} = \mathbb{P}^n \mathbb{C} \cup \mathbb{C}^{n+1}$

$$\begin{array}{ccc} S^{2n+1} & \xrightarrow{\text{Hopf}} & \mathbb{P}^n \mathbb{C} \\ \downarrow & & \downarrow \\ D^{2n+2} & \longrightarrow & \mathbb{P}^{n+1} \mathbb{C} \end{array} .$$

**Definition 1.66** (Graph, Tree). A Graph is a 1-dimensional CW complex. A tree is simply connected graph.

REMARK (CASE  $n = \infty$ ). On  $X$ , we consider the weak topology (also called colimit topology of final topology) :  $U \subset X$  is open if  $U \cap X^{(n)}$  is open for any  $n$  in  $\mathbb{N}$  (purpose : approximate  $X$  with  $X^{(N)}$  for a large enough  $N$ ), e.g. a map  $f : K \rightarrow X$  from a compact  $K$  to  $X$  is continuous if and only if  $f : K \rightarrow X^{(N)}$  continuous for some  $N$ ; also  $f : X \rightarrow Y$  is continuous if and only if  $f|_{X^{(n)}} : X^{(n)} \rightarrow Y$  is continuous for some/all  $n$  in  $\mathbb{N}$ .

EXEMPLE.  $\mathbb{P}^\infty \mathbb{R}, \mathbb{P}^\infty \mathbb{C}$ .

REMARQUE (TERMINOLOGY). The C of CW comes from Closed finiteness : the boundary of any cell intersects a finite number of other cells; the W of CW is for Weak topology.

**Definition 1.67** (Relative CW complex). A pair  $(X, A)$  with the same definition as CW complexes but replace  $X^{(-1)}$  by  $A$ . X finite?

dessin?

REMARQUE. The relative CW complex  $(X, \emptyset)$  is the CW complex  $X$ .

**Definition 1.68** (Sub CW complex). Let  $X$  be a CW complex.  $A \subset X$  is a *sub CW complex* of  $X$  if  $A$  is obtained by restrictions of the attaching maps of  $X$ , e.g.

$$\begin{array}{ccc} J_n \times S^{n-1} & \xrightarrow{\phi_n} & A^{(n-1)} \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ J_n \times D^n & \xrightarrow{\Phi_n} & A^{(n)} \end{array} .$$

A *CW pair*  $(X, A)$  where  $A$  is a sub CW complex of  $X$ .

REMARQUE. A CW pair  $(X, A)$  is also relatives CW complexes.

**Proposition 1.69.** *For any  $(X, A)$  relative CW complexes, the embedding  $A \hookrightarrow X$  is a cofibration.*

*Démonstration.*

$$\begin{array}{ccc} \coprod J_n S^{n-1} & \xrightarrow{\phi_n} & X^{(n-1)} \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ \coprod J_n D^n & \xrightarrow{\Phi_n} & X^{(n)} \end{array} .$$

then

$$\emptyset \hookrightarrow A \hookrightarrow X^{(0)} \hookrightarrow \dots \hookrightarrow X^{(n)} \hookrightarrow \dots \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X^{(n)} = \text{Colim}_{n \in \mathbb{N}} X^{(n)}$$

**X finite?**

□

REMARK (EULER CHARACTERISTIC). The Euler characteristic of a CW complex  $X$  is given by

$$\chi(X) := \sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^n |J_n|$$

It is a homotopy invariant.

**Definition 1.70** (Cellular map). A continuous map  $f : X \rightarrow Y$  between CW complexes is *cellular* if, for all  $n$  in  $\mathbb{N}$ , we have

$$f(X^{(n)}) \subset Y^{(n)} .$$

We note by CW-cx **notation a approuver**, the category of CW complexes, which has CW complexes for objects and cellular maps for morphisms.

EXERCISE 2. Let  $X$  and  $Y$  be two CW complexes.

- (1) Show that  $X \times Y$  is a CW complex.
- (2) Show that, if  $(X, A)$  is a CW-pair, then  $X/A$  is a CW complex.
- (3) Consider a cellular map  $f : X \rightarrow Y$ , then we have the factorization

$$\begin{array}{ccc} & f & \\ & \curvearrowright & \\ X & \longrightarrow & \text{Cyl}(f) \xrightarrow{\sim} Y \end{array} .$$

If  $f : X \rightarrow Y$  is a homotopy equivalence, then  $f_* : \pi_n(X) \cong \pi_n(Y)$  for all  $n$ .

**Definition 1.71** (Weak(-homotopy) equivalence). A continuous map  $f : X \rightarrow Y$  such that, for all  $x$  in  $X$  and for all  $n$  in  $\mathbb{N}$ ,  $f_* : \pi_n(X, x) \rightarrow \pi_n(Y, f(x))$  is an isomorphism, is called a *weak homotopy equivalence*.

REMARQUE. In general, thus does not define an equivalence relation on all topological space

REMARQUE. For pointed CW complex  $(X, x_0)$ , we assume that the basepoint is in the set  $X^{(0)}$ .

**Theorem 1.72** (Whitehead). *Let  $X$  and  $Y$  be two CW complexes. Any map  $f : X \rightarrow Y$  is an homotopy equivalence if, and only if,  $f$  weak homotopy equivalence.*

REMARQUE. The hypothesis that  $X$  and  $Y$  are CW complexes is necessary.

$$\text{graph } \sin(1/x)$$

Consider  $Y = \{x = 0\} \cup \{y = \sin(\frac{1}{x})\} : Y$  is connected and has 2 path connected components. (not a CW complex) Consider  $f : X = \{0, 1\} \rightarrow Y$  : it is a weak equivalence, but it is not a homotopy equivalence because for this, we would need  $g : Y \rightarrow X$  such that ...

REMARQUE. We need a map  $f$ . Take  $X = S^2 \times \mathbb{P}^3\mathbb{R}$  and  $Y = S^3 \times \mathbb{P}^2\mathbb{R}$ . For all  $n$  in  $\mathbb{N}$ , we have  $\pi_n(X) \cong \pi_n(Y) (\cong \pi_n(S^2 \times S^3)$  for  $n \geq 2$ ). But, there does not exist a map  $f : X \rightarrow Y$  such that  $f_* : \pi_n(X) \rightarrow \pi_n(Y)$ , because  $H_5(X) \not\cong H_5(Y)$ .

**Proposition 1.73.** *a deplacer?*  $\pi_n(X \times Y) \cong \pi_n(X) \times \pi_n(Y)$ .

**Lemme 1.74** (Comparison). *Let  $(X, A)$  be a relative CW complex and  $(Y, B)$  be a pair of topological spaces such that, for any  $n$  for which  $X^{(n-1)} \subsetneq X^{(n)}$  ( $X$  has at least one  $n$ -cell), then  $\pi_n(Y, B)$ . Then any continuous map  $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  between topological pairs is homotopic relative to  $A$ , to a map  $g : X \rightarrow B$ .*

*Démonstration.* By induction on the dimension of the skeleton, we build the map  $g$  such that the restriction of  $g$  to  $X^{(n)}$  go to  $B$ .

**Initiation:** Let  $n_0$  be the lower dimension for the cells of  $X$ .

$$\begin{array}{ccccc} J_{n_0} \times S^{n_0-1} & \xrightarrow{f_{n_0}} & A & \xrightarrow{f} & B \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ J_{n_0} \times D^{n_0} & \xrightarrow{\Phi_{n_0}} & X^{(n_0)} & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

the map  $f\Phi_{n_0} : (J_{n_0} \times D^{n_0}, J_{n_0} \times S^{n_0-1}) \rightarrow (Y, B)$ , but  $\pi_{n_0}(Y, B) = 0$  then

$$f\Phi_{n_0} \underset{rel. J_{n_0} \times S^{n_0-1}}{\sim} h \ g_{n_0} : (J_{n_0} \times D^{n_0}, J_{n_0} \times S^{n_0-1}) \rightarrow B.$$

where  $h(-, 0) = f\Phi_{n_0}$  and  $h(-, 1) = g_{n_0}$ . Then

$$\begin{array}{ccccc} J_{n_0} \times S^{n_0-1} \times I & \xrightarrow{f_{n_0}} & A \times I & \xrightarrow{\tilde{f}} & B \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow & & \downarrow \\ J_{n_0} \times D^{n_0} \times I & \xrightarrow{\Phi_{n_0}} & X^{(n_0)} \times I & & Y \\ & \searrow h & \text{---} \exists H & & \downarrow \end{array}$$

By pushout, there exists  $H : X^{(n_0)} \times I \rightarrow Y$  such that  $H(-, 0) = f$ ,  $H(a, -) = \text{cst}$  and, for all  $x$  in  $X^{(n_0)}$ ,  $H(x, 1)$  is in  $B$ , because  $h(-, 1) = g_{n_0}$  which has its image in  $B$ .

So  $f|_{X^{(n_0)}} : X^{(n_0)} \rightarrow Y$  is homotopic relative to  $A$  to  $H(-, 1)$ ; but

$$\begin{array}{ccc} X^{(n_0)} & \longrightarrow & X^{(n_0)} \times I \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & X \times I \\ & \searrow f & \text{---} \exists \mathcal{H} & \searrow H \\ & & & Y \end{array}$$

Then  $\mathcal{H}(-, 1) : X \rightarrow Y \sim_{rel. A} \mathcal{H}(-, 0) = f$  such that  $H(X^{(n_0)}, 1) = \mathcal{H}(X^{(n_0)}, 1) \subset B$ .

$n \Rightarrow n + 1$ : We use exactly the same proof for

$$\left\{ \begin{array}{l} n_0 \longleftrightarrow n + 1 \\ A \longleftrightarrow X^{(n)} \\ X^{(n_0)} \longleftrightarrow X^{(n+1)} \\ f \longleftrightarrow \mathcal{H}_n(-, 1) \end{array} \right.$$

Then there exists  $\mathcal{H}_n : X \times I \rightarrow Y$  such that  $\mathcal{H}_n(-, 0) = f$ ,  $\mathcal{H}_n(X^{(n_0)}, 1) \subset B$ ,

If the dimension of  $X$  is finite, this finish the proof. If not, one considers  $\tilde{\mathcal{H}} : X \times I \rightarrow Y$ , given, for all  $n$  in  $\mathbb{N}$ , by  $\tilde{\mathcal{H}}|_{X \times [1 - 1/2^n, 1 - 1/n^{n+1}]} = \mathcal{H}_n$ . Then

$$\begin{cases} \tilde{\mathcal{H}}(-, 0) = f \\ \tilde{\mathcal{H}}(-, 1) : X \rightarrow B \\ \tilde{\mathcal{H}}(a, t) = f(a) \end{cases}$$

For  $t = 1$ ,  $\tilde{\mathcal{H}}(x, 1) : x$  in  $X$  then  $x$  is in  $X^{(N)}$  for some  $N$ , then  $\tilde{\mathcal{H}}(x, t)$  constant in  $t$  for  $t \geq 1 - \frac{1}{2^{N+1}}$ .

□

**Definition 1.75** ( $n$ -connected map). **a deplacer?** A map  $h : X \rightarrow Y$  is  $n$ -connected if, for all  $k < n$ , the morphism  $h_* : \pi_k(X) \xrightarrow{\cong} \pi_k(Y)$  is an isomorphism and the morphism  $h_* : \pi_n(X) \rightarrow \pi_n(Y)$  is surjective.

**Corollary 1.76.** Let  $h : B \rightarrow Y$  be a weak equivalence. Then, for all CW complex  $Z$ , we have the isomorphism  $h_* : [Z, B] \xrightarrow{\cong} [Z, Y]$ .

*Démonstration.* **Surjectivity:** Use the factorization  $h : B \hookrightarrow \text{Cyl}(h) \xrightarrow{\sim} Y$  to work with  $h$  embedding. Now, use the lemma  $B \subset Y$ . We use the long exact sequence for pairs

$$\cdots \longrightarrow \pi_n(B) \xrightarrow[\cong]{h} \pi_n(Y) \longrightarrow \pi_n(Y, B) = 0 \longrightarrow \cdots$$

We apply the lemma to the pair  $(Z, \emptyset)$  (" $= (X, A)$ ") :  $f : Z \rightarrow Y \sim g : Z \rightarrow B \subset Y$  implies the surjectivity of  $h_*$ .

**Injectivity:** Let  $f, g : Z \rightarrow B$  with  $Z$ , a CW complex and such that there exists a homotopy  $H$  between  $f$  and  $g$ . We apply the comparison lemma to

$$\begin{array}{ccc} Z \times I & \xrightarrow{H} & Y \\ \uparrow & & \uparrow \\ Z \times \partial I & \longrightarrow & B \end{array}$$

**a finir**

□

*Whitehead theorem's proof.* Let  $f : X \rightarrow Y$  be a weak equivalence. Apply the corollary to  $h = f$ ,  $Z = Y$ , then  $f_* : [Y, X] \cong [Y, Y]$  which is equivalent to there exists  $g : Y \rightarrow X$  such that  $fg \sim \text{id}_Y$ . This implies  $f_*g_*(fg)_* : \pi_n(Y) \cong \pi_n(Y)$ . We use the same argument :  $g_* : [X, Y] \cong [X, X] \Leftrightarrow g\phi \sim \text{id}_X$ . This implies  $\phi \sim fg\phi \sim f$  then  $gf \sim g\phi \sim \text{id}_X$ .

□

**Theorem 1.77** (Whitehead –  $n$ -connected version). Let  $X$  and  $Y$  be two CW complexes such that  $\dim X, Y = \infty$ . Any  $n$ -connected map  $f : X \rightarrow Y$  is a homotopy equivalence if, and only if,  $f$  weak homotopy equivalence.

**REMARQUE.** **a corriger?** Let  $X$  be a finite CW complex with  $\dim X > 1$ .  $X$  is not contractible implies it has  $\infty$  many  $\pi_n(X) \neq 0$ .

By the Whitehead theorem, we define an equivalence relation on CW complexes.

**Corollary 1.78.** Let  $X$  be a CW complex.  $X$  is contractible if, and only if, for all  $n$  in  $\mathbb{N}$ ,  $\pi_n(X) = 0$ .

*Démonstration.*  $X \twoheadrightarrow \{*\}$ .

□

**Theorem 1.79** (CW approximation). For any topological space  $X$ , there exists a CW complex  $X_{CW}$  and a weak equivalence  $\omega_X : X_{CW} \xrightarrow{\sim} X$ .

For any map  $f : X \rightarrow Y$ , there exists a map  $F : X_{CW} \rightarrow Y_{CW}$ , unique up to homotopy, such that the following diagram

$$\begin{array}{ccc} X_{CW} & \xrightarrow{\omega_X} & X \\ \downarrow F & & \downarrow f \\ Y_{CW} & \xrightarrow{\omega_Y} & Y \end{array}$$

commutes up to homotopy.

*Démonstration.* Idea : "recreate"  $\pi_n(X)$  by gluing cells and using a presentation  
Apply corollary to  $\omega_Y : Y_{CW} \rightarrow Y$  : we have

$$\begin{array}{ccc} [X_{CW}, X_{CW}] & \xrightarrow{\cong} & [X_{CW}, Y] \\ [F] & \mapsto & [f\omega_X] \end{array}$$

then there exists  $F$  up to homotopy such that  $\omega_Y F \sim f\omega_X$ . □

1.5.1. *Hurewicz morphism.* Let  $f : S^n \rightarrow X$  be a continuous map. Then we have  $f_* : H_n(S^n) \cong \mathbb{Z} \rightarrow H_n(X)$ . Then we have  $[S^n, X] \rightarrow H_n(X)$  and we have

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H} : \pi_n(X) & \longrightarrow & H_n(X) \\ [f] & \longmapsto & f_*(1) \end{array}$$

REMARQUE.  $\mathcal{H}$  is group morphism.

**Theorem 1.80** (Brouwer – case  $X = S^n$ ).  $\mathcal{H} : \pi_n(S^n) \longrightarrow H_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$ .

**Definition 1.81** (Degree of a map). **a faire**

**Theorem 1.82** (Hurewicz). Let  $X$  be a  $(n-1)$ -connected topological space i.e. for all  $1 \leq k, n$ ,  $\pi_k(X) = 0$ .

(1) for all  $1 \leq k, n$ ,  $\tilde{H}_k(X) = 0$ ;

(2) the morphism  $\mathcal{H} : \pi_n(X) \xrightarrow{\cong} H_n(X)$  is an isomorphism.

REMARQUE. For  $n = 1$ , we have

$$H_1(X) = \frac{\pi_1(X)}{[\pi_1(X), \pi_1(X)]}.$$

REMARQUE. We have a relative version of this result : for  $(X, A)$   $n-1$ -connected i.e. for all  $1 \leq k, n$ ,  $\pi_k(X) \cong \pi_k(A)$ , then we have the following isomorphism of groups

$$\pi_n(X, A) \cong H_n(X, A).$$

**Corollary 1.83.** Let  $X$  and  $Y$  be two simply connected CW complexes. If  $f : X \rightarrow Y$  is a homology isomorphism, then  $f$  is a homotopy equivalence.

*Démonstration.* We have the following factorization :

$$X \xrightarrow{\quad f \quad} Y$$

$\searrow \quad \swarrow$   
 $X \longrightarrow \text{Cyl}(f) \xrightarrow{\sim} Y$

$$\cdots \rightarrow \pi_{n+1}(\text{Cyl}(f), X) = 0 \rightarrow \pi_n(X) \xrightarrow{\cong} \pi_n(\text{Cyl}(f)) \longrightarrow \pi_n(\text{Cyl}(f), X) = 0 \rightarrow \pi_{n-1}(X) \xrightarrow{\cong} \cdots$$

$$\cdots \rightarrow H_{n+1}(\text{Cyl}(f), X) = 0 \rightarrow H_n(X) \xrightarrow{\cong} H_n(\text{Cyl}(f)) = H_n(Y) \rightarrow H_n(\text{Cyl}(f), X) = 0 \rightarrow H_{n-1}(X) \xrightarrow{\cong} \cdots$$

**a finir** □

**A ajouter ? blacker massey thm, Posnikov tower, Freudental thm, spectral sequence**

## 2. ENSEMBLES SIMPLICIAUX

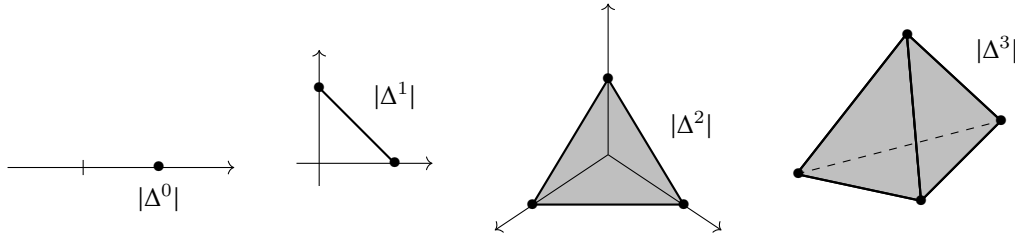
Nous venons de voir que les CW complexes fournissent une très large famille d'espace topologique (tout espace topologique est faiblement équivalent à un CW complexe). Malheureusement, la donnée d'un CW complexe n'est pas "simple" (comment code-t-on cela dans un ordinateur?). L'idée ici sera de passer du modèle utilisant des disques  $(D^n, S^{n-1})$  comme brique de base à des  $n$ -simplexes géométriques standards  $(|\Delta^n|, \partial|\Delta^n|)$ . La donnée des recollements de cellules est alors beaucoup plus simple car purement combinatoire. Ceci donne naissance à la notion d'ensembles simpliciaux. L'étudiant-e mathématicien-ne est chanceux-se : la théorie des ensembles simpliciaux admet un paradigme, un exemple sur lequel (presque) toutes les définitions et propriétés peuvent être lues facilement, il s'agit des simplexes standards.

