L’ALPHABET DES MATHÉMATIQUES

Les lettres A, B, C, D, E, … forment l’alphabet du français : c’est avec elles que l’on peut écrire de manière unique tous les mots. Mais quel est *l’alphabet des mathématiques* ?

Sophie Germain (1776–1831)

Énigme 1.  Compléter les suites de nombres suivantes :

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ \boxed{\quad\quad}$$

$$3,\ 6,\ 9,\ 12,\ 15,\ 18,\ \boxed{\quad\quad}$$

$$1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ \boxed{\quad\quad}$$

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ \boxed{\quad\quad}$$

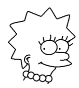
$$2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ \boxed{\quad\quad}$$

→ *On commence par essayer de comprendre quelle propriété caractérise ces derniers nombres : il s’agit de nombres dont les seuls diviseurs sont 1 et eux-mêmes. On pourrait leur donner plein de noms : nombres «indivisibles», nombres «insécables», nombres «purs», mais les mathématicien·nes ont choisi de les appeler les nombres premiers. Ils sont mentionnés dès le papyrus Rhind datant de 1550 av. J.-C. ! Celui qui se trouve juste après 13 est 17.*

→ Y a-t-il des règles ou des formules pour calculer ces suites de nombres ? *Oui pour les premières : on obtient un terme en ajoutant 1 au précédent, en lui ajoutant 3, en le multipliant par 2, en ajoutant les deux termes d'avant. En terme de formule, cela donnerait : si on note par* n *un nombre, le* n^e *nombre de chaque suite est respectivement égal à* n, $3 \times n$, 2^{n-1},

$$\frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right).$$

Mais il n'existe pas de règle ni de formule pour les nombres premiers !

Énigme 2.  Trouver tous les nombres premiers entre 1 et 100.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

→ *L'idée est de partir de 2 et de supprimer de la grille tous ses multiples. On procède ensuite de la même manière avec 3, 5, etc. pour finir le travail.*

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

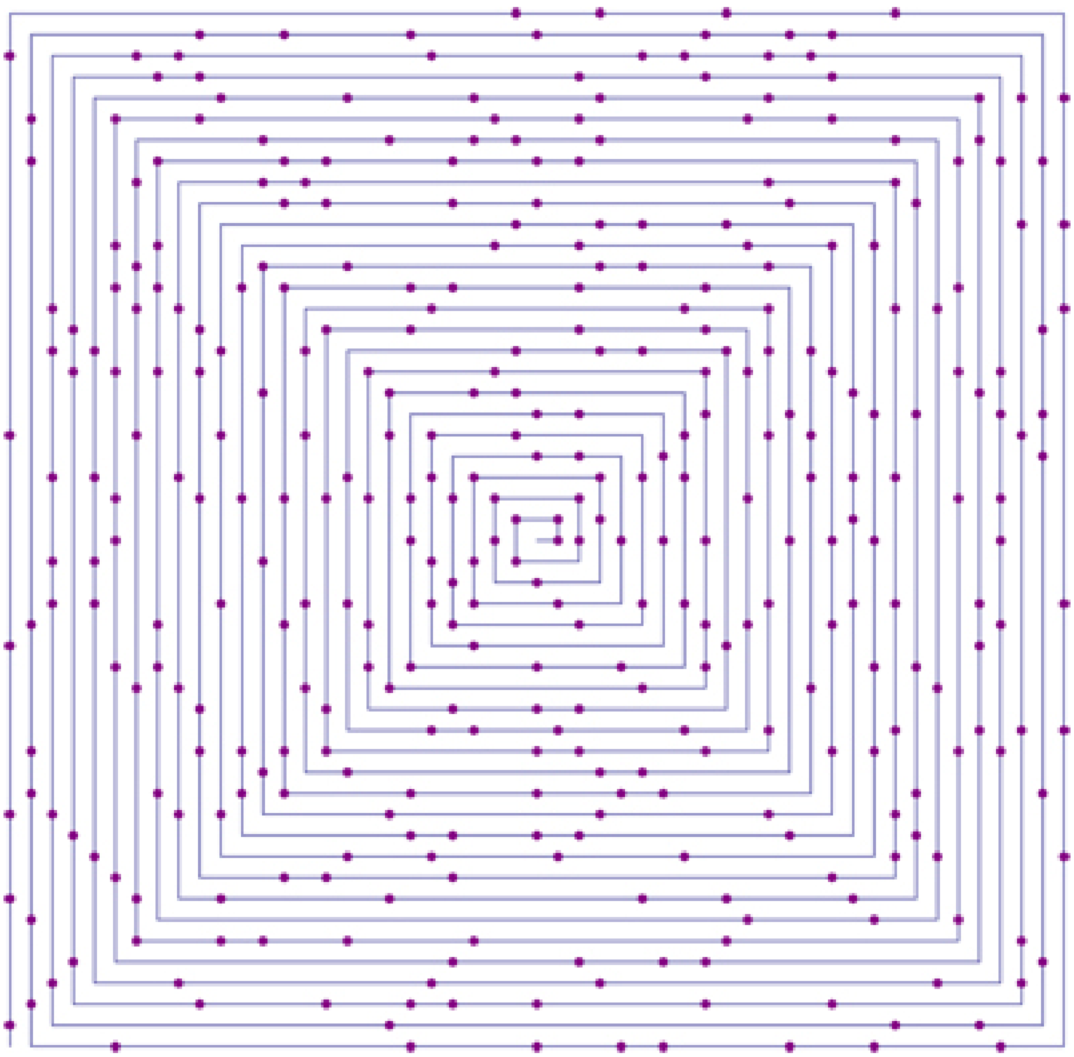
→ *On n'y voit pas grand chose ! Essayons d'organiser un peu mieux ces nombres.*