**2.1. Espaces topologiques triangulés.** Les diverses notions de la topologie algébrique, comme les groupes de (co)homologie ou les groupes d'homotopie, s'avèrent en général difficiles à calculer. Comme toujours, toute information supplémentaire est la bienvenue pour simplifier de tels calculs. Dans cette section, nous considérerons les espaces topologiques munis d'une bonne décomposition en cellules qui auront la forme de points, d'intervalles, de triangles, de tétraèdres, etc. Plus précisément, en toute dimension, les briques de base sont les simplexes géométriques.

**Definition 2.1** (Simplexe géométrique). Un  $n$ -simplexe géométrique est l'enveloppe convexe de  $n + 1$  points indépendants d'un espace affine.

EXEMPLE. L'exemple le plus naturel est le  $n$ -simplexe géométrique standard qui est l'enveloppe convexe des  $n + 1$  vecteurs de la base canonique de  $\mathbb{R}^{n+1}$  :

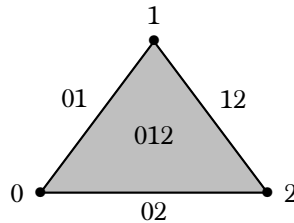
$$|\Delta^n| := \left\{ (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_i \geq 0, \forall i \in \{0, \dots, n\}, \text{ et } \sum_{i=0}^n x_i = 1 \right\}.$$



Comme seule la donnée combinatoire des  $n + 1$ -points  $v_0, \dots, v_n$  nous intéresse, nous noterons un simplexe géométrique par  $\langle v_0, \dots, v_n \rangle$ .

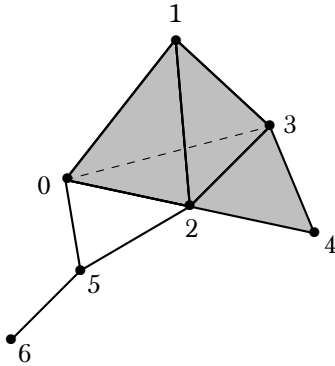
**Definition 2.2** (Face). Soit  $I = \{i_0, \dots, i_k\} \subset \{0, \dots, n\}$ , on appelle  $I^e$ -face d'un simplexe géométrique  $\langle v_0, \dots, v_n \rangle$ , le sous- $k$ -simplexe géométrique  $\langle v_{i_0}, \dots, v_{i_k} \rangle$ . Le  $j^e$ -sommet d'un simplexe géométrique est sa  $\{j\}^e$ -face  $\langle v_j \rangle$ .

EXEMPLE. Les différentes faces du 2-simplexe géométrique standard sont les suivantes. Dans ce texte, nous noterons les faces des simplexes géométriques standards simplement par  $i_0 \dots i_k$ .



Une première notion d'espace topologique formée à partir de ces éléments est la suivante.

**Definition 2.3** (Complexe simplicial). Un *complexe simplicial*  $|\mathfrak{X}|$  de  $\mathbb{R}^N$  est la donnée d'une collection de simplexes géométriques, de dimensions quelconques, telle que toute intersection d'une paire de simplexes est une face de chacun d'eux.

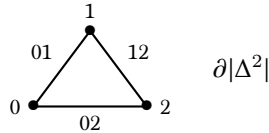


Les classes d'équivalence à homéomorphisme près des complexes simpliciaux sont représentées fidèlement par des données combinatoires simples : une collection  $\mathfrak{X}$  de sous-ensembles (faces) d'un ensemble (sommets) telle que :  $Y \in \mathfrak{X}, Z \subset Y \Rightarrow Z \in \mathfrak{X}$  . Pour la figure donnée ci-dessus, cela donne :

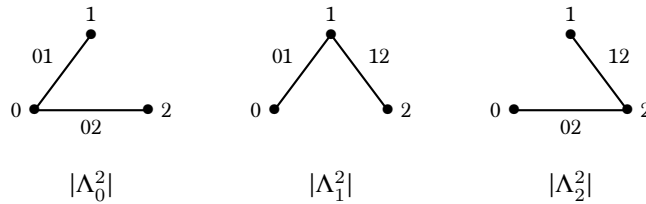
$$\{0\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{0, 3\}, \{0, 5\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \\ \{5, 6\}, \{0, 1, 2\}, \{0, 1, 3\}, \{0, 2, 3\}, \{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{0, 1, 2, 3\} .$$

**EXEMPLES.**

- ◊ Tout simplexe géométrique  $\langle v_0, \dots, v_n \rangle$  considéré avec l'ensemble de ses faces forme un complexe simplicial. Dans ce cas, sa donnée combinatoire est formée de tous les sous-ensembles de  $\{v_0, \dots, v_n\}$ .
- ◊ On peut aussi considérer un simplexe géométrique  $\langle v_0, \dots, v_n \rangle$  amputé de sa face de dimension maximale ; on le note  $\partial\langle v_0, \dots, v_n \rangle$  car il correspond au bord de  $\langle v_0, \dots, v_n \rangle$ . Sa donnée combinatoire est formée de tous les sous-ensembles de  $\{v_0, \dots, v_n\}$  sauf  $\{v_0, \dots, v_n\}$  lui-même. Ceci nous fournit un modèle pour la sphère de dimension  $n - 1$ , pour  $n \geq 1$ .



- ◊ Le  $k^e$ -cortet de dimension  $n$  est le complexe simplicial  $|\Lambda_k^n|$  obtenu à partir de  $\partial|\Delta^n|$  en retirant la face  $0 \cdots \widehat{k} \cdots n$ .

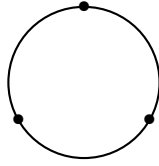


**Theorem 2.4** (Simplicial approximation). *Tout CW complexe est homotopiquement équivalent à un complexe simplicial.*

**Definition 2.5** (Triangulation). Une *triangulation* d'un espace topologique  $X$  est la donnée d'un complexe simplicial  $\mathfrak{X}$  est d'un homéomorphisme  $f : \mathfrak{X} \rightarrow X$ .

**EXEMPLE.**

- ◊ Tout  $n$ -simplexe amputé de sa face de dimension maximale fournit un modèle de triangulation pour la sphère de dimension  $n - 1$ .



Cette définition combinatoirement simple a un principal écueil : le nombre de simplexes pour décomposer un espace est loin d'être optimal. En effet, deux faces distinctes ne peuvent pas avoir les mêmes sommets et les sommets d'une face sont distincts. Dans l'exemple du cercle, ces restrictions font que l'on ne peut pas l'écrire comme deux segments joints aux deux bouts ou comme un seul segment à sommets confondus. Il faut donc au moins trois segments pour obtenir le cercle. Pour le tore, il faut au minimum 7 sommets, 21 arêtes et 14 triangles ...

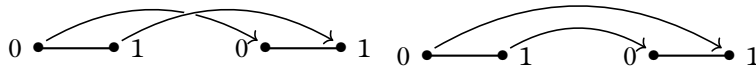
REMARQUE. Cette question est loin d'être gratuite, par exemple lorsque l'on veut calculer les groupes d'homologie d'un espace topologique car la dimension des espaces vectoriels en jeu est égale aux nombres de simplexes de la triangulation. Par exemple, dans les méthodes actuelles de reconnaissance des formes des neurones utilisant des outils homologiques, la taille de ces espaces est de l'ordre de 30 000.

Essayons donc de trouver une notion plus souple et générale. Pour cela, on va chercher à encoder la manière dont les différents simplexes se recollent le long de leurs faces.

**Definition 2.6** (Application simpliciale). Une *application simpliciale*  $f : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}$  entre complexes simpliciaux est une application entre les ensembles de sommets de  $\mathfrak{X}$  et ceux de  $\mathfrak{Y}$  telle que  $\langle f(v_0), \dots, f(v_k) \rangle$  soit un simplexe de  $\mathfrak{Y}$  pour tout simplexe  $\langle v_0, \dots, v_k \rangle$  de  $\mathfrak{X}$ .

Une telle donnée induit une unique application continue  $\mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}$  par interpolation linéaire, c'est-à-dire en utilisant les coordonnées barycentriques.

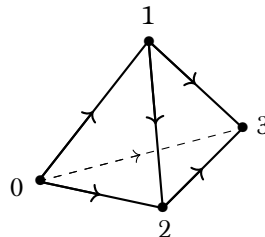
EXEMPLE. Les deux applications simpliciales bijectives entre deux 1-simplexes sont les suivantes.



Comme l'exemple ci-dessus le montre, le nombre d'applications simpliciales n'est pas optimale : d'un point de vue topologique, il n'est pas utile d'avoir autant d'applications. Alors soyons fainéants (ou rusés) et imposons une condition supplémentaire.

**Definition 2.7** (Complexe simplicial ordonné). Un *complexe simplicial ordonné* est un complexe simplicial muni d'un ordre total sur son ensemble de sommets. Les applications simpliciales entre complexes simpliciaux ordonnés sont les applications simpliciales qui préservent strictement ces ordres.

REMARQUE. Cette donnée supplémentaire induit une orientation pour toutes les faces d'un complexe simplicial.



EXEMPLE. Il n'existe alors plus qu'une application simpliciale bijective entre deux 1-simplexes ordonnés.



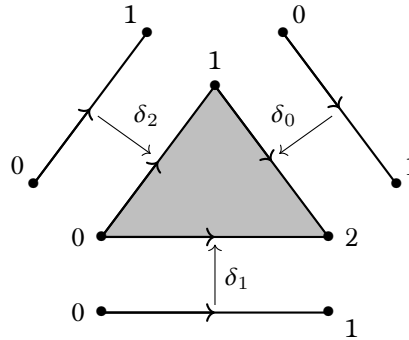
Les applications simpliciales entre complexes simpliciaux ordonnés sont caractérisées par l'application ensembliste croissante entre les ensembles ordonnés de sommets. Par exemple, il y a  $n + 1$  applications simpliciales injectives depuis un  $(n-1)$ -simplexe géométrique ordonné vers un  $n$ -simplexe géométrique ordonné. Traitons explicitement le cas des simplexes géométriques standards  $|\Delta^n|$ . On note

$$[n] := \{0 < \dots < n\}$$

l'ensemble totalement ordonné à  $n + 1$  éléments, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Les  $n + 1$  applications  $\delta_i : [n-1] \rightarrow [n]$ , pour  $0 \leq i \leq n$ , sont les injections qui ne prennent pas la valeur  $i$  :

$$\delta_i(k) := \begin{cases} k & \text{pour } k < i, \\ k + 1 & \text{pour } k \geq i, \end{cases}$$

Ces applications sont appelées les *cofaces* et, par léger abus de notation, on note encore  $\delta_i$  les applications correspondantes entre simplexes géométriques standards ordonnés  $|\Delta^{n-1}|$  et  $|\Delta^n|$ .



**Lemme 2.8.** Les cofaces vérifient les relations suivantes :  $\delta_j \delta_i = \delta_i \delta_{j-1}$  pour  $i < j$ .

REMARQUE. Comme le contexte est clair, nous n'utilisons pas d'indice  $n$  dans la notation des cofaces ; cela permet d'alléger grandement les écritures.

Dualement, il y a donc  $n + 1$  manières de recoller un  $n$ -simplexe géométrique ordonné sur un  $n - 1$ -simplexe géométrique ordonné. Utilisons maintenant ces propriétés pour décrire un complexe simplicial ordonné  $\mathfrak{X}$  comme un recollement de simplexes géométriques ordonnés. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , notons  $X_n$  l'ensemble des  $n$ -simplexes géométriques ordonnés qui composent  $\mathfrak{X}$ . Le complexe simplicial ordonné  $\mathfrak{X}$  est alors complètement caractérisée par la donnée des recollements des  $n$ -simplexes géométriques ordonnés sur les  $(n - 1)$ -simplexes géométriques ordonnés, ce qui revient à se donner  $n + 1$  applications  $d_i : X_n \rightarrow X_{n-1}$ , avec  $0 \leq i \leq n$ , vérifiant les relations duales de celles des cofaces. Ceci induit la définition suivante.

**Définition 2.9** ( $\Delta$ -complexe). Un  $\Delta$ -complexe  $\mathfrak{X}$  est la donnée d'une collection  $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  d'ensembles munis d'applications, appelées *faces*,  $d_i : X_n \rightarrow X_{n-1}$ , pour  $0 \leq i \leq n$ , vérifiant  $d_i d_j = d_{j-1} d_i$ , pour  $i < j$ .

EXEMPLE. Le  $\Delta$ -complexe associé au  $n$ -simplexe géométrique ordonné standard correspond à la donnée suivante

$$X_0 = \{0, \dots, n\}, X_1 = \{01, \dots, (n-1)n\}, \dots, X_n = \{012 \dots n\}, X_{n+1} = \emptyset, \dots,$$

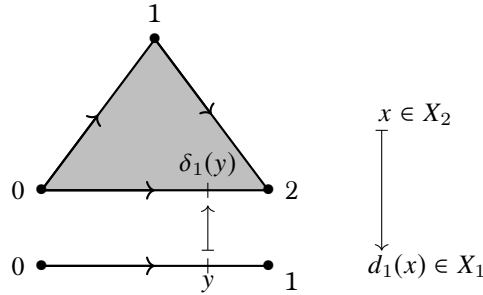
munie des applications :  $d_j(i_0 \dots i_k) = i_0 \dots \widehat{i_j} \dots i_k$ .

Réciproquement, l'espace topologique cellulaire ainsi encodée combinatoirement s'obtient via la construction suivante.

**Definition 2.10** (Réalisation géométrique). La *réalisation géométrique* d'un  $\Delta$ -complexe  $\mathfrak{X}$  est l'espace topologique quotient

$$|\mathfrak{X}|_{\Delta} := \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} X_n \times |\Delta^n| / \sim,$$

par la relation d'équivalence engendrée par les relations  $(x, \delta_i(y)) \sim (d_i(x), y)$ , pour  $x \in X_n, y \in |\Delta^{n-1}|, 0 \leq i \leq n$ .



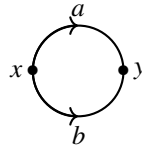
Tout complexe simplicial ordonné induit un  $\Delta$ -complexe dont la réalisation géométrique lui est homéomorphe. Inversement, la réalisation géométrique d'un  $\Delta$ -complexe  $\mathfrak{X}$  ne forme pas nécessairement un complexe simplicial pour la donnée combinatoire  $\mathfrak{X}$ . Par contre, il existe toujours un complexe simplicial homéomorphe à la réalisation géométrique  $|\mathfrak{X}|_{\Delta}$ , quitte pour cela à considérer des subdivisions barycentriques. Ce qu'il faut en retenir, c'est que la notion combinatoire simple de  $\Delta$ -complexe est plus riche et souple que celle de complexe simplicial. Notons déjà que l'on peut avoir des cellules en toute dimension, même tendant vers l'infini. En outre, on peut utiliser moins de cellules qu'auparavant, comme le montre les exemples suivants.

EXEMPLE.

◊ Le  $\Delta$ -complexe

$$X_0 = \{x, y\}, X_1 = \{a, b\}, X_2 = \emptyset, \dots; \quad d_0(a) = d_0(b) = y, \quad d_1(a) = d_1(b) = x$$

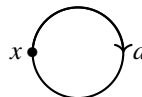
permet de réaliser le cercle comme recollement de deux segments.



◊ Le  $\Delta$ -complexe

$$X_0 = \{x\}, X_1 = \{a\}, X_2 = \emptyset, \dots; \quad d_0(a) = d_1(a) = x,$$

permet de réaliser le cercle comme recollement d'un segment sur ses deux extrémités.



Deux questions se posent alors : comment obtenir la définition de  $\Delta$ -complexe de manière plus simple et comment définir la notion d'application entre  $\Delta$ -complexes ? Les réponses à ces deux questions vient en utilisant la théorie des catégories. Les éléments d'un  $\Delta$ -complexe sont indicés par les entiers naturels, soit, de manière équivalente, par les ensembles ordonnés  $[n]$ , pour  $n \in \mathbb{N}$ , et les applications entre deux éléments consécutifs correspondent aux applications strictement croissantes "élémentaires". On considère donc la catégorie suivante.

**Definition 2.11** (Catégorie  $\bar{\Delta}$ ). La catégorie  $\bar{\Delta}$  admet pour objets les ensembles totalement ordonnés  $[n] = \{0 < \dots < n\}$ , pour  $n \in \mathbb{N}$ , et pour morphismes les applications strictement croissantes.

REMARQUE. Le notation  $\bar{\Delta}$  utilisée pour représenter cette catégorie vient du fait qu'elle peut être définie de manière équivalente comme la catégorie dont les objets sont les simplexes géométriques ordonnés standards et dont les morphismes sont les applications simpliciales strictement croissantes.

**Proposition 2.12.** *La notion de  $\Delta$ -complexe est équivalente à celle de foncteur contravariant de la catégorie  $\bar{\Delta}$  vers celle des ensembles :  $\bar{\Delta}^{\text{op}} \rightarrow \text{Ens}$ .*

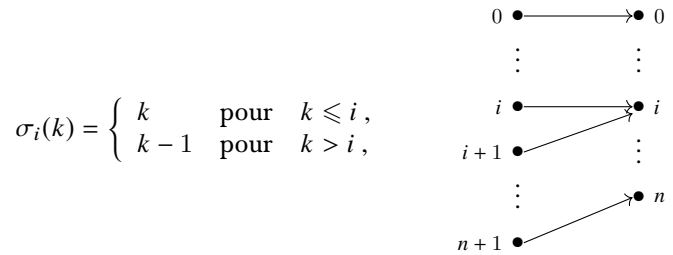
*Démonstration.* La démonstration repose exclusivement sur le fait que la catégorie  $\bar{\Delta}$  admet pour présentation celle dont les générateurs sont les cofaces  $\delta_i$  vérifiant les relations données au lemme 2.8. Nous en détaillerons tous les arguments dans la section suivante lorsque nous nous intéresserons à la catégorie  $\Delta$  plus grosse encore.  $\square$

Dans le langage des catégories, on parle alors de préfaisceaux ensemblistes sur la catégorie  $\bar{\Delta}$ . Grâce à cette description des  $\Delta$ -complexes comme des foncteurs, on obtient une notion de morphisme en considérant les transformations naturelles, ce qui revient à la définition suivante. On notera la catégorie des  $\Delta$ -complexes par  $\Delta\text{Cx}$ .

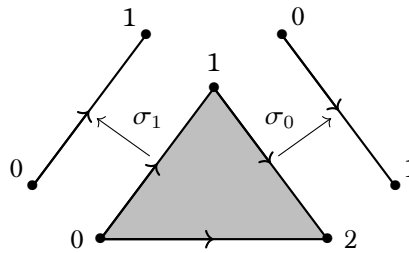
**Definition 2.13** (Morphisme de  $\Delta$ -complexes). Un *morphisme*  $f : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}$  de  $\Delta$ -complexes est la donnée d'une collection d'applications ensemblistes  $f_n : X_n \rightarrow Y_n$  commutant aux faces respectives.

Nous avons vu que le passage des complexes simpliciaux aux  $\Delta$ -complexes permettait de considérer plus d'objets. Qu'en est-il pour les applications ? Nous allons voir que le compte n'y est pas (encore).

Considérons les applications simpliciales surjectives depuis un  $(n+1)$ -simplexe géométrique ordonné vers un  $n$ -simplexe géométrique ordonné ; elles consistent à écraser un  $(n+1)$ -simplexe géométrique sur une de ses faces de dimension  $n$ . Comme précédemment, nous allons décrire le cas des simplexes géométriques standards ordonnés. Il y a  $n+1$  telles applications simpliciales, ce sont les surjections  $\sigma_i : [n+1] \rightarrow [n]$ , pour  $0 \leq i \leq n$ , qui envoient  $i$  et  $i+1$  sur  $i$  :



Ces applications sont appelées les *codégénérescences* et, par léger abus de notation, on note encore  $\sigma_i$  les applications correspondantes entre simplexes géométriques standards ordonnés  $|\Delta^{n+1}|$  et  $|\Delta^n|$ .



Est-ce que ces applications simpliciales entre complexes simpliciaux peuvent être écrites au niveau des  $\Delta$ -complexes associés ? La réponse est négative. En effet, le  $\Delta$ -complexe associé à  $|\Delta^{n+1}|$  possède un ensemble non-trivial en dimension  $n+1$  alors que le  $\Delta$ -complexe associé à  $|\Delta^n|$  admet des ensembles vides à partir de la dimension  $n$ . Il est alors impossible de définir un morphisme du premier vers le second.

Il nous faut donc introduire une notion plus riche que celle de  $\Delta$ -complexe. Pour cela, nous allons considérer une nouvelle catégorie qui a les mêmes objets que  $\bar{\Delta}$  mais qui admet toutes les applications croissantes comme morphismes.

## 2.2. La catégorie des simplexes.

**Definition 2.14** (Catégorie des simplexes  $\Delta$ ). La *catégorie des simplexes*, notée  $\Delta$ , admet pour objets les ensembles totalement ordonnés  $[n] = \{0 < \dots < n\}$ , pour  $n \in \mathbb{N}$ , et pour morphismes les applications croissantes.

REMARQUE. Le nom donné à cette catégorie se justifie par le fait qu'elle peut être définie de manière équivalente come la catégorie dont les objets sont les simplexes géométriques ordonnés standards et dont les morphismes sont les applications simpliciales croissantes.

La factorisation d'une application ensembliste comme composée d'une surjection et d'une injection se raffine de la manière suivante avec les cofaces et les codégénérescences.

**Proposition 2.15** (Forme normale des morphismes de la catégorie des simplexes). *Tout morphisme  $\varphi : [n] \rightarrow [m]$  de la catégorie des simplexes s'écrit de manière unique sous la forme :*

$$(2) \quad \varphi = \delta_{i_1} \dots \delta_{i_r} \sigma_{j_1} \dots \sigma_{j_s} ,$$

avec  $i_1 \leq \dots \leq i_r$  et  $j_1 < \dots < j_s$  où  $m = n - s + r$ .

DÉMONSTRATION. Montrons d'abord que tout morphisme  $\varphi : [n] \rightarrow [m]$  peut d'écrire sous la forme souhaitée. Posons  $p := |\text{Im}\varphi| - 1$  le cardinal de l'image de l'application  $\varphi$  et considérons la bijection  $[p] \cong \text{Im}\varphi$  qui préserve l'ordre. L'application  $\varphi$  se factorise en la composée  $\varphi = \iota\pi$  :

$$[n] \xrightarrow{\pi} [p] \xrightarrow{\iota} [m] ,$$

où  $\pi$  est surjective et  $\iota$  injective. Si on note  $[m] = \text{Im}\varphi \sqcup \{i_1, i_2 + 1, \dots, i_r + r - 1\}$ , avec  $r = m - p$  et  $i_1 \leq \dots \leq i_r$ , alors  $\iota = \delta_{i_1} \dots \delta_{i_r}$ . Soient maintenant  $q_0, \dots, q_p$  les plus grands antécédents de  $0, \dots, p$  respectivement. Si on note  $[n] = \{q_0, \dots, q_p\} \sqcup \{j_1, \dots, j_s\}$ , avec  $s = n - p$  et  $j_1 < \dots < j_s$ , alors  $\pi = \sigma_{j_1} \dots \sigma_{j_s}$ . Au final, nous avons réussi à factoriser l'application  $\varphi$  sous la forme voulue :

$$\varphi = \delta_{i_1} \dots \delta_{i_r} \sigma_{j_1} \dots \sigma_{j_s} .$$

Soit maintenant une autre factorisation de la même forme :  $\varphi = \delta_{k_1} \dots \delta_{k_t} \sigma_{l_1} \dots \sigma_{l_u}$ , avec  $k_1 \leq \dots \leq k_t$  et  $l_1 < \dots < l_u$  et  $m - t = n - u$ . Notons l'injection  $\iota' := \delta_{k_1} \dots \delta_{k_t}$  et la surjection  $\pi' := \sigma_{l_1} \dots \sigma_{l_u}$ . Comme  $\iota'$  est injective, l'image de  $\pi'$  est en bijection avec l'image de  $\varphi$ , ce qui impose  $p = m - r = n - s = m - t = n - u$  et donc  $t = r$  et  $u = s$ . Les injections  $\iota$  et  $\iota'$  sont égales car elles sont toutes les deux les injections croissantes de  $[p]$  dans  $[m]$  dont l'image est celle de  $\varphi$ . L'égalité  $\delta_{i_1} \dots \delta_{i_r} = \delta_{k_1} \dots \delta_{k_r}$  et la caractérisation des indices  $[m] = \text{Im}\varphi \sqcup \{i_1, i_2 + 1, \dots, i_r + r - 1\}$  donnée précédemment montrent que  $i_1, \dots, i_r = k_1, \dots, k_r$ . Au final, comme ces indices sont rangés par ordre croissant, ils sont donc égaux. On procède ensuite de même avec les surjections  $\pi = \sigma_{j_1} \dots \sigma_{j_s} = \pi' = \sigma_{l_1} \dots \sigma_{l_s}$  en utilisant la caractérisation des indices donnée plus haut sous la forme  $[n] = \{q_0, \dots, q_p\} \sqcup \{j_1, \dots, j_s\}$ .  $\square$

**Lemme 2.16** (Relations entre cofaces et codégénérescences). *Les cofaces et les codégénérescences vérifient les relations suivantes :*

$$(3) \quad \begin{array}{ll} \delta_j \delta_i = \delta_i \delta_{j-1} & \text{pour } i < j , \\ \sigma_j \sigma_i = \sigma_i \sigma_{j+1} & \text{pour } i \leq j , \end{array} \quad \sigma_j \delta_i = \begin{cases} \delta_i \sigma_{j-1} & \text{pour } i < j , \\ \text{id} & \text{pour } i = j \text{ et } i = j + 1 , \\ \delta_{i-1} \sigma_j & \text{pour } i > j + 1 . \end{cases}$$

DÉMONSTRATION. Les vérifications sont automatiques.  $\square$

**Theorem 2.17** (Présentation de la catégorie des simplexes). *La catégorie  $\Delta$  des simplexes admet pour présentation celle dont les générateurs sont les cofaces et les codégénérescences et dont les relations sont données au lemme 2.16.*

DÉMONSTRATION. Le lemme 2.16 montre qu'il existe un foncteur envoyant la catégorie libre engendrée par les  $\delta_i$  et les  $\sigma_i$  modulo les relations (3) sur la catégorie  $\Delta$  des simplexes. Afin de montrer que ce dernier est plein et fidèle, c'est-à-dire un isomorphisme car identité sur les objets, nous allons utiliser les méthodes de réécriture des bases de Gröbner. Pour cela, on interprète les relations (3), lues de la gauche vers la droite, comme des règles de réécriture. Il est automatique de vérifier que toutes les ambiguïtés sont confluentes. Nous avons bien donc là une base de Gröbner et la forme normale des morphismes de la catégorie libre engendrée par les  $\delta_i$  et les  $\sigma_i$  modulo les relations exprimées au

Lemme 2.16 est  $\delta_{i_1} \dots \delta_{i_r} \sigma_{j_1} \dots \sigma_{j_s}$  avec  $i_1 \leq \dots \leq i_r$  et  $j_1 < \dots < j_s$ . On conclut avec l'unicité de l'écriture (2) des morphismes de la catégorie simpliciale  $\Delta$  établie à la proposition 2.15.  $\square$

### 2.3. Ensembles simpliciaux.

**Definition 2.18** (Ensemble simplicial). Un *ensemble simplicial* est un foncteur contravariant de la catégorie des simplexes vers celle des ensembles :  $\Delta^{\text{op}} \rightarrow \text{Ens}$ . La catégorie des ensembles simpliciaux, notée  $\Delta\text{Ens} := \text{Fon}(\Delta^{\text{op}}, \text{Ens})$ , est la catégorie dont les morphismes sont les transformations naturelles de foncteurs.

REMARQUE. Rappelons que l'on utilise aussi dans ce cas la terminologie de préfaisceau ensembliste sur la catégorie des simplexes. Certains résultats généraux sur les catégories de préfaisceaux sont donnés dans l'appendice A.1; ils seront utilisés dans ce qui suit.

Cette définition est à la fois conceptuelle et compacte. Néanmoins, en pratique, on utilise souvent la description détaillée qui suit.

**Proposition 2.19.** *La donnée d'un ensemble simplicial  $\mathfrak{X}$  est équivalente à la donnée d'une collection d'ensembles  $X_n$ , pour  $n \in \mathbb{N}$ , munis d'applications  $d_i : X_n \rightarrow X_{n-1}$  et  $s_i : X_n \rightarrow X_{n+1}$ , pour  $0 \leq i \leq n$ , appelées respectivement faces et dégénérescences, qui vérifient les relations duales de celles (3) de la catégories des simplexes, c'est-à-dire*

$$(4) \quad \begin{aligned} d_i d_j &= d_{j-1} d_i & \text{pour } i < j, \\ s_i s_j &= s_{j+1} s_i & \text{pour } i \leq j, \end{aligned} \quad d_i s_j = \begin{cases} s_{j-1} d_i & \text{pour } i < j, \\ \text{id} & \text{pour } i = j \text{ et } i = j + 1, \\ s_j d_{i-1} & \text{pour } i > j + 1. \end{cases}$$

Un morphisme  $f : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}$  d'ensembles simpliciaux équivaut à la donnée d'une collection d'applications ensemblistes

$$f_n : X_n \rightarrow Y_n, \quad \text{pour } n \in \mathbb{N},$$

qui commutent aux faces et aux dégénérescences respectives de  $\mathfrak{X}$  et  $\mathfrak{Y}$ .

DÉMONSTRATION. Il s'agit d'un corollaire direct du théorème 2.17. Pour cela, on note les ensembles images d'un foncteur  $\mathfrak{X} : \Delta^{\text{op}} \rightarrow \text{Ens}$  par  $X_n := X[n]$  et les images des opposés des cofaces et des codégénérescences par  $d_i := \mathfrak{X}(\delta_i^{\text{op}})$  et  $s_i := \mathfrak{X}(\sigma_i^{\text{op}})$  respectivement.  $\square$

On représente donc souvent les ensembles simpliciaux de la manière suivante.

$$\begin{array}{ccccccc} X_0 & \xrightarrow{s_0} & X_1 & \xrightarrow{s_1} & X_2 & \xrightarrow{s_2} & X_3 & \xrightarrow{s_3} & X_4 & \dots \\ & \xleftarrow{d_0} & & \xleftarrow{d_0} & & \xleftarrow{d_0} & & \xleftarrow{d_0} & & \\ & \xleftarrow{d_1} & & \xleftarrow{d_1} & & \xleftarrow{d_1} & & \xleftarrow{d_1} & & \\ & & & \xleftarrow{d_2} & & \xleftarrow{d_2} & & \xleftarrow{d_2} & & \end{array}$$

EXEMPLE. Essayons d'associer un ensemble simplicial au  $n$ -simplexe géométrique ordonné et, pour cela, partons de son  $\Delta$ -complexe. Pour que les applications dégénérescences existent, il faut ajouter des éléments. On considère alors *toutes* les suites croissantes d'éléments de  $[n]$

$$X_0 = \{0, \dots, n\}, \quad X_1 = \{00, 01, \dots, (n-1)n, nn\}, \quad \dots, \quad X_k = \{i_0 \dots i_k \mid i_0 \leq \dots \leq i_k; i_j \in [n]\}, \quad \dots,$$

que l'on munit des applications faces et dégénérescences suivantes

$$d_j(i_0 \dots i_k) = i_0 \dots \widehat{i_j} \dots i_k \quad \text{et} \quad s_j(i_0 \dots i_k) = i_0 \dots i_j i_j \dots i_k.$$

**Definition 2.20** ( $n$ -simplexe standard). On appelle cet ensemble simplicial fondamental le  *$n$ -simplexe standard* et on le note  $\Delta^n$ .

REMARQUE. Cette exemple fournit une manière particulièrement rapide de retrouver les relations simpliciales (4).

**Definition 2.21** ( $n$ -simplexe). Les éléments de l'ensemble  $X_n$  constitutif d'un ensemble simplicial  $\mathfrak{X}$  sont appelés les  *$n$ -simplexes*. Ils se divisent en deux parties : les simplexes *dégénérés* sont ceux qui sont dans l'image d'au moins une dégénérescence, les autres sont appelés *non-dégénérés*. On notera l'ensemble, éventuellement vide, des  $n$ -simplexes non-dégérés par  $NX_n$ .

Dans l'exemple précédent du simplexe standard  $\Delta^n$ , les  $k$ -simplexes non-dégénérés sont les éléments qui proviennent du complexe simplicial; les autres forment les  $k$ -simplexes dégénérés. De manière générale, on peut associer un ensemble simplicial à tout complexe simplicial ordonné en considérant les  $n$ -simplexes de la forme  $\langle v_0, \dots, v_0, \dots, v_m, \dots, v_m \rangle$ , pour tout simplexe géométrique  $\langle v_0, \dots, v_m \rangle$ .

EXEMPLES.

- ◊ L'ensemble simplicial  $\partial\Delta^n$  associé au complexe simplicial  $|\partial\Delta^n|$  admet pour  $d$ -simplexes les éléments de la forme  $\underbrace{i_0 \cdots i_0 \cdots i_m \cdots i_m}_{d+1 \text{ éléments}}$ , avec  $m < n$  et  $i_0 < \cdots < i_m$  dans  $[n]$ . On l'appelle la *bord* du  $n$ -simplexe standard.
- ◊ L'ensemble simplicial  $\Lambda_k^n$  associé au  $k^e$ -corno  $|\Lambda_k^n|$  admet les mêmes  $d$ -simplexes que  $\partial\Delta^n$  à l'exclusion de ceux formés à partir de  $\{i_0, \dots, i_m\} = \{0, \dots, \widehat{k}, \dots, n\}$ .

Le recherche d'un foncteur de la catégorie des  $\Delta$ -complexes vers celle des ensembles simpliciaux est moins évidente. L'exemple suivant montre que l'on peut faire des choix pour étendre un  $\Delta$ -complexe en un ensemble simplicial.

EXEMPLE. Reprenons l'exemple donné ci-dessus du  $\Delta$ -complexe qui fournit un modèle du cercle avec deux cellules. On note ici le 0-simplexe  $x$  par 0 et le 1-simplexe  $a$  par 01. A la lumière des exemples précédents, si on essaie à la main de lui adjoindre assez de  $n$ -simplexes dégénérés pour créer les dégénérescences, on en vient à considérer

$$X_n := \{0 \cdots 0, 0 \cdots 01, 0 \cdots 011, \dots, 01 \cdots 1\} ,$$

munis des applications

$$d_j(i_0 \cdots i_k) = i_0 \cdots \widehat{i_j} \cdots i_k \quad \text{et} \quad s_j(i_0 \cdots i_k) = i_0 \cdots i_j i_j \cdots i_k ,$$

sauf pour  $d_0(01 \cdots 1) := 0 \cdots 0$ . Ces données forment un ensemble simplicial.

Dans l'autre sens, tout ensemble simplicial induit un  $\Delta$ -complexe par oubli des dégénérescences. Dit dans le langage des catégories, tout foncteur  $\Delta^{\text{op}} \rightarrow \text{Ens}$  induit un foncteur  $\bar{\Delta}^{\text{op}} \rightarrow \text{Ens}$  par tirage en arrière le long de l'inclusion de sous-catégorie  $\Phi : \bar{\Delta}^{\text{op}} \hookrightarrow \Delta^{\text{op}}$ . Une manière de décrire un foncteur dans l'autre sens est de chercher un adjoint, par exemple à gauche. Les définitions respectives en termes de préfaisceaux montrent que la réponse est donnée par la notion d'extension de Kan à gauche, voir Appendice A.2.

**Proposition 2.22.** *Le foncteur oubli admet un adjoint à gauche donné par l'extension de Kan à gauche*

$$\text{Lan}_{\Phi} : \Delta\text{Cx} \xrightarrow{\perp} \Delta\text{Ens} : \Phi^* ,$$

qui vaut explicitement pour tout  $\Delta$ -complexe  $\mathfrak{X}$  :

$$(\text{Lan}_{\Phi}\mathfrak{X})_n = \{(\varphi, x) \mid \varphi : [n] \twoheadrightarrow [m] \text{ croissante}, x \in X_m\} .$$

Les faces sont données par  $d_i(\varphi, x) = (\varphi\delta_i, x)$ , si  $\varphi\delta_i$  est surjective, sinon  $\varphi\delta_i$  s'écrit de manière unique  $\delta_j\psi$  avec  $\psi$  surjective et alors  $d_i(\varphi, x) = (\psi, d_j(x))$ ; les dégénérescences sont données par  $s_i(\varphi, x) = (\varphi\sigma_i, x)$ .

DÉMONSTRATION. La catégorie  $\bar{\Delta}^{\text{op}}$  est petite, la catégorie  $\Delta^{\text{op}}$  est localement petite et la catégorie  $\text{Ens}$  est cocomplète, on peut donc appliquer le corollaire A.13 et la proposition A.8. La forme explicite de l'extension de Kan à gauche est une application du corollaire A.16, où on a fait des choix évidents de représentants des éléments du coégalisateur (ou de manière équivalente de la cofin). L'unicité de l'écriture  $\varphi\delta_i = \delta_j\psi$ , avec  $\psi$  surjective, provient de la forme normale des morphismes de la catégories des simplexes (Proposition 2.15).  $\square$

EXERCISE 3. En utilisant cette proposition, montrer que l'exemple ci-dessus de l'ensemble simplicial modélisant le cercle obtenu à partir du  $\Delta$ -complexe est bien donné par l'extension de Kan à gauche.

REMARQUE. Pour tout ensemble simplicial, les  $n$ -simplexes s'injectent dans les  $n + 1$ -simplexes par  $s_0 : X_n \hookrightarrow X_{n+1}$  et les  $n + 1$ -simplexes se "projettent" dans les  $n$ -simplexes par  $d_0 : X_{n+1} \twoheadrightarrow X_n$ , car  $d_0s_0 = \text{id}$ .

**Definition 2.23** (Sous-ensemble simplicial, ensemble simplicial quotient). On dit que  $\mathfrak{Y}$  est un *sous-ensemble simplicial* (respectivement *ensemble simplicial quotient*) de  $\mathfrak{X}$  lorsqu’il existe un morphisme d’ensembles simpliciaux  $\mathfrak{Y} \hookrightarrow \mathfrak{X}$  (respectivement  $\mathfrak{Y} \twoheadrightarrow \mathfrak{X}$ ) qui soit injectif (respectivement surjectif) composante par composante  $Y_n \hookrightarrow X_n$  (respectivement  $Y_n \twoheadrightarrow X_n$ ).

EXEMPLES.

- ◊ Les ensembles simpliciaux donnés en exemple ci-dessus s’injectent les uns dans les autres :

$$\Lambda_k^n \hookrightarrow \partial\Delta^n \hookrightarrow \Delta^n .$$

- ◊ On considère l’ensemble simplicial quotient  $\Delta^n/\partial\Delta^n$ , pour  $n \geq 1$ , dont les  $d$ -simplexes admettent les représentants suivants

$$\left\{ \underbrace{i_0 \cdots i_0 \cdots i_n \cdots i_n}_{d+1 \text{ éléments}} \mid i_0 = \cdots = i_n = 0 \text{ ou } i_0 = 0, i_1 = 1, \dots, i_n = n \right\}$$

munis des faces et dégénérescences classiques (suppression et dédoublement) sauf lorsque les faces ne font pas sens, c’est-à-dire lorsque l’on supprime un nombre apparaissant une seule fois dans la collection, auquel cas elles valent  $0 \cdots 0$ . Les deux seuls simplexes non-dégénérés sont  $0$  et  $01 \cdots n$ ; on a là le modèle le plus économique, avec 2 cellules, de la sphère de dimension  $n$ . (Pour  $n = 1$ , on retrouve l’exemple donné ci-dessus). L’application évidente  $\Delta^n \twoheadrightarrow \Delta^n/\partial\Delta^n$  montre qu’il s’agit d’un quotient du  $n$ -simplexe standard.