Énigme 3.  Entourer les nombres premiers dans la spirale des nombres suivante :

$$\begin{tikzcd}
73 \arrow[r] & 74 \arrow[r] & 75 \arrow[r] & 76 \arrow[r] & 77 \arrow[r] & 78 \arrow[r] & 79 \arrow[r] & 80 \arrow[r] & 81 \\
72 \arrow[u] & 43 \arrow[r] & 44 \arrow[r] & 45 \arrow[r] & 46 \arrow[r] & 47 \arrow[r] & 48 \arrow[r] & 49 \arrow[r] & 50 \arrow[d] \\
71 \arrow[u] & 42 \arrow[u] & 21 \arrow[r] & 22 \arrow[r] & 23 \arrow[r] & 24 \arrow[r] & 25 \arrow[r] & 26 \arrow[d] & 51 \arrow[d] \\
70 \arrow[u] & 41 \arrow[u] & 20 \arrow[u] & 7 \arrow[r] & 8 \arrow[r] & 9 \arrow[r] & 10 \arrow[d] & 27 \arrow[d] & 52 \arrow[d] \\
69 \arrow[u] & 40 \arrow[u] & 19 \arrow[u] & 6 \arrow[u] & 1 \arrow[r] & 2 \arrow[d] & 11 \arrow[d] & 28 \arrow[d] & 53 \arrow[d] \\
68 \arrow[u] & 39 \arrow[u] & 18 \arrow[u] & 5 \arrow[u] & 4 \arrow[l] & 3 \arrow[l] & 12 \arrow[d] & 29 \arrow[d] & 54 \arrow[d] \\
67 \arrow[u] & 38 \arrow[u] & 17 \arrow[u] & 16 \arrow[l] & 15 \arrow[l] & 14 \arrow[l] & 13 \arrow[l] & 30 \arrow[d] & 55 \arrow[d] \\
66 \arrow[u] & 37 \arrow[u] & 36 \arrow[l] & 35 \arrow[l] & 34 \arrow[l] & 33 \arrow[l] & 32 \arrow[l] & 31 \arrow[l] & 56 \arrow[d] \\
65 \arrow[u] & 64 \arrow[l] & 63 \arrow[l] & 62 \arrow[l] & 61 \arrow[l] & 60 \arrow[l] & 59 \arrow[l] & 58 \arrow[l] & 57 \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

73	74	75	76	77	78	79	80	81
72	43	44	45	46	47	48	49	50
71	42	21	22	23	24	25	26	51
70	41	20	7	8	9	10	27	52
69	40	19	6	1	2	11	28	53
68	39	18	5	4	3	12	29	54
67	38	17	16	15	14	13	30	55
66	37	36	35	34	33	32	31	56
65	64	63	62	61	60	59	58	57