REMARQUE. Ce dernier exemple est instructif car il exhibe un ensemble simplicial qui ne provient pas d’un  $\Delta$ -complexe : par exemple, il n’est pas dans l’image du foncteur décrit à la proposition 2.22. Il montre que les dégénérescences sont essentielles et non gratuites : ce modèle de la sphère n’existerait pas sans les dégénérescences placées en dimension 1 à  $n - 1$ .

Les exemples précédents montrent que l’on aimerait souvent “générer” des ensembles simpliciaux à partir de petites données. La proposition suivante donne la forme du sous-ensemble simplicial “engendré” par ses premiers simplexes.

**Proposition 2.24.** *Soit  $\mathfrak{X}$  un ensemble simplicial. Les simplexes suivants*

$$(\text{sq}_n \mathfrak{X})_m := \{x \in X_m \mid \exists k \leq n, \exists \varphi : [m] \twoheadrightarrow [k] \text{ croissante}, \exists y \in X_k \text{ tels que } x = \mathfrak{X}(\varphi^{\text{op}})(y)\}$$

*forment le plus petit sous-ensemble simplicial de  $\mathfrak{X}$  contenant tous ses  $k$ -simplexes, pour  $k \leq n$ .*

DÉMONSTRATION. On vérifie facilement qu’il s’agit là d’un sous-ensemble simplicial ; par exemple, la stabilité pour les faces vient de :

$$d_i(x) = d_i(\mathfrak{X}(\varphi^{\text{op}})(y)) = \mathfrak{X}((\varphi \circ \delta_i)^{\text{op}})(y) .$$

Ce sous-ensemble simplicial contient bien tous les  $k$ -simplexes pour  $k \leq n$  : il suffit de considérer  $k = m$ ,  $\varphi = \text{id}$  et  $y = x$ . La forme normale des morphismes de la catégories des simplexes (Proposition 2.15) montre que, pour  $m > n$  :

$$(\text{sq}_n \mathfrak{X})_m = \{x \in X_m \mid \exists k \leq n, \exists \varphi : [m] \twoheadrightarrow [k] \text{ croissante et surjective}, \exists y \in X_k \text{ t.q. } x = \mathfrak{X}(\varphi^{\text{op}})(y)\} .$$

Soit maintenant un sous-ensemble simplicial  $\mathfrak{Y} \subset \mathfrak{X}$  qui contient tous les  $k$ -simplexes pour  $k \leq n$ , alors il contient les images par les composées de dégénérescences de ces  $k$ -simplexes. Il contient donc tous les  $\text{sq}_m \mathfrak{X}$ , pour  $m > n$ , par la caractérisation précédente.  $\square$

Cette démonstration montre que le sous-ensemble simplicial  $\text{sq}_n \mathfrak{X}$  est formé uniquement des  $k$ -simplexes pour  $k \leq n$ , et de leurs images par des composées de dégénérescences, pour  $k > n$ .

**Definition 2.25** (Squelette). Le sous-ensemble simplicial  $\text{sq}_n \mathfrak{X}$  est appelé le  *$n$ -squelette* de l’ensemble simplicial  $\mathfrak{X}$ .

EXEMPLE. Le  $(n - 1)^{\text{e}}$  squelette du  $n$ -simplexe standard est son bord :  $\text{sq}_{n-1} \Delta^n = \partial\Delta^n$ .

EXERCISE 4. Montrer que le 0-squelette d’un ensemble simplicial  $\mathfrak{X}$  est l’ensemble simplicial constant

$$(\text{sq}_0 \mathfrak{X})_m = X_0 , \quad \text{pour } m \in \mathbb{N} ,$$

où les faces et dégénérescences sont toutes égales à l’identité.

La notion de squelette d'un ensemble simplicial permet d'effectuer des démonstrations par récurrence, voir par exemple.

**Definition 2.26** (Dimension). Un ensemble simplicial  $\mathfrak{X}$  est de *dimension*  $n$  lorsque

$$\text{sq}_{n-1}\mathfrak{X} \subsetneq \text{sq}_n\mathfrak{X} = \mathfrak{X} ,$$

c'est-à-dire lorsqu'il admet au moins un simplexe non-dégénéré de dimension  $n$  et aucun en dimension supérieure.

EXEMPLES. Les exemples précédents ont les dimensions suivantes

$$\dim \Delta^n = n, \quad \dim \partial\Delta^n = n - 1, \quad \dim \Lambda_k^n = n - 1, \quad \text{et} \quad \dim \Delta^n / \partial\Delta^n = n .$$

L'exercice suivant donne une interprétation plus conceptuelle de la notion de squelette.

EXERCISE 5. On considère la sous-catégorie pleine  $\Delta_n$  de la catégorie  $\Delta$  des simplexes formée des objets  $[0], \dots, [n]$  et on note  $\Upsilon : \Delta_n \hookrightarrow \Delta$  l'inclusion de catégories. Les préfaisceaux sur cette catégorie sont des ensembles simpliciaux  $n$ -tronqués et on note leur catégorie  $\Delta_n\text{Ens}$ . Le tirage en arrière par  $\Upsilon$  définit un foncteur oubli  $\Upsilon^*$  de la catégorie des ensembles simpliciaux vers cette dernière.

- (1) Montrer que ce foncteur oubli admet un adjoint à gauche donné par l'extension de Kan à gauche le long de  $\Upsilon$  :

$$\text{Lan}_\Upsilon : \Delta_n\text{Ens} \overset{\perp}{\underset{\perp}{\rightleftarrows}} \Delta\text{Ens} : \Upsilon^* ,$$

qui vaut explicitement pour tout ensemble simplicial  $n$ -tronqué  $\mathfrak{X} : (\text{Lan}_\Upsilon\mathfrak{X})_m = X_m$ , pour  $m \leq n$  et

$$(\text{Lan}_\Upsilon\mathfrak{X})_m = \{(\varphi, x) \mid \varphi : [m] \twoheadrightarrow [n] \text{ croissante}, x \in X_n\} , \quad \text{pour} \quad m > n .$$

- (2) Montrer que pour ensemble simplicial  $\mathfrak{X}$  vérifie  $\text{Lan}_\Upsilon\Upsilon^*(\mathfrak{X}) \cong \text{sq}_n\mathfrak{X}$ . (On pourra utiliser le lemme d'Eilenberg-Zilber (Lemme 2.29)).
- (3) Vérifier que l'unité de cette adjonction est l'identité et donc que cette extension de Kan à gauche est une extension de foncteur.
- (4) En utilisant l'identification précédente avec le  $n^e$  squelette, montrer que la counité d'adjonction est l'inclusion d'ensembles simpliciaux

$$\text{Lan}_\Upsilon\Upsilon^*(\mathfrak{X}) \cong \text{sq}_n\mathfrak{X} \hookrightarrow \mathfrak{X} .$$

- (5) En conclure que la restriction de cette adjonction à la sous-catégorie pleine des ensembles simpliciaux de dimension  $n$  est un équivalence de catégories.

**Definition 2.27** (Objet (co)simplicial). On appelle *objet simplicial dans une catégorie*  $C$  un foncteur contravariant  $\Delta^{\text{op}} \rightarrow C$  de la catégorie des simplexes vers  $C$ . On note la catégorie correspondante  $\Delta C$ . On appelle *objet cosimplicial dans une catégorie*  $C$  un foncteur covariant  $\Delta \rightarrow C$  de la catégorie des simplexes vers  $C$ .

EXEMPLES.

- ◊ On peut ainsi considérer non seulement des ensembles simpliciaux mais des groupes simpliciaux, des algèbres simpliciales, etc. Par exemple, un groupe simplicial correspond à la donnée de groupes  $G_n$ , pour  $n \in \mathbb{N}$ , munis de morphismes de groupes  $d_i : G_n \rightarrow G_{n-1}$  et  $s_i : G_n \rightarrow G_{n+1}$ , pour  $0 \leq i \leq n$ , vérifiant les relations simpliciales.
- ◊ La collection des simplexes géométriques standards ordonnés  $|\Delta^n|$  munis des applications simpliciales croissantes forme un espace topologique cosimplicial.



## 2.4. Réalisation géométrique.

**Definition 2.28** (Réalisation géométrique). La *réalisation géométrique* d'un ensemble simplicial  $\mathfrak{X}$  est l'espace topologique quotient

$$|\mathfrak{X}| := \coprod_{n \in \mathbb{N}} X_n \times |\Delta^n| / \sim,$$

par la relation d'équivalence engendrée par les relations

$$(x, \delta_i(y)) \sim (d_i(x), y) \quad \text{et} \quad (x, \sigma_i(z)) \sim (s_i(x), z),$$

pour  $x \in X_n$ ,  $y \in |\Delta^{n-1}|$ ,  $z \in |\Delta^{n+1}|$  et  $0 \leq i \leq n$ .

Cette construction, de prime abord non élémentaire, est en fait simple à appréhender. On considère des  $n$ -simplexes géométriques standard indicés par les  $n$ -simplexes non-dégénérés que l'on recolle entre eux grâce aux faces et au premier type de relation, comme pour un  $\Delta$ -complexe. Les relations du second type montrent que tout simplexe dégénéré ne va donner naissance à aucune nouvelle cellule, et n'être vu que dans un simplexe géométrique standard issu d'un simplexe non-dégénéré. En outre, il n'y a pas plus d'identification de cellules que cela. Avant de démontrer ce résultat général, on peut se faire la main sur les exemples précédents.

EXEMPLES. Les notations choisies depuis le début trouvent ici leur cohérence.

- ◊ La réalisation géométrique  $|\Delta^n|$  du  $n$ -simplexe standard est le  $n$ -simplexe géométrique standard  $|\Delta^n|$ .
- ◊ La réalisation géométrique  $|\partial\Delta^n|$  du bord du  $n$ -simplexe standard est le modèle topologique  $|\partial\Delta^n| \cong S^{n-1}$  pour la sphère de dimension  $n - 1$ .
- ◊ La réalisation géométrique  $|\Lambda_k^n|$  du  $k^e$ -cornet simplicial est le  $k^e$ -cornet géométrique  $|\Lambda_k^n|$ .

REMARQUE. Notons que l'on a perdu de l'information dans cette affaire : nous étions partis de complexes simpliciaux, c'est-à-dire d'espaces topologiques munis canoniquement d'une triangulation, et le passage à la réalisation géométrique de l'ensemble simplicial associé nous a fait perdre cette dernière. (Les notations choisies ici ne sont donc pas absolument parfaites, mais elles ont l'avantage de la simplicité.)

**Lemme 2.29** (Eilenberg–Zilber). *Tout simplexe dégénéré  $x \in X_n$  d'un ensemble simplicial  $\mathfrak{X}$  s'écrit sous la forme  $x = \mathfrak{X}(\varphi^{\text{op}})(y)$  avec une unique paire d'application  $\varphi : [n] \rightarrow [m]$  croissante et  $y \in X_m$  non-dégénéré*

DÉMONSTRATION. Pour ce qui est de l'existence d'une telle écriture, on commence par écrire  $x = \mathfrak{X}(\sigma_i^{\text{op}})(y')$ , avec  $y' \in X_{n-1}$ , comme  $x$  est dégénéré. Puis, on itère ce processus jusqu'à arriver à un  $y$  non-dégénéré. Pour ce qui est de l'unicité, supposons qu'il existe une autre paire  $(z, \psi)$  avec  $z \in X_k$  non-dégénéré et  $\psi : [n] \rightarrow [k]$  croissante telle que  $x = \mathfrak{X}(\psi^{\text{op}})(z)$ . Supposons, sans perte de généralité que  $k \leq m$ . La forme normale des morphismes de la catégories des simplexes (Proposition 2.15) permet d'écrire  $\varphi$  sous la forme  $\varphi = \sigma_{j_1} \dots \sigma_{j_s}$  avec  $j_1 < \dots < j_s$ . Considérons  $\chi := \delta_{j_s} \dots \delta_{j_1}$ , pour que  $\varphi\chi = \text{id}$ . On a alors  $y = \mathfrak{X}((\psi\chi)^{\text{op}})(z)$ . Comme  $y$  est non-dégénéré, l'application  $\psi\chi$  est une composée de cofaces ce qui implique que  $y$  est obtenu à partir de  $z$  par applications successives de faces. Le fait que  $k \leq m$  implique donc  $\psi\chi = \text{id}$  puis  $k = m$  et  $y = z$ . **a finir**  $\square$

**Theorem 2.30.** *Pour tout ensemble simplicial  $\mathfrak{X}$ , l'application suivante est une bijection continue*

$$\coprod_{n \in \mathbb{N}} NX_n \times |\Delta^n| \rightarrow |\mathfrak{X}|.$$

DÉMONSTRATION. Le niveau de cette démonstration est assez élémentaire et repose sur le lemme d'Eilenberg–Zilber, mais sa longueur nous incite à renvoyer le-la lecteur-trice à [GM03, Proposition I.2.10].  $\square$

**Corollaire 2.31.** *La réalisation géométrique de l'ensemble simplicial associé à un complexe simplicial est homéomorphe à ce dernier.*

DÉMONSTRATION.  $\square$

**Proposition 2.32.** *La réalisation géométrique d'un ensemble simplicial est un CW-complexe formé d'une seule cellule de dimension  $n$  par  $n$ -simplexe non-dégénéré.*

DÉMONSTRATION. Il s'agit d'un corollaire direct du théorème 2.30.  $\square$

**2.5. La catégorie des ensembles simpliciaux.** La catégorie des ensembles simpliciaux est la catégorie des préfaisceaux sur la catégorie des simplexes. Vu comme cela, elle hérite des propriétés générales des catégories de préfaisceaux, rappelées par exemple dans l'appendice A.1.

**Proposition 2.33.** *La catégorie  $\Delta\text{Ens}$  des ensembles simpliciaux est complète et cocomplète. Pour tout foncteur  $F : \mathbb{D} \rightarrow \Delta\text{Ens}$ , on note*

$$\begin{aligned} F_n & : \mathbb{D} \rightarrow \text{Ens} \\ d & \mapsto F(d)_n \end{aligned}$$

le foncteur associé pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . La limite et la colimite du foncteur  $F$  sont données point-par-point par

$$\left( \lim_{\mathbb{D}} F \right)_n = \lim_{\mathbb{D}} F_n \quad \text{et} \quad \left( \text{colim}_{\mathbb{D}} F \right)_n = \text{colim}_{\mathbb{D}} F_n .$$

DÉMONSTRATION. Il s'agit d'une application directe de la proposition A.5.  $\square$

L'objet terminal de la catégorie des ensembles simpliciaux est  $\Delta^0 = *$  qui est formé d'un seul simplexe en chaque degré ; l'objet initial est  $\emptyset$  qui est formé de l'ensemble vide en chaque degré.

Les premiers exemples de préfaisceaux sur une catégorie sont les préfaisceaux représentables. Dans le cas de la catégorie des simplexes  $\Delta$ , il s'agit des ensembles simpliciaux de la forme  $\text{Hom}_{\Delta}(-, [n])$ .

**Proposition 2.34.** *Les préfaisceaux représentables  $\text{Hom}_{\Delta}(-, [n])$  sont les  $n$ -simplexes standards  $\Delta^n$ .*

DÉMONSTRATION. Ce résultat se montre de manière directe. Les applications croissantes  $I$  de  $[k]$  dans  $[n]$  sont en bijection avec les suites croissantes  $i_0 \leq \dots \leq i_k$  d'éléments de  $[n]$ . Cette bijection préserve bien les faces et les dégénérescences :

$$d_j(I) = I \circ \delta_j \text{ correspond à } i_0 \cdots \widehat{i_j} \cdots i_k \quad \text{et} \quad s_j(I) = I \circ \sigma_j \text{ correspond à } i_0 \cdots i_j i_j \cdots i_k .$$

$\square$

**Corollaire 2.35.** *La catégorie des simplexes  $\Delta$  se plonge, par le plongement de Yoneda, comme la sous-catégorie pleine des ensembles simpliciaux dont les objets sont les simplexes standard :*

$$\begin{aligned} Y & : \Delta \hookrightarrow \Delta\text{Ens} \\ [n] & \mapsto \Delta^n . \end{aligned}$$

DÉMONSTRATION. Il s'agit d'un corollaire de la proposition 2.34 et du corollaire A.4 du lemme de Yoneda.  $\square$

Ce résultat montre que la catégorie des ensembles simpliciaux est le completion cocomplète de la catégorie  $\Delta$ , c'est-à-dire la plus petite catégorie cocomplète qui la contient.

REMARQUE. Il justifie une fois de plus la terminologie et la notation choisies pour la catégorie des simplexes  $\Delta$ .

Cette identification permet de construire des morphismes d'ensembles simpliciaux  $\delta_i : \Delta^{n-1} \rightarrow \Delta^n$  et  $\sigma_i : \Delta^{n+1} \rightarrow \Delta^n$ , pour  $0 \leq i \leq n$ , en poussant en avant par les cofaces et codégénérescences respectives (et de même notation) de la catégorie  $\Delta$ . Avec les notations de la démonstration de la proposition 2.34 ci-dessus, on a explicitement :

$$\delta_j(i_0 \cdots i_k) = \delta_j(i_0) \cdots \delta_j(i_k) \quad \text{et} \quad \sigma_j(i_0 \cdots i_k) = \sigma_j(i_0) \cdots \sigma_j(i_k) .$$

Dit autrement, le plongement de Yoneda munit les  $n$ -simplexes standard d'une structure d'"ensemble simplicial cosimplicial". Au niveau des réalisations géométriques respectives, on retrouve les applications cofaces et codégénérescences entre complexes simpliciaux.

**Proposition 2.36** (Lemme de Yoneda simplicial). *L'application*

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\Delta\text{Ens}}(\Delta^n, \mathfrak{X}) & \cong X_n \\ f & \mapsto f(0 \cdots n) \end{aligned}$$

décrit une bijection naturelle en  $[n] \in \Delta$  et en ensemble simplicial  $\mathfrak{X} \in \Delta\text{Ens}$ .

DÉMONSTRATION. Il s'agit là de la stricte application du lemme de Yoneda (Théorème A.3) à la catégorie localement petite  $\mathbb{C} = \Delta$ .  $\square$

Ce résultat montre que l'on peut penser au  $n$ -simplexe standard comme "l'ensemble simplicial libre à un générateur en dimension  $n$ ". Inversement, si on note  $f_x : \Delta^n \rightarrow \mathfrak{X}$  l'unique morphisme d'ensembles simpliciaux associé au  $n$ -simplexe  $x \in X_n$ , la naturalité de la bijection montre que  $f_{d_i(x)} = f_x \delta_i$ . Ceci permet de voir un ensemble simplicial comme un module à droite sur la catégorie  $\Delta$ .

**Definition 2.37** (Catégorie des éléments d'un ensemble simplicial). La *catégorie des éléments d'un ensemble simplicial*  $\mathfrak{X}$  est la catégorie dont les objets sont tous les simplexes de  $\mathfrak{X}$  et dont les morphismes sont les applications  $\mathfrak{X}(\varphi^{\text{op}})$ , pour  $\varphi$  morphisme de la catégorie  $\Delta$ . On note cette catégorie  $E(\mathfrak{X})$ .

De manière équivalente, les morphismes de cette catégorie sont les composées de faces et de dégénérescences. Il s'agit de la catégorie des éléments de  $\mathfrak{X}$  vu comme un préfaisceau selon la définition A.6. Elle est équipée de la projection canonique  $\Pi : E(\mathfrak{X}) \rightarrow \Delta$  qui envoie  $x \in X_n$  sur  $[n]$ .

**Theorem 2.38** (Théorème de densité des ensembles simpliciaux). *Tout ensemble simplicial  $\mathfrak{X}$  s'écrit comme la colimite suivante*

$$\mathfrak{X} \cong \text{colim}_{E(\mathfrak{X})} Y \circ \Pi .$$

DÉMONSTRATION. Il s'agit d'une application à la petite catégorie  $\Delta$  du théorème A.7 de densité des préfaisceaux.  $\square$

REMARQUE. Notons que le diagramme sous-jacent à cette colimite admet pour sommets un copie du simplexe standard  $\Delta^n$  par simplexe  $x \in X_n$ .

De nombreux exemples, dont les plus importants, voir ci-dessous et la section 2.6.1, sont obtenus de la manière suivante.

**Definition 2.39** (Représentation simpliciale). Soit  $\mathfrak{C}$  un objet cosimplicial d'une catégorie  $\mathcal{C}$  localement petite. La *représentation simpliciale associée*  $\mathfrak{C}$  est le foncteur suivant :

$$\begin{aligned} R_{\mathfrak{C}} &: \mathcal{C} \rightarrow \Delta\text{Ens} \\ c &\mapsto \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathfrak{C}, c) . \end{aligned}$$

**Theorem 2.40.** *Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie localement petite et cocomplète et soit  $\mathfrak{C}$  un objet cosimplicial de  $\mathcal{C}$ . La représentation simpliciale associée à  $\mathfrak{C}$  définit un foncteur qui admet un adjoint à gauche donné par l'extension de Kan à gauche de  $\mathfrak{C}$  le long du plongement de Yoneda :*

$$\begin{array}{ccc} \Delta & \xrightarrow{\mathfrak{C}} & \mathcal{C} \\ & \searrow Y & \nearrow \text{Lan}_Y \mathfrak{C} \\ & \Delta\text{Ens} & \end{array} \quad \text{Lan}_Y \mathfrak{C} : \Delta\text{Ens} \begin{array}{c} \xrightarrow{\perp} \\ \xleftarrow{\perp} \end{array} \mathcal{C} : R_{\mathfrak{C}} .$$

L'image de tout ensemble simplicial  $\mathfrak{X}$  par ce foncteur est donnée par le coégalisateur suivant

$$\coprod_{\substack{\varphi: [n] \rightarrow [m] \\ \varphi \in \{\delta_i, \sigma_i\}}} X_n \cdot \mathfrak{C}([m]) \xrightarrow[\mathfrak{C}(\varphi)]{\mathfrak{X}(\varphi^{\text{op}})} \coprod_{n \in \mathbb{N}} X_n \cdot \mathfrak{C}([n]) \dashrightarrow \int^n X_n \cdot \mathfrak{C}([n]) = (\text{Lan}_Y \mathfrak{C})(\mathfrak{X}) .$$

DÉMONSTRATION. Il est automatique de vérifier que  $R_{\mathfrak{C}}$  définit bien un foncteur. Lorsque la catégorie  $\mathcal{C}$  est cocomplète, l'extension de Kan existe par le corollaire A.13 car la catégorie  $\Delta$  est petite et la catégorie  $\Delta\text{Ens}$  est localement petite. Comme le plongement de Yoneda  $Y$  est plein et fidèle (corollaire 2.35), l'extension de Kan à gauche le long de  $Y$  est une extension de foncteurs, c'est-à-dire  $\text{Lan}_Y \mathfrak{C}(\Delta^n) = \mathfrak{C}([n])$ , pour  $n \in \mathbb{N}$ . Pour montrer qu'il s'agit d'une paire de foncteurs adjoints, il faut trouver une bijection naturelle

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\text{Lan}_Y \mathfrak{C}(\mathfrak{X}), c) \cong \text{Hom}_{\Delta\text{Ens}}(\mathfrak{X}, R_{\mathfrak{C}}(c)) .$$

C'est déjà le cas pour le simplexe standard  $\mathfrak{X} = \Delta^n$ , car  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathfrak{C}([n]), c) \cong \text{Hom}_{\Delta\text{Ens}}(\Delta^n, R_{\mathfrak{C}}(c))$  par le lemme de Yoneda simplicial (Proposition 2.36). Le théorème de densité (Théorème 2.38) permet d'écrire tout ensemble simplicial comme une colimite de simplexes standard. Comme l'extension de Kan à gauche est donnée par une colimite, voir Théorème A.11, ce foncteur préserve les colimites. Ceci permet d'étendre la bijection naturelle ci-dessus à tous les ensembles simpliciaux.

La dernière formule est une conséquence du corollaire A.16 qui donne les extensions de Kan en terme de coégalisateurs. Elle est réduite aux seules cofaces et codégénérescences de la catégorie  $\Delta$  car elles engendrent cette dernière par la proposition 2.15.  $\square$

Cette dernière formule a le même parfum que la réalisation géométrique ; ceci n'est pas le fruit du hasard, on verra à la proposition 2.51 que cette dernière peut être obtenue de cette manière.

**Definition 2.41** (Produit d'ensembles simpliciaux). Le *produit*  $\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}$  de deux ensembles simpliciaux  $\mathfrak{X}$  et  $\mathfrak{Y}$  est défini par

$$(\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y})_n := X_n \times Y_n$$

muni des faces  $d_i^{\mathfrak{X}} \times d_i^{\mathfrak{Y}}$  et des dégénérescences  $s_i^{\mathfrak{X}} \times s_i^{\mathfrak{Y}}$ .

**Proposition 2.42.** *La catégorie  $(\Delta\text{Ens}, \times, *)$  des ensembles simpliciaux, muni de leur produit, forme une catégorie monoïdale symétrique cartésienne où l'unité est l'ensemble simplicial constant à un élément.*

DÉMONSTRATION. Les vérifications sont automatiques. Rappelons que "cartésienne" signifie que le produit monoïdal est le produit catégoriel et que l'unité est l'objet terminal.  $\square$

Cherchons à montrer que cette catégorie monoïdale symétrique est fermée, c'est-à-dire qu'elle possède un hom interne. Supposons que l'on possède un tel bifoncteur  $\mathfrak{H}\text{om}$  ; il doit alors être muni d'une bijection naturelle

$$\text{Hom}_{\Delta\text{Ens}}(\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}) \cong \text{Hom}_{\Delta\text{Ens}}(\mathfrak{X}, \mathfrak{H}\text{om}(\mathfrak{Y}, \mathfrak{Z})) .$$

On considérant le cas particulier du simplexe standard  $\mathfrak{X} = \Delta^n$ , le lemme de Yoneda simplicial impose la forme suivante

$$\mathfrak{H}\text{om}(\mathfrak{Y}, \mathfrak{Z})_n = \text{Hom}_{\Delta\text{Ens}}(\mathfrak{Y} \times \Delta^n, \mathfrak{Z}) .$$

On a là un premier exemple d'application de la définition 2.39 : à tout ensemble simplicial  $\mathfrak{X}$ , on associe le foncteur

$$\begin{aligned} \mathfrak{X} \times \Delta^\bullet & : \Delta \rightarrow \Delta\text{Ens} \\ [n] & \mapsto \mathfrak{X} \times \Delta^n , \end{aligned}$$

qui est en fait la composée du plongement de Yoneda avec le produit avec  $\mathfrak{X}$ . La réalisation simpliciale associée à ce foncteur est

$$\begin{aligned} R_{\mathfrak{X} \times \Delta^\bullet} & : \Delta\text{Ens} \rightarrow \Delta\text{Ens} \\ \mathfrak{Y} & \mapsto \text{Hom}_{\Delta\text{Ens}}(\mathfrak{X} \times \Delta^\bullet, \mathfrak{Y}) . \end{aligned}$$

Cette interprétation introduit l'ensemble simplicial recherché.

**Definition 2.43** (Espace des morphismes). Pour toute paire  $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$  d'ensembles simpliciaux, on appelle *espace des morphismes de  $\mathfrak{X}$  vers  $\mathfrak{Y}$*  l'ensemble simplicial

$$\mathfrak{H}\text{om}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}) := \text{Hom}_{\Delta\text{Ens}}(\mathfrak{X} \times \Delta^\bullet, \mathfrak{Y}) .$$

Les 0-simplexes de l'espace des morphismes est l'ensemble des morphismes d'ensembles simpliciaux :

$$\mathfrak{H}\text{om}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})_0 = \text{Hom}_{\Delta\text{Ens}}(\mathfrak{X} \times \Delta^0, \mathfrak{Y}) = \text{Hom}_{\Delta\text{Ens}}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}) .$$

Le lemme de Yoneda simplicial (Proposition 2.36) montre que l'espace des morphismes du "point"  $*$  vers un ensemble simplicial  $\mathfrak{Y}$  est égal à  $\mathfrak{Y}$  tout entier :

$$\mathfrak{H}\text{om}(*, \mathfrak{Y}) = \mathfrak{Y} .$$

REMARQUE. L'espace des morphismes est parfois aussi appelé *objet exponentiel* et noté  $\mathfrak{Y}^{\mathfrak{X}}$ .

**Proposition 2.44.** *L'espace des morphismes est un hom interne, c'est-à-dire qu'il munit la catégorie des ensembles simpliciaux d'une structure de catégorie monoïdale symétrique fermée.*

DÉMONSTRATION. La bijection

$$(*) \quad \text{Hom}_{\Delta\text{Ens}}(\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}) \cong \text{Hom}_{\Delta\text{Ens}}(\mathfrak{X}, \mathfrak{H}\text{om}(\mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}))$$

naturelle en la première et la dernière variables a été donnée au théorème 2.40. Pour cela, on commence par remarquer que la catégorie des ensembles simpliciaux est cocomplète et localement petite. On fixe un ensemble simplicial  $\mathfrak{Y}$ . Le foncteur de représentation simpliciale associée est

$R_{\mathfrak{Y} \times \Delta^\bullet}(\mathfrak{Z}) = \mathfrak{Hom}(\mathfrak{Y}, \mathfrak{Z})$ . L'extension de Kan à gauche du foncteur  $\mathfrak{Y} \times \Delta^\bullet$  le long du plongement de Yoneda est le foncteur “produit par  $\mathfrak{Y}$ ” :

$$\text{Lan}_{\mathfrak{Y}}(\mathfrak{Y} \times \Delta^\bullet)(\mathfrak{X}) = \mathfrak{Y} \times \mathfrak{X} \cong \mathfrak{X} \times \mathfrak{Y} .$$

L'adjonction entre ces deux foncteurs établie grâce au théorème 2.40 donne une bijection (\*) naturelle en  $\mathfrak{X}$  et  $\mathfrak{Z}$ .  $\square$

La counité de cette adjonction fournit un morphisme naturel *d'évaluation* :

$$\text{ev}_{\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}} : \mathfrak{Hom}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}) \times \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y} .$$

On définit une composition au niveau des espaces de morphismes

$$\mathfrak{Hom}(\mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}) \times \mathfrak{Hom}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}) \rightarrow \mathfrak{Hom}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Z})$$

en considérant le morphisme d'ensembles simpliciaux adjoint de la double évaluation suivante :

$$\mathfrak{Hom}(\mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}) \times \mathfrak{Hom}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}) \times \mathfrak{X} \xrightarrow{\text{ev}_{\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}}} \mathfrak{Hom}(\mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}) \times \mathfrak{Y} \xrightarrow{\text{ev}_{\mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}}} \mathfrak{Z} .$$

**Corollary 2.45.** *La catégorie des ensembles simpliciaux muni de l'espace des morphismes est enrichie sur elle-même.*

DÉMONSTRATION. Avec la composition générale décrite ci-dessus, toute catégorie monoïdale symétrique fermée est enrichie sur elle-même, voir par exemple [Kel80, Section 1.6].  $\square$

**Corollary 2.46.** *Il existe une bijection naturelle*

$$\mathfrak{Hom}(\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}) \cong \mathfrak{Hom}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Hom}(\mathfrak{Y}, \mathfrak{Z})) .$$

DÉMONSTRATION. Il s'agit d'un cas particulier de la théorie générale des catégories monoïdales symétriques fermées, voir par exemple [Kel80, Section 1.5].  $\square$

**2.6. Exemples conceptuels.** Nous poursuivons ici dans la même veine que celle qui a motivée la définition des espaces de morphismes : *tous* les exemples de foncteurs à valeurs dans les ensembles simpliciaux donnés ci-dessous sont de la forme décrite à la définition 2.39 et au théorème 2.40.

**2.6.1. Ensembles simpliciaux constants.**

**Definition 2.47** (Ensemble simplicial constant). À tout ensemble  $E$ , on peut associer *l'ensemble simplicial constant*  $c(E)$  défini par

$$X_n := E, \text{ pour } n \in \mathbb{N}, \text{ et } d_i := \text{id}_E, s_i := \text{id}_E, \text{ pour } 0 \leq i \leq n .$$

Cette première famille, particulièrement simple, d'exemples d'ensembles simpliciaux est de la forme de celles obtenues par le théorème 2.40 ; il suffit pour cela de considérer la catégorie  $\mathbb{C} = \text{Ens}$  des ensembles et l'ensemble cosimplicial constant  $\mathbb{C} : [n] \mapsto \{*\}$  dont l'image est l'ensemble à un élément. Avec les notations de ce théorème, on a  $R_{\mathbb{C}}(E) = c(E)$ .

**Proposition 2.48.** *La construction des ensembles simpliciaux constants fournit un foncteur plein et fidèle*

$$c : \text{Ens} \rightarrow \Delta \text{Ens}$$

*dont l'image est formée des ensembles simpliciaux de dimension 0.*

DÉMONSTRATION. Les vérifications sont automatiques.  $\square$

Ce résultat montre que la notion d'ensemble simplicial généralise, de manière homotopique, celle d'ensemble.

**Proposition 2.49.** *Le foncteur “ensemble simplicial constant”  $c$  admet un adjoint à droite donné par le foncteur de troncation*

$$T : \Delta \text{Ens} \rightarrow \text{Ens}, \quad \mathfrak{X} \mapsto X_0$$

*et un adjoint à gauche donné par le foncteur de troncation modulo les images des premières faces*

$$\tilde{T} : \Delta \text{Ens} \rightarrow \text{Ens}, \quad \mathfrak{X} \mapsto X_0 / \sim ,$$

*où  $d_0(x) \sim d_1(x)$ , pour  $x \in X_1$ .*

$$c : \text{Ens} \xrightleftharpoons[\perp]{} \Delta \text{Ens} : T \quad \tilde{T} : \Delta \text{Ens} \xrightleftharpoons[\perp]{} \text{Ens} : c .$$

DÉMONSTRATION. Les vérifications sont automatiques. Il s'agit néanmoins de deux applications directes de résultats précédents ; par cohérence, nous donnons les détails ci-dessous.

En utilisant les notations et résultats de l'exercice 5, on voit que le foncteur  $\Upsilon : \Delta_0 \hookrightarrow \Delta$  envoie la catégorie à un objet muni de la seule identité sur  $[0]$ . La catégorie des préfaisceaux sur  $\Delta_0$ , notée  $\Delta_0 \text{Ens}$ , est la catégorie  $\text{Ens}$  des ensembles et le foncteur  $\Upsilon^*$  est le foncteur de troncation  $T$ . On voit que le foncteur  $\mathfrak{c}$  est l'extension de Kan à gauche le long de  $\Upsilon$  par l'exercice 4. Ceci démontre la première adjonction.

On obtient la seconde adjonction en appliquant le théorème 2.40 à l'ensemble cosimplicial constant  $\mathfrak{C} : [n] \mapsto \{*\}$  dont l'image est l'ensemble à un élément. En effet, avec les notations du théorème 2.40, on a  $\mathfrak{c} = R_{\mathfrak{C}}$  et  $\tilde{T} = L_{\text{an}_{\Upsilon}\mathfrak{C}}$ .  $\square$

La première adjonction induit une équivalence de catégories entre la catégorie des ensembles et celle des ensembles simpliciaux de dimension 0.

2.6.2. *Ensemble simplicial singulier.* Utilisons le théorème 2.40 pour associer fonctoriellement un ensemble simplicial à tout espace topologique. Nous avons déjà vu que la collection des simplexes géométriques standard munis de leurs cofaces et codégénérescences formaient un espace topologique cosimplicial :

$$\begin{aligned} \mathfrak{D} & : \Delta \rightarrow \text{Top} \\ [n] & \mapsto |\Delta^n|. \end{aligned}$$

**Definition 2.50** (Ensemble simplicial singulier). *L'ensemble simplicial singulier* d'un espace topologique  $X$  est défini par

$$\mathfrak{S}X := \text{Hom}_{\text{Top}}(\mathfrak{D}, X).$$

Ses éléments, appelés *simplexes singuliers*, sont les applications continues  $f : |\Delta^n| \rightarrow X$ . Ses faces et dégénérescences sont données par  $d_i(f) = f \circ \delta_i$  et  $s_i(f) = f \circ \sigma_i$ .

**Proposition 2.51.** *L'application qui associe l'ensemble simplicial singulier à un espace topologique est un foncteur*

$$\begin{aligned} \mathfrak{S} & : \text{Top} \rightarrow \Delta \text{Ens} \\ X & \mapsto \mathfrak{S}X \end{aligned}$$

dont l'adjoint à gauche est la réalisation géométrique

$$|-| : \Delta \text{Ens} \overset{\perp}{\longleftarrow} \text{Top} : \mathfrak{S}.$$

DÉMONSTRATION. Ce résultat est un cas particulier du théorème 2.40. En effet, la relation d'équivalence par laquelle on quotiente pour définir la réalisation géométrique n'est rien d'autre que le coégalisateur sur les cofaces et codégénérescences donné dans ce théorème.  $\square$

On peut donc penser la réalisation géométrique d'un ensemble simplicial comme la cofin

$$|\mathfrak{X}| = \int^n X_n \times |\Delta^n|.$$

2.6.3. *Nerf d'une catégorie.* On considère la catégorie  $\text{Cat}$  des petites catégories. Le foncteur suivant fournit un objet cosimplicial dans la catégorie des catégories :

$$\begin{aligned} \mathfrak{C} & : \Delta \rightarrow \text{Cat} \\ [n] & \mapsto \text{Cat}[n] := \{0 \rightarrow 1 \rightarrow \dots \rightarrow n\}, \end{aligned}$$

où  $\text{Cat}[n]$  est la catégorie associée à l'ensemble totalement ordonné  $[n]$ .

**Definition 2.52** (Nerf d'une catégorie). Le *nerf d'une petite catégorie*  $C$  est l'ensemble simplicial

$$\mathfrak{N}C := \text{Hom}_{\text{Cat}}(\mathfrak{C}, C).$$

EXERCISE 6. Montrer que le nerf de la catégorie  $\text{Cat}[n]$  est le  $n$ -simplexe standard :  $\mathfrak{N}\text{Cat}[n] = \Delta^n$ .

**Proposition 2.53.** Les  $n$ -simplexes du nerf d'une catégorie  $\mathcal{C}$  sont les chaînes de  $n$ -morphisms composables

$$\mathfrak{N}\mathcal{C}_n = \left\{ c_0 \xrightarrow{f_1} c_1 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_n} c_n \right\},$$

avec pour convention que  $\mathfrak{N}\mathcal{C}_0$  est formé des objets de  $\mathcal{C}$ . Les faces sont données par

$$d_i(f_1, \dots, f_n) = (f_1, \dots, f_{i+1}f_i, \dots, f_n), \quad \text{pour } 1 \leq i \leq n-1$$

et  $d_0(f_1, \dots, f_n) = (f_2, \dots, f_n)$ ,  $d_n(f_1, \dots, f_n) = (f_1, \dots, f_{n-1})$ . Les dégénérescences sont données par

$$s_i(f_1, \dots, f_n) = (f_1, \dots, f_i, \text{id}, f_{i+1}, \dots, f_n), \quad \text{pour } 0 \leq i \leq n.$$

DÉMONSTRATION. Les vérifications sont automatiques. □

EXEMPLE. Le nerf  $BG$  d'un groupe est le nerf de la catégorie à un seul objet associée. Explicitement, cet ensemble simplicial est formé des  $n$ -simplexes  $BG_n = G^n$  munis des faces et dégénérescences suivantes

$$d_i(g_1, \dots, g_n) = \begin{cases} (g_2, \dots, g_n) & \text{pour } i = 0, \\ (g_1, \dots, g_{i+1}g_i, \dots, g_n) & \text{pour } 1 \leq i \leq n-1, \\ (g_1, \dots, g_{n-1}) & \text{pour } i = n, \end{cases}$$

$$s_i(g_1, \dots, g_n) = (g_1, \dots, g_i, 1, g_{i+1}, \dots, g_n).$$

Sa réalisation géométrique  $|BG|$  est l'espace classifiant du groupe  $G$ .