→ Que remarque-t-on ? *On a l'impression que certains nombres premiers se répartissent sur des diagonales. Cette remarque est très bonne : par exemple, sur la diagonale qui part tout en haut à gauche et arrive tout en bas à droite, on trouve les nombres premiers 3, 7, 13, 31, 43, 73 et les nombres 21, 57, 91, 111 qui ne sont pas premiers. Les nombres sur cette diagonale sont les valeurs de la formule* n^2+n+1. *Si on considère le poylnôme* n^2-n+41 *du à Leonard Euler , alors ses 40 premières valeurs sont des nombres premiers (41, 43, 47, 53, 61, 71, 83, 97, ...). On a donc "presque" une formule !*



Spirale d'Ulam

Énigme 4.  Combien y a-t-il de nombres premiers ?

→ *Il y en a une infinité !*

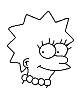
D'accord mais pourquoi ?

→ *Au niveau des élèves, ils·elles peuvent remarquer que* $2+1$ *est premier,* $2\times3+1=7$ *est premier,* $2\times3\times5+1=31$ *est premier,* $2\times3\times5\times7+1=31$ *est premier,* $2\times3\times5\times7\times11+1=211$ *est premier. Ils·elles peuvent donc penser que cette construction peut permettre de montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers. (L'idée est bonne mais pas totalement vraie car* $2\times3\times5\times7\times11\times13+1=30031=59\times509$*.) La démonstration rigoureuse, basée sur cette idée, avait été donnée il y a 2300 ans par Euclide. On raisonne par l'absurde en supposant que c'est faux.*

Le plus grand nombre premier connu, depuis octobre 2024, est

$$\boxed{2^{136\,279\,841}-1=3886924435\ldots9486871551}$$

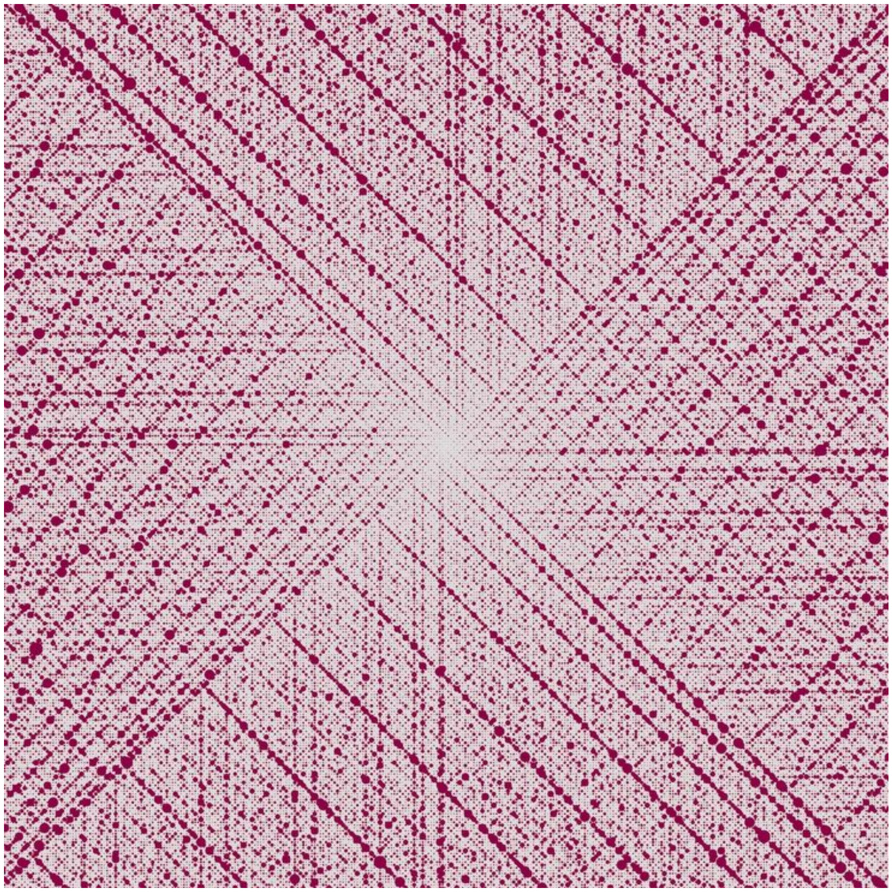
qui comporte 41 024 320 chiffres une fois écrit en base 10.