Une utilité de cette approche conceptuelle, plutôt qu'avec la définition explicite, vient de l'application complète du théorème 2.40 qui montre que cette construction est fonctorielle et qu'elle admet un adjoint à gauche calculable.

**Définition 2.54** (Catégorie fondamentale  $\tau_1(\mathfrak{X})$ ). A tout ensemble simplicial  $\mathfrak{X}$ , on associe la catégorie fondamentale  $\tau_1(\mathfrak{X})$  dont les objets sont les 0-simplexes  $X_0$  et dont les morphismes sont donnés par le graphe libre sur des flèches indicées par les 1-simplexes

$$d_0(x) \xrightarrow{x \in X_1} d_1(x)$$

quotienté par les relations données par les 2-simplexes

$$\begin{array}{ccc} & \bullet & \\ d_2(y) \nearrow & & \searrow d_0(y) \\ \bullet & \xrightarrow{y \in X_2} & \bullet \\ & \xrightarrow{d_1(y)} & \bullet \end{array}$$

Dans cette catégorie, les images de la première dégénérescence  $s_0 : X_0 \rightarrow X_1$  donnent les morphismes d'identité. Les deux secondes dégénérescences  $s_0 : X_1 \rightarrow X_2$  et  $s_1 : X_1 \rightarrow X_2$  montrent respectivement que la composée à droite et à gauche par ces identités laissent invariant les morphismes.

**Proposition 2.55.** L'application qui associe le nerf à une petite catégorie est un foncteur

$$\begin{array}{ccc} \text{Cat} & \rightarrow & \Delta\text{Ens} \\ \mathcal{C} & \mapsto & \mathfrak{N}\mathcal{C} \end{array}$$

qui admet pour adjoint à gauche le foncteur catégorie fondamentale  $\tau_1$

$$\tau_1 : \Delta\text{Ens} \overset{\perp}{\longleftarrow} \text{Cat} : \mathfrak{N}.$$

DÉMONSTRATION. Il s'agit d'un corollaire direct du théorème 2.40. La construction de la catégorie fondamentale  $\tau_1(\mathfrak{X})$  a été motivée par le coégalisateur donné dans ce théorème; c'est un bon exercice que de montrer que cette catégorie est égale à cet coégalisateur. Néanmoins, la démonstration la plus simple ici est de constater que la catégorie fondamentale associée au simplexe standard n'est autre que la catégorie associée au poset  $[n]$ ,  $\tau_1(\Delta^n) = \text{Cat}[n]$ , et donc que l'extension de Kan à gauche de  $\mathcal{C}$  le long du plongement de Yoneda est le foncteur  $\tau_1$ . □

REMARQUE. Rappelons qu'un groupoïde est une catégorie où tous les morphismes sont inversibles. Le foncteur oubli de la catégorie des petits groupoïdes vers celle des petites catégories admet un adjoint à gauche. Et l'image de la catégorie fondamentale  $\tau_1(\mathfrak{X})$  par ce dernier fournit un groupoïde  $\pi_1(\mathfrak{X})$  appelé le *groupoïde fondamental de l'ensemble simplicial*  $\mathfrak{X}$ .

2.6.4. *Correspondance de Dold–Kan.* Cette exemple est l'occasion d'introduire quelques constructions qui relient les ensembles simpliciaux aux complexes de chaînes. On travaille ici sur  $\mathbb{Z}$  mais on aurait aussi bien pu travailler sur un autre anneau de base. Les applications linéaires entre modules libres provenant d'applications ensemblistes seront notées avec une police romane droite, comme par exemple  $d_i$ .

**Definition 2.56** (Complexe de Moore). Le *complexe de Moore*  $C\mathfrak{X}$  d'un ensemble simplicial  $\mathfrak{X}$  a pour chaînes de degré  $n$  le module libre sur les  $n$ -simplexes et pour différentielle la somme alternée des faces :

$$d := \sum_{i=0}^n (-1)^i d_i : \mathbb{Z}X_n \rightarrow \mathbb{Z}X_{n-1} .$$

Les relations simpliciales (4) montrent rapidement que l'opérateur  $d$  est de carré nul. On peut considérer le sous-complexe de chaînes  $D\mathfrak{X}$  du complexe de Moore engendré par les simplexes dégénérés.

**Definition 2.57** (Complexe normalisé). Le *complexe normalisé*  $N\mathfrak{X}$  d'un ensemble simplicial  $\mathfrak{X}$  est le complexe de chaînes quotient du complexe de Moore par le complexe des dégénérescences :

$$N\mathfrak{X} := (C\mathfrak{X}/D\mathfrak{X}, d) .$$

**Proposition 2.58.** *Pour tout ensemble simplicial  $\mathfrak{X}$ , la projection canonique  $C\mathfrak{X} \twoheadrightarrow N\mathfrak{X}$  est une équivalence d'homotopie.*

DÉMONSTRATION. L'idée consiste à utiliser les dégénérescences pour créer une homotopie contractante. Il s'agit d'un bon exercice qui est donc laissé aux lecteur-trice-s. Pour plus de détails, on renvoie à [ML95, Théorème VIII.6.1].  $\square$

Le complexe normalisé admet donc pour base les simplexes non-dégénérés. Le complexe de Moore et le complexe normalisé définissent des foncteurs depuis la catégorie des ensembles simpliciaux.

EXEMPLE. Le complexe normalisé  $N\Delta^n$  associé au  $n$ -simplexe standard admet pour base les éléments de la forme  $i_0 \cdots i_m$  de degré  $m$ , pour  $i_0 < \cdots < i_m$  dans  $[n]$  et pour différentielle

$$d(i_0 \cdots i_m) = \sum_{j=0}^m (-1)^j i_0 \cdots \widehat{i}_j \cdots i_m .$$

La structure d'objet cosimplicial sur les simplexes standards fournie par le plongement de Yoneda (corollaire 2.35) munit ces complexes normalisés d'une structure de complexe de chaînes cosimplicial :

$$N\Delta : \Delta \rightarrow \text{Ch} .$$

2.7. **Complexes de Kan et  $\infty$ -catégories.** Nous sommes maintenant suffisamment armés pour mettre au jour une notion simple et efficace de catégorie supérieure. Le cahier des charges impose que les catégories en soit des exemples.

**Lemme 2.59.** *Le foncteur nerf  $\mathfrak{N} : \text{Cat} \leftrightarrow \Delta\text{Ens}$  est plein et fidèle.*

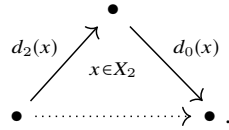
DÉMONSTRATION. Avec la définition du nerf d'une catégorie, on peut établir sans effort la bijection suivante :  $\text{Hom}_{\text{Cat}}(C, D) \cong \text{Hom}_{\Delta\text{Ens}}(\mathfrak{N}C, \mathfrak{N}D)$  .  $\square$

Les ensembles simpliciaux fournissent donc un cadre suffisamment large dans lequel on peut espérer définir une notion supérieure de catégorie. Commençons pour cela par caractériser les catégories parmi les ensembles simpliciaux, c'est-à-dire par décrire l'image essentielle du foncteur nerf.

Le résultat précédent peut aussi être montré en utilisant le fait que la counité de l'adjonction nerf-catégorie fondamentale de la proposition 2.55 est un isomorphisme naturel. Il n'en est pas de même pour l'unité d'adjonction  $\nu_{\mathfrak{X}} : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{N} \tau_1(\mathfrak{X})$ . Les premiers problèmes surviennent pour les 2-simplexes



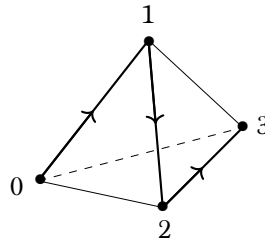
car  $v(x) = (d_2(x), d_0(x))$  pour  $x \in X_2$ . Graphiquement, on ne conserve que les deux faces "composables" du 2-simplexe :



Pour que l'unité d'adjonction soit un isomorphisme, il faut que cette seule donnée puisse caractériser tous les 2-simplexes de  $\mathfrak{X}$ . Pour cela, on remarque d'abord que cette donnée correspond aux morphismes d'ensembles simpliciaux  $\Lambda_1^2 \rightarrow \mathfrak{X}$ . Puis, qu'elle caractérise le 2-simplexe si et seulement le diagramme suivant admet une unique extension

$$(*) \quad \begin{array}{ccc} \Lambda_1^2 & \longrightarrow & \mathfrak{X} \\ \downarrow & \nearrow \exists! & \\ \Delta^2 & & \end{array} .$$

De manière générale, l'unité d'adjonction ne retient que la "plus longue suite d'arêtes composables" d'un  $n$ -simplexe



à savoir explicitement

$$v(x) = (d_2^{n-1}(x), d_2^{n-2}d_0(x), \dots, d_2d_0^{n-2}(x), d_0^{n-1}(x)) ,$$

où  $x \in X_n$  (avec un léger abus de notation pour les faces). Pour un 3-simplexe  $x \in X_3$ , on peut récupérer de manière unique la donnée "de la face 012", à savoir  $d_3(x)$  grâce à la propriété (\*), puis de même celle "de la face 123", à savoir  $d_0(x)$  et enfin celle "de la face 013", à savoir  $d_2(x)$ . Ceci correspond à un morphisme d'ensembles simpliciaux  $\Lambda_1^3 \rightarrow \mathfrak{X}$ . Nous avons donc besoin que le diagramme suivant admette une unique extension

$$(*) \quad \begin{array}{ccc} \Lambda_1^3 & \longrightarrow & \mathfrak{X} \\ \downarrow & \nearrow \exists! & \\ \Delta^3 & & \end{array} .$$

Nous aurions aussi bien pu commencer de la même manière en finissant par la donnée "de la face 023", à savoir  $d_1(x)$ . Il faudrait alors demander une unique extension du morphisme  $\Lambda_2^3 \rightarrow \mathfrak{X}$  depuis le cornet  $\Lambda_2^3$ . En dimension supérieure, on est naturellement amené à considérer les définitions et conditions suivantes.

**Definition 2.60** (Cornets internes et externes). Les *cornets internes* sont ceux de la forme  $\Lambda_k^n$  pour  $1 \leq k \leq n-1$ . Les *cornets externes* sont ceux de la forme  $\Lambda_0^n$  et  $\Lambda_n^n$ .

**Proposition 2.61.** *La catégorie des petites catégories s'identifie à la sous-catégorie pleine des ensembles simpliciaux qui vérifient la propriété d'unique extension le long des cornets internes :*

$$\begin{array}{ccc}
 \Lambda_k^n & \longrightarrow & \mathfrak{X} \\
 \downarrow & \nearrow \exists! & \\
 \Delta^n & & 
 \end{array}
 \quad \text{pour } n \in \mathbb{N} \text{ et } 1 \leq k \leq n-1 .$$

DÉMONSTRATION. On commence par remarquer que le nerf d'une catégorie vérifie cette propriété d'unique extension le long des cornets internes. Ensuite, on montre, en utilisant les arguments donnés dans l'analyse ci-dessus, que l'unité de l'adjonction nerf-catégorie fondamentale est un isomorphisme naturel lorsque l'on se restreint aux ensembles simpliciaux qui vérifient cette propriété d'unique extension.  $\square$

REMARQUE. Le nerf d'une catégorie ne vérifie en général pas de propriété d'extension le long des cornets externes. Si on considère, par exemple, les cornets externes de dimension 2 suivants

$$\begin{array}{ccc}
 & & y \\
 & \nearrow g & \\
 x & & \\
 \downarrow \text{id}_x & & \\
 x & \longrightarrow & x
 \end{array}
 \quad \text{et} \quad
 \begin{array}{ccc}
 & x & \\
 & \searrow f & \\
 y & & \\
 \downarrow \text{id}_y & & \\
 y & \longrightarrow & y
 \end{array} ,$$

la propriété d'extension impliquerait l'existence d'inverse à gauche et à droite respectivement.

EXERCISE 7. Montrer que la catégorie des petits groupoïdes, c'est-à-dire des petites catégories où tous les morphismes sont inversibles, s'identifie à la sous-catégorie pleine des ensembles simpliciaux qui vérifient la propriété d'unique extension le long de tout cornet  $\Lambda_k^n$ , pour  $n \in \mathbb{N}$  et  $0 \leq k \leq n$ .

Comment des morphismes en dimension supérieure peuvent-ils apparaître naturellement sur un objet mathématique? On peut répondre à cette question en essayant de construire un  $\infty$ -groupoïde fondamental associé à un espace topologique. Rappelons que le groupoïde fondamental d'un espace topologique  $X$  est la catégorie dont les objets sont les points de  $X$  et dont les morphismes sont les classes d'homotopie de chemins entre deux points. Notons qu'à cause de la paramétrisation des chemins, le quotient par la relation d'homotopie permet d'avoir une composition des morphismes associatives. L'écueil d'une telle construction est qu'elle ne voit pas la donnée homotopique supérieure des espaces topologiques. On a donc envie de considérer un  $\infty$ -groupoïde fondamental d'un espace topologique  $X$  dont les objets seraient les points de  $X$ , les 1-morphismes les chemins entre deux points, les 2-morphismes les homotopies entre chemins, les 3-morphismes les homotopies entre homotopies, etc.

Premier problème : la composition des chemins n'est pas associative ... mais on peut contrôler le défaut d'associativité grâce aux 2-morphismes. Néanmoins l'hypothèse homotopique de Grothendieck voudrait que les notions d' $\infty$ -groupoïde et d'espace topologique soient équivalentes, dans un sens à préciser. La version décrite ci-dessus serait une version globulaire d'un potentiel  $\infty$ -groupoïde fondamental. À la place, on préfère ici considérer le modèle simplicial donné par l'ensemble simplicial singulier.

On veut donc que les espaces topologiques à travers leurs ensembles simpliciaux singuliers soient des exemples pour la notion recherchée de catégorie supérieure. Pour cela, nous aimerions reprendre l'étude précédente mais avec le foncteur des ensembles simpliciaux singuliers à la place du foncteur nerf. Mais le premier résultat de la partie précédente ne tient partiellement plus ici.

**Lemme 2.62.** *Le foncteur des ensembles simpliciaux singuliers est fidèle mais pas plein.*

DÉMONSTRATION. Soit  $f : X \rightarrow Y$  une application continue entre espaces topologiques. Le morphisme induit au niveau des ensembles simpliciaux singuliers  $\mathfrak{S}(f) : \mathfrak{S}X \rightarrow \mathfrak{S}Y$  envoie un simplexe singulier  $\varphi : \Delta^n \rightarrow X$  sur  $f \circ \varphi$ . L'ensemble des 0-simplexes singuliers est en bijection avec les éléments

de l'espace topologique et, avec cette identification, l'application  $\mathfrak{S}(f)_0 : X \rightarrow Y$  est l'application  $f$ . Donc le foncteur  $\mathfrak{S}$  est fidèle .

Considérons un espace topologique totalement discontinu, par exemple  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ , et l'espace topologique discret de même ensemble sous-jacent, noté ici  $\mathbb{Q}^{\text{dis}}$ . Dans les deux cas, les simplexes singuliers sont les applications constantes et l'ensemble simplicial singulier est l'ensemble simplicial constant  $\mathbb{Q}$ . Or, le morphisme simplicial identité  $\mathfrak{S}\mathbb{Q} \rightarrow \mathfrak{S}\mathbb{Q}^{\text{dis}}$  ne saurait venir de l'identité  $\text{id} : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}^{\text{dis}}$  car cette dernière n'est pas continue .  $\square$

Il est donc illusoire de chercher à réduire la catégorie des ensembles simpliciaux pour faire de l'adjonction ensemble simplicial singulier-réalisation géométrique une équivalence de catégories. Néanmoins cette dernière induit une équivalence plus faible, de nature homotopique, appelée équivalence de Quillen, voir ???. Dans ce contexte, la notion simpliciale "équivalente" à celle d'espace topologique est la suivante.

**Definition 2.63** (Complexe de Kan). Un *complexe de Kan* est un ensemble simplicial  $\mathfrak{X}$  qui vérifie la propriété d'extension le long de tous les cornets :

$$(5) \quad \begin{array}{ccc} \Lambda_k^n & \longrightarrow & \mathfrak{X} \\ \downarrow & \nearrow \exists & \\ \Delta^n & & \end{array} \quad \text{pour } n \in \mathbb{N} \text{ et } 0 \leq k \leq n .$$

**Proposition 2.64.** Pour tout espace topologique  $X$ , l'ensemble simplicial singulier  $\mathfrak{S}X$  est un complexe de Kan.

DÉMONSTRATION. L'adjonction ensemble simplicial singulier-réalisation géométrique de la proposition 2.51 montre que la propriété d'extension de Kan (5) est équivalente à la propriété d'extension similaire au niveau des espaces topologiques

$$\begin{array}{ccc} |\Lambda_k^n| & \longrightarrow & X \\ \downarrow & \nearrow \exists & \\ |\Delta^n| & & \end{array} .$$

Cette dernière se démontre en réalisant le  $k^{\text{e}}$ -cornet  $|\Lambda_k^n|$  comme un retract par déformation du  $n$ -simplexe géométrique standard  $|\Delta^n|$ .  $\square$

EXERCISE 8.

- ◊ Montrer que le nerf d'un groupe est un complexe de Kan et que si le groupe est non-trivial, il ne peut pas être isomorphe à un ensemble simplicial singulier. Donc les complexes de Kan ne forment pas l'image essentielle du foncteur des ensembles simpliciaux singuliers.
- ◊ Montrer que l'ensemble simplicial sous-jacent à un groupe simplicial est un complexe de Kan.
- ◊ Montrer que les  $n$ -simplexes standard  $\Delta^n$  ne sont pas des complexes de Kan pour  $n \geq 2$ .

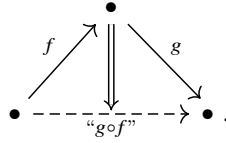
Nous y sommes, pour obtenir une bonne définition de catégorie supérieure, il suffit de considérer des ensembles simpliciaux qui vérifient une propriété commune aux nerfs de catégories et aux ensembles simpliciaux singuliers : celle d'extension, non-nécessairement unique, le long des cornets internes.

**Definition 2.65** ( $\infty$ -catégorie). Une  $\infty$ -catégorie est un ensemble simplicial  $\mathfrak{X}$  qui vérifie la propriété d'extension le long des cornets internes :

$$(6) \quad \begin{array}{ccc} \Lambda_k^n & \longrightarrow & \mathfrak{X} \\ \downarrow & \nearrow \exists & \\ \Delta^n & & \end{array} \quad \text{pour } n \in \mathbb{N} \text{ et } 1 \leq k \leq n-1 .$$

Cette notion a été introduite par Boardman–Vogt dans leur étude des propriétés homotopiques des structures algébriques [BV73] sous le nom de *complexe de Kan faible*. Elle a été intensivement étudiée d’abord par Joyal [Joy02, ?] puis par Lurie [Lur09].

Rétrospectivement, on peut interpréter les 0-simplexes d’une  $\infty$ -catégorie comme ses objets et les 1-simplexes comme ses morphismes. La condition d’extension le long du cornet  $\Lambda_1^2$



fournit un candidat pour la composée “ $g \circ f$ ” de deux morphismes composables ainsi qu’une “homotopie” de  $(g, f)$  vers “ $g \circ f$ ”. La composition n’est donc pas unique, ni stricte. Ceci n’est pas un problème, au contraire. Ce degré de liberté est souhaité et nous verrons à la section ?? que les différents choix sont homotopiquement uniques.

## 2.8. Homotopie simpliciale.

## 2.9. Simplicial homotopy.

**Definition 2.66** (Path). A *path* in a simplicial set  $\mathfrak{X}$  is a simplicial map  $p : \Delta^1 \rightarrow \mathfrak{X}$ .

### description

**Definition 2.67.** Two elements  $a$  and  $b$  in  $X_0$  are *homotopic*, or *in the same path-component*, denoted by  $a \sim b$ , if there exists a path  $p : \Delta^1 \rightarrow \mathfrak{X}$  such that  $p(0) = a$  and  $p(1) = b$ , i.e. there exists  $x$  in  $X_1$  such that  $d_1(x) = a$  and  $d_0 = b$ .