Énigme 5.  Amusez-vous à additionner des paires de nombres premiers. Quels sont les nombres que vous trouvez ainsi ? Faites une conjecture !

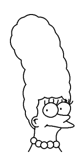
→ *En additionnant les paires de nombres premiers, on a l'impression que l'on peut trouver ainsi tous les nombres pairs plus grand que 4 (inclus). C'est la fameuse conjecture faite par Goldbach en 1742 dans une célèbre lettre à Euler. Et ... aujourd'hui en 2025 ... on ne sait toujours pas la démontrer. Si vous voulez décrocher la médaille Fields (le prix Nobel des mathématiques), voilà le problème qu'il faut attaquer !*

Énigme 6.  Les noms premiers forment-ils l'alphabet des nombres, c'est-à-dire peut-on écrire de manière unique tout nombre comme produits de nombres premiers ?

→ *Encore une fois, les élèves peuvent d'amuser à le remarquer sur les premiers nombres :* $4=2\times2$, $6=2\times3$, $8=2\times2\times2$, $9=3\times3$, *etc. La démonstration générale se fait «par récurrence» : l'idée est de dire qu'on connait le résultat jusqu'à un certain nombre et de considérer le suivant. Si ce dernier est premier, c'est fini, sinon il est divisible par un nombre premier et le quotient est un nombre strictement plus petit que l'on peut écrire comme un produit de nombres premiers.*



→ *Cette figure est dessinée à partir de la spirale des nombres entiers en mettant un petit point si un nombre a peu de diviseurs premiers et un gros point s'il en a beaucoup. Joli non ?*

Énigme 7.  Étudiez l'écart entre les nombres premiers successifs. Que remarquez-vous ? Pour vous aider à tester vos conjectures, on vous donne la liste des nombres premiers plus petits que 1000 :

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199, 211, 223, 227, 229, 233, 239, 241, 251, 257, 263, 269, 271, 277, 281, 283, 293, 307, 311, 313, 317, 331, 337, 347, 349, 353, 359, 367, 373, 379, 383, 389, 397, 401, 409, 419, 421, 431, 433, 439, 443, 449, 457, 461, 463, 467, 479, 487, 491, 499, 503, 509, 521, 523, 541, 547, 557, 563, 569, 571, 577, 587, 593, 599, 601, 607, 613, 617, 619, 631, 641, 643, 647, 653, 659, 661, 673, 677, 683, 691, 701, 709, 719, 727, 733, 739, 743, 751, 757, 761, 769, 773, 787, 797, 809, 811, 821, 823, 827, 829, 839, 853, 857, 859, 863, 877, 881, 883, 887, 907, 911, 919, 929, 937, 941, 947, 953, 967, 971, 977, 983, 991, 997.

→ *On peut remarquer deux phénomènes différents : il semble exister des écarts aussi grands que possible entre nombres premiers successifs et il semble exister une infinité de paires de nombres premiers dont le second est égal au premier plus* 2*. La première conjecture est un théorème que l'on peut démontrer avec le même type d'idée qu'à l'énigme 4 (infinité de nombres premiers). La seconde conjecture est toujours ouverte ; elle s'appelle la conjecture des nombres premiers jumeaux.*

Conclusion.  Les nombres premiers sont partout : il s'agit de la notion la plus fondamentale et universelle qui existe. On les trouve là où on ne s'y attend pas comme en cryptographie ou en biologie : les *Magicicada septendecim* sont des *cigales périodiques* dont le cycle de vie est de 17 ans.

D'autres ont un cycle de vie de 5 ou 13 ans. Comme il s'agit à chaque fois de nombres premiers, cela leur permet d'être moins fréquement en contact avec leurs prédateurs.

`Qui était Sophie Germain ? www.youtube.com/watch?v=3-SBwlUfX_8`

Sophie Germain était une grande mathématicienne qui adorait la théorie des nombres. Les *nombres premiers de Sophie Germain* sont les nombres premiers p tels que $2 \times p + 1$ soit aussi premiers. Les premiers nombres de ce type sont 2, 3, 5, 11, 23, 29, 41, 53, 83, 89. Il est conjecturé qu'il existe une infinité de nombres premiers de Sophie Germain. À vous d'en trouver d'autres !