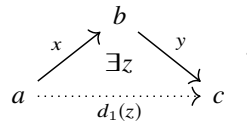
REMARK. The binary relation  $\sim$  is *not* an equivalence relation in general.

**Proposition 2.68.** *Let  $\mathfrak{X}$  be a Kan complex, then the relation  $\sim$  is an equivalence relation.*

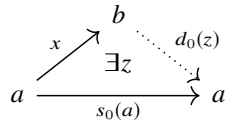
*Démonstration.*

**Reflexivity:**  $a \sim a$  : consider the path  $s_0(A)$ .

**Transitivity:** Consider  $a \sim b$  and  $b \sim c$ . By the extension property, there exists  $z$  in  $X_2$  such that :



**Symmetry:** By the extension property, there exists  $z$  in  $X_2$  such that :



□

**For the rest of this section, we consider only Kan complexes.**

**Definition 2.69.** Let  $\mathfrak{X}$  be a Kan complex. We denote by  $\pi_0(\mathfrak{X}) := X_0 / \sim$  the set of its path components.

Recall that

$$\mathfrak{H}om(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})_0 = \text{Hom}_{\Delta\text{Ens}}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}), \text{ and } \mathfrak{H}om(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})_1 = \text{Hom}_{\Delta\text{Ens}}(\mathfrak{X} \times \Delta^1, \mathfrak{Y}).$$

**Definition 2.70.** Two maps of simplicial sets  $f, g : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}$  are *homotopic* if there are homotopic when viewed as 0 simplicies of the mapping space  $\mathfrak{H}om(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ .

REMARK.

- There exists a notion of a *pair* of simplicial sets  $(X, A)$ , that is with  $A \subseteq X$ .
- There exists a notion of a *Kan pair* of simplicial sets  $(X, A)$ , that is with  $A \subseteq X$  and  $A$  and  $X$  Kan complexes. For instance, when  $\mathfrak{X}$  is a Kan complex, then  $(\mathfrak{X}, *)$  is a Kan pair.
- There exists a notion of *homotopy relative to*  $A \subseteq X$  between two maps  $f, g : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}$ ; it consists of a map  $H : \mathfrak{X} \times \Delta^1 \rightarrow \mathfrak{Y}$  such that  $H|_{A \times \Delta^1} = f|_A = g|_A$ .

Let  $\mathfrak{X}$  be a Kan complex with a base point  $*$ , i.e. a simplicial map  $\Delta^0 \rightarrow \mathfrak{X}$ .

**Definition 2.71** (Homotopy group). The  $n$ -th *homotopy group* of  $\mathfrak{X}$  is defined by

$$\pi_n(\mathfrak{X}, *) := [(\Delta^n, \partial\Delta^n), (\mathfrak{X}, *)] = \{f : \Delta^n \rightarrow \mathfrak{X} \text{ s.t. } f|_{\partial\Delta^n} : \partial\Delta^n \rightarrow *\} / \sim_{\text{rel } \partial\Delta^n} .$$

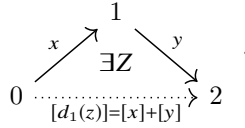
ajouter des explications

**Definition-Proposition 2.72** (Group law). Let  $[x]$  and  $[y]$  be two classes in  $\pi_n(\mathfrak{X}, *)$  with  $x$  and  $y$  in  $X_n$ . The group law of  $\pi_n(\mathfrak{X}, *)$  is defined by

$$[x] + [y] := [d_n(Z)]$$

where *idea + dessin*.

EXEMPLE.



**Theorem 2.73.** Let  $\mathfrak{X}$  be a Kan complex with a base point  $*$ .

- (1) For all  $n$  in  $\mathbb{N} - \{0\}$ ,  $(\pi_n(\mathfrak{X}, *), +, [*])$  is a group, which is abelian if  $n \geq 2$ .
- (2) We have the following isomorphism of groups

$$(\pi_n(\mathfrak{X}, *), +, [*]) \cong (\pi_n(|X|, |*|), +, |*|).$$

*Démonstration.*

- (1) **Unit:** Consider  $s_n(x) :$

$$s_n(x) = (x_0, \dots, x_{n-1}, x_n, x_n) \text{ then } \partial Z = (*, \dots, *, x, x).$$

**Inverse:** Consider  $\Lambda_{n+1}^{n+1}$ .

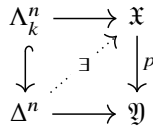
**Associativity:** Consider  $[x]$ ,  $[y]$  and  $[z]$  in  $\pi_n(\mathfrak{X}, *)$ , with  $x, y$  and  $z$  in  $X_n$ .

- (2) TBC

dessin a faire

□

**Definition 2.74** (Kan fibration). A *Kan fibration*  $p : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}$  is simplicial map which satisfies the following extension property



**Definition 2.75** (Cofibration and weak equivalence). Let  $f : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}$  be a simplicial map.

- $f$  is a *cofibration* if it is a monomorphism.
- $f$  is a *weak equivalence* if, for all  $n$  in  $\mathbb{N}$ , the morphism  $\pi_n(f)$  is an isomorphism.

**Theorem 2.76.** Let  $\mathfrak{X}$  and  $\mathfrak{Y}$  be Kan complexes and let  $p : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}$  be a Kan fibration. Then  $\mathfrak{F} := p^{-1}(*)$  is a Kan complex and we have the following long exact sequence

$$\begin{array}{ccccccc} \pi_0(\mathfrak{Y}) & \longleftarrow & \pi_0(\mathfrak{X}) & \longleftarrow & \pi_0(\mathfrak{F}) & \longleftarrow & \\ & & \longleftarrow & & \longleftarrow & & \\ & & \pi_1(\mathfrak{Y}) & \longleftarrow & \pi_1(\mathfrak{X}) & \longleftarrow & \pi_1(\mathfrak{F}) & \longleftarrow & \\ & & & & \longleftarrow & & & & \\ & & & & \pi_2(\mathfrak{Y}) & \longleftarrow & \pi_2(\mathfrak{X}) & \longleftarrow & \pi_2(\mathfrak{F}) & \longleftarrow & \dots \end{array}$$

REMARK. There exists also the notion of *Kan triple*  $(X, A, *)$  and the notion of *relative homotopy groups*, to which can be associated a long exact sequence.

**Theorem 2.77** (Quillen). *The adjunction*

$$|-| : \Delta\text{Ens} \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \perp \\ \xleftarrow{\quad} \end{array} \text{Top} : \text{Sing}$$

*induces the following equivalence of categories*

$$\text{Ho}(\text{CW-cx}) \cong \text{Ho}(\text{Kan-cx}) .$$

Le but de cet appendice est de rappeler des résultats un peu plus avancés de la théorie des catégories, qui sont souvent mal connus mais dont nous nous servons à travers ce livre. On commence par la notion de préfaisceau en se focalisant sur le plongement de Yoneda qui permet de voir toute catégorie localement petite comme une sous-catégorie pleine de sa catégorie de préfaisceaux. Ce résultat ne nécessite pas d'idée nouvelle, il suffit juste de connaître les définitions de base pour le démontrer. On traite ensuite des extensions de Kan, qui sont les objets les plus fondamentaux de la théorie des catégories : Saunders MacLane a d'ailleurs intitulé une des sections de son livre [ML98] : "All concepts are Kan extensions". En effet, (presque) toutes les notions de la théorie des catégories (adjonction, limites, colimites, etc.) s'expriment en ces termes. Néanmoins la notion d'extensions de Kan est très abordable et naturelle, quand elle est prise par le bon bout.

### A.1. Préfaisceaux.

**Definition A.1** (Préfaisceau). Un *préfaisceau* sur la catégorie  $C$  est un foncteur contravariant de  $C$  vers la catégorie des ensembles :  $C^{\text{op}} \rightarrow \text{Ens}$ . La catégorie des préfaisceaux sur  $C$  est une catégorie de foncteurs : elle admet pour morphismes les transformations naturelles. On la note  $\text{Fon}(C^{\text{op}}, \text{Ens})$ .

EXEMPLE. Soit  $C$  une catégorie *localement petite*, c'est-à-dire que chaque classe de morphismes  $\text{Hom}_C(b, a)$  est un ensemble, pour  $a, b$  dans  $C$ . À tout object  $a$  de  $C$ , on associe le foncteur représentable suivant

$$\begin{aligned} Y_a & : C^{\text{op}} \rightarrow \text{Ens} \\ b & \mapsto \text{Hom}_C(b, a) \end{aligned}$$

qui est un préfaisceau sur  $C$ .

**Definition A.2** (Plongement de Yoneda). On appelle *plongement de Yoneda* le foncteur

$$\begin{aligned} Y & : C \rightarrow \text{Fon}(C^{\text{op}}, \text{Ens}) \\ a & \mapsto Y_a . \end{aligned}$$

Le fait que le plongement de Yoneda soit un foncteur signifie en particulier que tout morphisme  $f : a \rightarrow a'$  dans la catégorie  $C$  induit une transformation naturelle  $f_* : Y_a \Rightarrow Y_{a'}$ , obtenue en composant par  $f$ . Le théorème suivant montre notamment qu'il n'y en a pas d'autres.

**Theorem A.3** (Lemme de Yoneda). *Soit  $C$  une catégorie localement petite. Il existe une bijection*

$$\text{Nat}(Y_a, X) \cong X(a)$$

*naturelle en  $a$  dans  $C$  et en  $X$  dans  $\text{Fon}(C^{\text{op}}, \text{Ens})$ .*

DÉMONSTRATION. Considérons une transformation naturelle  $\psi : Y_a \Rightarrow X$ . Appliquée en  $a$ , elle donne une application ensembliste  $\psi_a : \text{Hom}_C(a, a) \rightarrow X(a)$  qui envoie l'identité  $\text{id}_a$  sur un élément  $x_\psi$  de  $X(a)$ . Cet élément caractérise complètement la transformation naturelle  $\psi$  :

$$\psi_b(g) = X(g)(x_\psi) ,$$

pour tout  $g \in \text{Hom}_C(b, a)$ . Il reste à montrer que cette bijection est naturelle, ce qui est automatique et donc laissé au lecteur-trice.  $\square$

Si on applique ce résultat au préfaisceau  $Y_{a'}$ , la bijection  $\text{Nat}(Y_a, Y_{a'}) \cong Y_{a'}(a) = \text{Hom}_C(a, a')$ , décrite dans cette démonstration, associe  $f^* \mapsto f$ , pour tout morphisme  $f : a \rightarrow a'$  dans  $C$ . Ceci montre que les seules transformations naturelles entre foncteurs représentables sont celles issues de morphismes de la catégorie  $C$  par tirage en arrière. En d'autres termes, cela donne le résultat suivant.

**Corollary A.4.** *Le plongement de Yoneda est plein et fidèle.*

DÉMONSTRATION. Cela signifie que l'application

$$\begin{aligned} \text{Hom}_C(a, a') & \rightarrow \text{Nat}(Y_a, Y_{a'}) \\ f & \mapsto f^* \end{aligned}$$

est bijective, ce qui est une conséquence directe du lemme de Yoneda (Théorème A.3) par les arguments donnés ci-dessus.  $\square$

REMARQUE. Ce corollaire nous dit que deux préfaisceaux représentables  $Y_a$  et  $Y_{a'}$  sont isomorphes si et seulement si  $a$  et  $a'$  sont isomorphes dans la catégorie  $C$ .

Ce résultat est une forme de mise an abîme : toute catégorie localement petite est une sous-catégorie pleine de sa catégorie de préfaisceaux. Plus précisément, elle est identifiée avec la sous-catégorie des préfaisceaux représentables.

**Proposition A.5.** *Pour toute catégorie  $C$ , sa catégorie des préfaisceaux  $\text{Fon}(C^{\text{op}}, \text{Ens})$  est complète et cocomplète.*

DÉMONSTRATION. Les limites et colimites dans la catégorie des préfaisceaux sont données point-par-point par celles de la catégorie des ensembles. Soit  $F : D \rightarrow \text{Fon}(C^{\text{op}}, \text{Ens})$  un foncteur ; on note

$$F_c : D \rightarrow \text{Ens} \\ d \mapsto F(d)(c)$$

le foncteur associé pour tout  $c$  dans  $C$ . La limite et la colimite du foncteur  $F$  sont données par

$$\left(\lim_D F\right)(c) = \lim_D F_c \quad \text{et} \quad \left(\text{colim}_D F\right)(c) = \text{colim}_D F_c .$$

□

Le plongement de Yoneda permet donc de voir une catégorie localement petite dans une catégorie complète et cocomplète. La catégorie des préfaisceaux satisfait même la propriété universelle pour cette dernière propriété : pour tout foncteur  $F : C \rightarrow D$  vers une catégorie cocomplète, il existe un foncteur  $G$  *cocontinu*, c'est-à-dire qui préserve les colimites, unique à unique isomorphisme qui factorise  $F$  par  $Y$  :

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{Y} & \text{Fon}(C^{\text{op}}, \text{Ens}) \\ & \searrow F & \downarrow \exists! G \\ & & D \end{array}$$

On peut alors parler de “complétion cocomplète” de la catégorie initiale.

EXERCISE 9. Avec le lemme de Yoneda, montrer le théorème de Cayley : tout groupe fini est un sous-groupe d'un groupe de permutations.

L'omniprésence des préfaisceaux représentables dans la catégorie des préfaisceaux est encore plus forte que cela. Le résultat suivant montre qu'ils forment une sous-catégorie *dense*, c'est-à-dire que tout préfaisceau peut s'écrire canoniquement comme une colimite de préfaisceaux représentables. Tout l'enjeu est alors de trouver la catégorie qui indice cette colimite.

Soit  $X \in \text{Fon}(C^{\text{op}}, \text{Ens})$  un préfaisceau. On cherche donc une catégorie  $E$  munie d'un foncteur  $\Pi : E \rightarrow C$  telle que la colimite de  $Y \circ \Pi$  sur  $E$  donne le foncteur  $X$ . Comme le foncteur colimite est adjoint à gauche du foncteur constant  $\Delta$ , qui à tout préfaisceau  $Z$  associe le foncteur  $\Delta_Z : e \in E \mapsto Z \in \text{Fon}(C^{\text{op}}, \text{Ens})$ , on doit avoir une bijection naturelle

$$\text{Nat}(X, Z) \cong \text{Nat}(Y \circ \Pi, \Delta_Z) .$$

Une transformation naturelle  $\alpha : X \Rightarrow Z$  est équivalente à la donnée d'un élément  $z_{(c,x)} \in Z(c)$  pour tout  $c \in C$  et tout  $x \in X(c)$  vérifiant  $Z(f^{\text{op}})(z_{(d,y)}) = z_{(c,x)}$  pour tout morphisme  $f : c \rightarrow d$  de  $C$  et tout  $y \in X(d)$  tel que  $X(f^{\text{op}})(y) = x$ . On est donc amené à considérer cette catégorie d'indices issue du préfaisceau  $X$ .

**Definition A.6** (Catégorie des éléments d'un préfaisceau). La *catégorie des éléments d'un préfaisceau*  $X$  admet pour objets les paires  $(c, x)$ , avec  $c \in C$  et  $x \in X(c)$ , et pour morphismes entre  $(c, x)$  et  $(d, y)$  les morphismes  $f : c \rightarrow d$  de la catégorie  $C$  qui vérifient  $X(f^{\text{op}})(y) = x$ . On la note  $E(X)$ .

La catégorie des éléments d'un préfaisceau  $X$  est munie d'un foncteur oubli canonique

$$\Pi : E(X) \rightarrow C, \quad (c, x) \mapsto c .$$



**Theorem A.7** (Théorème de densité). *Tout préfaisceau  $X \in \text{Fon}(C^{\text{op}}, \text{Ens})$  sur une catégorie  $C$  localement petite est la colimite de la composée du foncteur oubli avec le plongement de Yoneda sur la catégorie de ses éléments :*

$$X \cong \text{colim}_{E(X)} Y \circ \Pi .$$

DÉMONSTRATION. Reprenons l'analyse entamée ci-dessus. Le lemme de Yoneda (Théorème A.3) fournit une transformation naturelle  $\psi_{(c,x)} : Y_c \Rightarrow Z$  associée à tout élément  $z_{(c,x)}$ . La condition de compatibilité vérifiée par les  $z_{(c,x)}$  est équivalente au fait que les  $\psi_{(c,x)}$  forment une transformation naturelle  $\psi : Y \circ \Pi \Rightarrow \Delta_Z$ . L'application  $\alpha \mapsto \psi$  est bijective, par le lemme de Yoneda, et elle est naturelle en  $Z \in \text{Fon}(C^{\text{op}}, \text{Ens})$ , ce qui conclut la démonstration.  $\square$

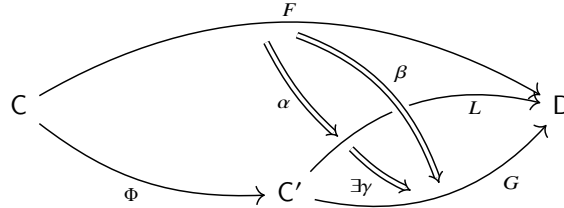
**A.2. Extensions de Kan.** L'idée à la base de la notion d'extensions de Kan est celle d'extension des foncteurs. On sait que toute application ensembliste peut s'étendre à un domaine plus gros, mais de façon non-canonique. Dans le contexte des catégories, la situation est différente : les extensions de Kan montrent que l'on peut étendre les foncteurs à un autre domaine de façon canonique et optimale. Dans cette section, nous ne traiterons en détail que la notion d'extension de Kan à gauche, la notion duale à droite étant l'exacte opposée. Dans le corps de ce texte, nous n'utilisons que les extensions de Kan à gauche et la théorie des extensions de Kan à droite s'obtient automatiquement en changeant le sens des transformations naturelles, en considérant des limites à la place des colimites pour des limites, etc.

Soit  $\Phi : C \rightarrow C'$  un foncteur. En tirant en arrière par  $\Phi$ , tout foncteur  $G : C' \rightarrow D$  induit un foncteur  $\Phi^*(G) = G \circ \Phi : C \rightarrow D$ . Cette construction induit un foncteur entre catégories de foncteurs :

$$\Phi^* : \text{Fon}(C', D) \rightarrow \text{Fon}(C, D) .$$

On se pose alors la question de l'existence d'un adjoint à gauche et à droite.

**Proposition A.8.** *Le foncteur  $\Phi^*$  admet un adjoint à gauche si et seulement si, pour tout foncteur  $F : C \rightarrow D$ , il existe un foncteur  $L : C' \rightarrow D$  et une transformation naturelle  $\alpha : F \Rightarrow L \circ \Phi$  telle que, pour tout foncteur  $G : C' \rightarrow D$  équipé aussi d'une transformation naturelle  $\beta : F \Rightarrow G \circ \Phi$ , il existe une unique transformation naturelle  $\gamma : L \Rightarrow G$  factorisant  $\beta$ , c'est-à-dire  $\beta = (\gamma \Phi) \circ \alpha$ .*



Dualement, le foncteur  $\Phi^*$  admet un adjoint à droite si et seulement si il admet une caractérisation similaire obtenue en changeant le sens des transformations naturelles.

DÉMONSTRATION. Ce résultat est l'application à un cas particulier d'un théorème général sur les adjonctions. Il se démontre néanmoins sans surprise de la manière suivante.

Pour montrer que la condition est nécessaire, on se donne un adjoint à gauche  $\mathcal{L} : \text{Fon}(C, D) \rightarrow \text{Fon}(C', D)$  et on pose

$$\chi_{F,G} : \text{Nat}(\mathcal{L}(F), G) \cong \text{Nat}(F, G \circ \Phi)$$

la bijection naturelle en  $F : C \rightarrow D$  et en  $G : C' \rightarrow D$  de cette adjonction. Pour  $G = \mathcal{L}(F)$ , on obtient une transformation naturelle

$$\alpha := \chi_{F, \mathcal{L}(F)}(\mathbb{1}_{\mathcal{L}(F)}) : F \Rightarrow \mathcal{L}(F) \circ \Phi ,$$

qui vérifie

$$(*) \quad \chi_{F,G}(\gamma) = (\Phi \gamma) \circ \alpha ,$$

pour toute transformation naturelle  $\gamma : \mathcal{L}(F) \Rightarrow G$ . Pour obtenir la condition nécessaire de l'énoncé, il suffit de poser  $L := \mathcal{L}(F)$  et de considérer la transformation naturelle  $\alpha$ . Pour toute transformation

naturelle  $\beta : F \Rightarrow G \circ \Phi$ , il existe une unique transformation naturelle  $\gamma : L \Rightarrow G$  vérifiant  $\beta = (\gamma\Phi) \circ \alpha$  par bijectivité de  $\chi_{F,G}$  et l'équation (\*).

La condition de l'énoncé est suffisante. Posons  $\mathcal{L}(F) := L$ , pour tout foncteur  $F : C \rightarrow D$ . Soit  $\varphi : F \Rightarrow F'$  une transformation naturelle. La propriété universelle vérifiée par  $\alpha$  implique qu'il existe une unique transformation naturelle  $\mathcal{L}(\varphi) : \mathcal{L}(F) \Rightarrow \mathcal{L}(F')$  telle que  $(\mathcal{L}(\varphi)\Phi) \circ \alpha = \alpha' \circ \varphi$ . Cette propriété universelle montre à nouveau que  $\mathcal{L}$  définit bien un foncteur. On définit alors l'application  $\chi_{F,G}$  par la formule (\*). Elle est naturelle par la condition définissant  $\mathcal{L}(\varphi)$  et elle est bijective par la propriété universelle vérifiée par les  $\alpha$ .  $\square$

Comme tout objet de la théorie des catégories, une paire  $(L, \alpha)$  vérifiant la propriété universelle énoncée dans la proposition précédente est unique à isomorphisme près; elle a donc le droit à un petit nom.

**Definition A.9** (Extensions de Kan). On appelle *extension de Kan à gauche du foncteur  $F$  le long du foncteur  $\Phi$*  la paire  $(L, \alpha)$  vérifiant la propriété universelle de la proposition A.8. On la note  $(\text{Lan}_\Phi F, \alpha)$ . La paire vérifiant la condition duale est appelée *extension de Kan à droite du foncteur  $F$  le long du foncteur  $\Phi$*  et notée  $(\text{Ran}_\Phi F, \alpha)$ .

Les extensions de Kan ne factorisent en général pas le foncteur initial  $F$  (chose impossible à moins que d'avoir une sous-catégorie par exemple), mais leur composée avec le foncteur  $\Phi$  fournit est la meilleure approximation de  $F$ . Les notions d'extensions de Kan sont omniprésentes en théorie des catégories, elles supplantent par exemple celles de (co)limite et d'adjonction.

EXEMPLE. Soit  $C' = 1$  la catégorie terminale à un seul objet  $*$  (et un seul morphisme) et soit  $\Pi : C \rightarrow 1$  l'unique foncteur de la catégorie  $C$  vers cette dernière. Dans ce cas, l'extension de Kan à gauche d'un foncteur  $F : C \rightarrow D$  est équivalente à sa colimite

$$\text{Lan}_\Pi(F)(*) = \text{colim}_C F$$

et son extension de Kan à droite est équivalente à sa limite

$$\text{Ran}_\Pi(F)(*) = \lim_C F .$$

EXERCISE 10.

- (1) Montrer qu'un foncteur  $F : A \rightarrow B$  admet un adjoint à droite si et seulement si le foncteur  $1_A : A \rightarrow A$  admet une extension de Kan à gauche  $(\text{Lan}_F 1_A, \alpha)$  le long de  $F$  vérifiant la propriété que  $(F \circ \text{Lan}_F 1_A, F\alpha)$  est une extension de Kan à gauche de  $F$  le long de lui-même.
- (2) Lorsque c'est le cas, Montrer que l'extension de Kan à gauche  $\text{Lan}_F 1_A$  est l'adjoint à droite de  $F$ ,

$$F \dashv \text{Lan}_F 1_A$$

et que l'unité d'adjonction est donnée par  $F\alpha$ .

- (3) Écrire le résultat dual pour l'existence d'adjoints à gauche en terme d'extensions de Kan à droite.

Pour une nouvelle mise en abîme, rappelons que les notions d'extensions de Kan résolvent un problème d'existence d'adjonction : la proposition A.8 affirme que le foncteur  $\Phi^*$  admet un adjoint à gauche (respectivement à droite) si et seulement si tout foncteur  $F : C \rightarrow D$  admet une extension de Kan à gauche (respectivement à droite). Dans ce cas de figure, on a

$$\text{Lan}_\Phi \dashv \Phi^* \dashv \text{Ran}_\Phi .$$

Il reste donc à montrer que les extensions de Kan existent. Analysons le cas où le foncteur  $\Phi : C \hookrightarrow C'$  est une inclusion d'une sous-catégorie pleine. Supposons que l'on dispose d'une extension  $L : C' \rightarrow D$  de  $F$ , c'est-à-dire  $F = L \circ \Phi$ . le long d'un foncteur

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{F} & D \\ & \searrow \Phi & \nearrow L \\ & C' & \end{array}$$

Soit  $x$  un objet de  $C'$  et cherchons à caractériser l'image de  $x$  par le foncteur  $L$ . Pour toute paire  $(a, f : a \rightarrow x)$  avec  $a$  un objet de  $C$  et  $f$  un morphisme de  $C'$ , on dispose d'un morphisme  $L(f) : L(a) = F(a) \rightarrow L(x)$  de la catégorie  $D$ . Tout triangle commutatif

$$\begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{h} & b \\ & \searrow f & \swarrow g \\ & & x \end{array},$$

où  $h$  est un morphisme de  $C$ , induit un triangle commutatif

$$\begin{array}{ccc} F(a) & \xrightarrow{F(h)} & F(b) \\ & \searrow L(f) & \swarrow L(g) \\ & & L(x) \end{array}.$$

Il est alors naturel d'introduire la catégorie  $C \downarrow x$  dont les objets sont les paires  $(a, f : a \rightarrow x)$  comme ci-dessus et dont les morphismes sont ceux de  $C$  qui forment un triangle commutatif. On pose  $\Pi : C \downarrow x \rightarrow C, (a, f) \mapsto a$  le foncteur de projection. En ces termes, l'image  $L(x)$  est un cocône pour le foncteur  $F \circ \Pi$  sur la catégorie  $C \downarrow x$ .

Dans le cas général, on considère la catégorie suivante pour tout objet  $x$  de  $C'$ .

**Definition A.10** (Catégorie  $\Phi \downarrow x$ ). Les objets de la catégorie  $\Phi \downarrow x$  sont les paires  $(a, f : \Phi(a) \rightarrow x)$ , où  $a$  un objet de  $C$  et  $f$  un morphisme de  $C'$ . Les morphismes de  $(a, f : \Phi(a) \rightarrow x)$  vers  $(b, g : \Phi(b) \rightarrow x)$  sont les morphismes  $h : a \rightarrow b$  de la catégorie  $C$  vérifiant  $f = g \circ \Phi(h)$ .

EXERCISE 11. Écrire la catégorie des éléments d'un préfaisceau  $X$  (Définition A.6) comme une catégorie  $x \downarrow X$  définie de manière similaire mais par des objets de la forme  $(a, f : x \rightarrow X(a))$ .

On considère la composée  $F \circ \Pi : \Phi \downarrow x \rightarrow D$  du foncteur  $F$  avec la projection canonique  $\Pi : \Phi \downarrow x \rightarrow C$ . Les études faites ci-dessus des colimites comme extensions de Kan à gauche le long du foncteur  $C \rightarrow 1$  et des extensions de foncteurs suggèrent que la colimite du foncteur  $F \circ \Pi$ , cocône initial, doit être intimement reliée à l'image de l'extension de Kan de l'objet  $x$ . Le théorème suivant va nous donner raison.

**Theorem A.11.** Soient  $\Phi : C \rightarrow C'$  et  $F : C \rightarrow D$  deux foncteurs tels que, pour tout objet  $x$  de la catégorie  $C'$ , le foncteur  $F \circ \Pi : \Phi \downarrow x \rightarrow D$  admet une colimite dans la catégorie  $D$ . Dans ce cas, l'extension de Kan à gauche du foncteur  $F$  le long du foncteur  $\Phi$  existe et elle est donnée ponctuellement par cette colimite :

$$(\text{Lan}_\Phi F)(x) = \text{colim}_{\Phi \downarrow x} F \circ \Pi.$$

DÉMONSTRATION. Les arguments sont automatiques une fois que l'on a bien compris la construction ci-dessus. Pour plus de précision, nous noterons ici le foncteur de projection par  $\Pi_x : \Phi \downarrow x \rightarrow C$ . Posons

$$L(x) := \text{colim}_{\Phi \downarrow x} F \circ \Pi,$$

pour tout objet  $x$  de la catégorie  $C'$ .

Montrons d'abord que  $L$  définit bien un foncteur  $L : C' \rightarrow D$ . Soit  $k : x \rightarrow y$  un morphisme de la catégorie  $C'$ . Il induit un foncteur  $k_* : \Phi \downarrow x \rightarrow \Phi \downarrow y, (a, f) \mapsto (a, k \circ f)$  qui vérifie  $F \circ \Pi_y = F \circ \Pi_x \circ k_*$ . Ceci montre que  $L(y)$  est un cocône pour le foncteur  $F \circ \Pi_x$  sur la catégorie  $\Phi \downarrow x$ . Comme  $L(x)$  est la colimite de ce foncteur, on définit  $L(k) : L(x) \rightarrow L(y)$  par sa propriété universelle. En utilisant les mêmes arguments, on voit facilement que toute paire de morphismes  $k : x \rightarrow y$  et  $l : y \rightarrow z$  de  $C'$  vérifient  $L(l \circ k) = L(l) \circ L(k)$ .

Définissons maintenant une transformation naturelle  $\alpha : F \Rightarrow L \circ \Phi$ . Soit  $c$  un objet de la catégorie  $\mathcal{C}$ ; on note  $\lambda_f$  les morphismes de structures du cocône  $L(\Phi(c))$  :

$$\begin{array}{ccc}
 F \circ \Pi_{\Phi(c)}(a, f) = F(a) & \xrightarrow{F(h)} & F(b) = F \circ \Pi_{\Phi(c)}(b, g) \\
 & \searrow \lambda_f & \swarrow \lambda_g \\
 & L(\Phi(c)) &
 \end{array}$$

On pose alors

$$\alpha(c) := \lambda_{\text{id}} : F(c) = F \circ \Pi_{\Phi(c)}(a, \text{id} : \Phi(c) \rightarrow \Phi(c)) \rightarrow L(\Phi(c)) .$$

Pour montrer que cela définit bien une transformation naturelle, on considère le diagramme suivant associé à tout morphisme  $i : c \rightarrow d$  de la catégorie  $\mathcal{C}$  :

$$\begin{array}{ccc}
 F(c) & \xrightarrow{F(i)} & F(d) \\
 \alpha(c)=\lambda_{\text{id}} \downarrow & \searrow \mu_{\Phi(i)} & \downarrow \alpha(d)=\mu_{\text{id}} \\
 L(\Phi(c)) & \xrightarrow{L(\Phi(i))} & L(\Phi(d))
 \end{array}$$

qui est commutatif : le triangle supérieur droit est commutatif par la définition de  $L(\Phi(d))$  comme un cocône et le triangle inférieur gauche est commutatif par la définition de  $L(\Phi(i))$ .

Il reste à montrer que la transformation naturelle  $\alpha$  est universelle. Soit  $G : \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{D}$  un foncteur muni d'une transformation naturelle  $\beta : F \Rightarrow G \circ \Phi$ . Soit  $x$  un objet de la catégorie  $\mathcal{C}'$ . Pour tout morphisme  $h$  d'un objet  $(a, f : \Phi(a) \rightarrow x)$  vers un objet  $(b, g : \Phi(b) \rightarrow x)$  de la catégorie  $\Phi \downarrow x$ , c'est-à-dire  $h : a \rightarrow b$  morphisme de  $\mathcal{C}$  vérifiant  $f = g \circ \Phi(h)$ , le digramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 F(a) = F \circ \Pi_x(a, f) & \xrightarrow{F(h)} & F \circ \Pi_x(b, g) = F(b) \\
 \beta(a) \downarrow & & \downarrow \beta(b) \\
 G(\Phi(a)) & \xrightarrow{G(\Phi(h))} & G(\Phi(b)) \\
 & \searrow G(f) & \swarrow G(g) \\
 & G(x) &
 \end{array}$$

Le carré du haut l'est par définition de la transformation naturelle  $\beta$  et le triangle du bas l'est par définition de  $h$  et du foncteur  $G$ . Ceci montre que  $G(x)$  est un cocône pour le foncteur  $F \circ \Pi_x$  sur la catégorie  $\Phi \downarrow x$ ; comme  $L(x)$  est la colimite de ce foncteur, on définit  $\gamma(x) : L(x) \rightarrow G(x)$  par sa propriété universelle.

Montrons maintenant que  $\gamma$  est une transformation naturelle. Soit  $k : x \rightarrow y$  un morphisme de la catégorie  $\mathcal{C}'$ . Pour tout objet  $(a, f : \Phi(a) \rightarrow x)$  de la catégorie  $\Phi \downarrow x$ , on considère le diagramme

suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \mu_{kf} & & \\
 & \swarrow & & \searrow & \\
 F \circ \Pi_y(a, kf) = F(a) = F \circ \Pi_x(a, f) & \xrightarrow{\lambda_f} & L(x) & \xrightarrow{L(k)} & L(y) \\
 \downarrow \beta(a) & & \downarrow \gamma(x) & & \downarrow \gamma(y) \\
 G(\Phi(a)) & \xrightarrow{G(f)} & G(x) & \xrightarrow{G(k)} & G(y) \\
 & \searrow & & \swarrow & \\
 & & G(kf) & & 
 \end{array}$$

où  $\lambda$  et  $\mu$  dénotent respectivement les morphismes de structure des cocônes  $L(x)$  et  $L(y)$ . Le carré de gauche est commutatif par définition de  $\gamma(x)$ , le triangle du haut est commutatif par définition de  $L(k)$ , celui du bas l'est par définition du foncteur  $G$ , enfin le carré extérieur est commutatif par définition de  $L(y)$ . Le carré de droite est donc toujours commutatif une fois précomposé par  $\lambda_f$ , et ce pour tout objet  $(a, f)$  de la catégorie  $\Phi \downarrow x$ . Par définition de  $L(x)$  comme colimite, on obtient que ce carré est en fait commutatif.

Enfin, on montre l'universalité de la transformation naturelle  $\gamma$ . Par définition de  $\alpha$  et de  $\gamma$ , on a  $\beta(a) = \gamma(\Phi(a)) \circ \alpha(a)$ . Il reste à établir l'unicité de la transformation naturelle  $\gamma$ . Soit donc  $\gamma' : L \Rightarrow G$  une transformation naturelle vérifiant  $\beta = (\gamma' \circ \Phi) \circ \alpha$ . Pour les autres éléments  $y$  de  $C'$ , on applique le diagramme ci-dessus à  $x = \Phi(a)$ ,  $f = \text{id}_{\Phi(a)}$  et  $k : \Phi(a) \rightarrow y$  morphisme de  $C'$ . On obtient alors  $\gamma'(y) \circ \mu_k = \gamma(y) \circ \mu_k$ , ce qui implique  $\gamma'(y) = \gamma(y)$  par la propriété de colimite de  $L(y)$ .  $\square$

**Corollary A.12.** *Sous les hypothèses d'existence données au théorème A.11 et dans le cas où le foncteur  $\Phi$  est plein et fidèle, il existe une extension de Kan à gauche du foncteur  $F$  qui en soit une extension :*

$$F = (\text{Lan}_{\Phi} F) \circ \Phi \quad \text{et} \quad \alpha = \text{id} .$$

DÉMONSTRATION. Lorsque le foncteur  $\Phi$  est plein et fidèle, la catégorie  $\Phi \downarrow \Phi(c)$  est isomorphe à la catégorie  $C \downarrow c$  des objets au-dessus de  $c$ . Cette dernière admet pour objet terminal  $(c, \text{id}_c)$  et donc la colimite  $L(\Phi(c))$  est donnée simplement par  $F(c)$ .  $\square$

C'est par exemple le cas lorsque  $C$  est une sous-catégorie pleine de  $C'$ .

Plutôt que d'exiger l'existence point-par-point de certaines colimites, les conditions générales suivantes assurent l'existence d'extensions de Kan.

**Corollary A.13.** *Si la catégorie  $C$  est petite, la catégorie  $C'$  localement petite et la catégorie  $D$  cocomplète, alors tout foncteur  $F : C \rightarrow D$  admet une extension de Kan le long de tout foncteur  $\Phi : C \rightarrow C'$ .*

DÉMONSTRATION. On rappelle à toutes fins utiles qu'une catégorie est petite lorsque ses objets forment un ensemble et que tous ses classes de morphismes forment un ensemble. Une catégorie est cocomplète lorsque tout foncteur depuis une petite catégorie vers cette dernière admet une colimite. Lorsque la catégorie  $C$  est petite et la catégorie  $C'$  localement petite, alors toute catégorie  $\Phi \downarrow x$  est petite, pour  $x$  de  $C'$ . Et comme la catégorie  $D$  est cocomplète, la colimite du foncteur  $F \circ \Pi$  existe. On peut alors appliquer le théorème A.11.  $\square$

Les conditions d'existence de ce corollaire ne sont pas très restrictives ; elles sont toujours vérifiées dans les exemples qui forment le corps de ce texte. Dans ce qui suit, on les suppose vérifiées. Par contre, la colimite donnée au théorème A.11 peut être difficile à calculer. Néanmoins, on peut calculer plus efficacement l'extension de Kan à gauche à l'aide d'un autre type de colimite.

Soient  $a, b$  deux objets de la catégorie  $C$  et soit  $x$  un objet de la catégorie  $C'$ . On considère l'ensemble  $\text{Hom}_C(\Phi(b), x)$  puis le coproduit de l'objet constant  $F(a)$  indicé par ce dernier ; on le note



REMARQUE. Lorsque la catégorie  $D$  est la catégorie  $\text{Ens}$  des ensembles, les extensions de Kan correspondent à l'image directe et réciproque des préfaisceaux.

## RÉFÉRENCES

- [BV73] J. M. Boardman and R. M. Vogt, *Homotopy invariant algebraic structures on topological spaces*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 347, Springer-Verlag, Berlin, 1973. 44
- [GM03] Sergei I. Gelfand and Yuri I. Manin, *Methods of homological algebra*, second ed., Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2003. 33
- [Joy02] A. Joyal, *Quasi-categories and Kan complexes*, J. Pure Appl. Algebra **175** (2002), no. 1-3, 207–222, Special volume celebrating the 70th birthday of Professor Max Kelly. 44
- [Kel80] G. M. Kelly, *A unified treatment of transfinite constructions for free algebras, free monoids, colimits, associated sheaves, and so on*, Bull. Austral. Math. Soc. **22** (1980). 37
- [Lur09] Jacob Lurie, *Higher topos theory*, Annals of Mathematics Studies, vol. 170, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2009. 44
- [LV12] Jean-Louis Loday and Bruno Vallette, *Algebraic operads*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 346, Springer-Verlag, Berlin, 2012.
- [ML95] Saunders Mac Lane, *Homology*, Classics in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1995, Reprint of the 1975 edition. 40
- [ML98] ———, *Categories for the working mathematician*, second ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 5, Springer-Verlag, New York, 1998. 47, 54

LABORATOIRE ANALYSE, GÉOMÉTRIE ET APPLICATIONS, UNIVERSITÉ PARIS 13, SORBONNE PARIS CITÉ, CNRS, UMR 7539, 93430 VILLETANEUSE, FRANCE.

*E-mail address:* vallette@math.univ-paris13.fr