RÉSUMÉ DES TRAVAUX DE RECHERCHE

Mes travaux portent globalement sur la théorie algébrique de la dualité de Koszul (des algèbres associatives, des opérades et des PROPs). Ils sont recensés dans ma thèse, *Dualité de Koszul des PROPs* et dans un article indépendant, *Homology of generalized partition posets*.

Thèse : Dualité de Koszul des PROPs

La dualité de Koszul est une théorie algébrique qui a d'abord été développée par S. Priddy dans les années 70 au niveau des algèbres associatives. Une théorie similaire a été écrite par V.Ginzburg et M.M.Kapranov pour les opérades algébriques en 1994. Une opérade est un objet qui modèlise les opérations d'un type d'algèbres donné et les compositions de celles-ci. La dualité de Koszul des opérades a de nombreuses applications: construction d'un "petit" complexe pour le calcul des groupes d'homologie d'une algèbre, notion d'algèbre à homotopie près, modèle minimal d'une opérade. Les opérades ne tiennent compte que des opérations à n entrées et une seule sortie. Or, dans le cas des bigèbres (*cf.* Drinfled), on a des opérations et aussi des coopérations (à plusieurs sorties) . On doit alors enrichir la notion d'opérade, c'est-à-dire travailler avec des PROPs.

Il est naturel d'essayer d'étendre la dualité de Koszul des opérades aux PROPs. Plusieurs essais existaient déjà dans cette direction par M. Kontsevich, B. Shoiket, W-L Gan, M. Markl et A. A. Voronov. Comme le produit monoïdal $\circ$ des opérades est linéaire à gauche alors que son équivalent $\boxtimes$ au niveau des PROPs ne l'est pas, les démonstrations opéradiques ne sont pas reconductibles au cas des PROPs. Pour pouvoir démontrer cette théorie, j'ai intorduis une nouvelle graduation, venant des foncteurs analytiques induits par le produit $\boxtimes$, et généralisé les constructions des bords des graphes-complexes de M. Kontsevich. (Remarquons que mes démonstrations incluent le cas des algèbres associatives et celui des opérades). Mes travaux donnent le modèle minimal pour les PROPs de Koszul. Ils permettent de définir des théories homologiques naturelles pour des "bigèbres" et les notions de "bigèbres" à homotopie près.

En outre, dans le premier chapitre de ma thèse, je démontre un théorème qui fournit la construction du monoïde libre dans une catégorie monoïdale abélienne. Cette construction est bien connue dans le cas où le produit est bilinéaire, elle est donnée par les mots. Le cas général est plus compliqué et a été très peu étudié. Grâce à cette construction, j'obtiens notamment les notions d'opérade et de PROP libres.

A une algèbre quadratique ou à une opérade quadratique, on peut associer une série de Poincaré. De telles séries sont très utiles (cf. J.-L. Loday). Dans le dernier chapitre, je généralise ces séries au cas des PROPs. Je montre une équation fonctionnelle vérifiée par les séries de Poincaré associées à des PROPs de Koszul. En appliquant ce résultat à une opérade libre particulière, je redémontre, sans calcul, une formule vérifée par la série génératrice des polytopes de Stasheff.

Prépublication : Homology of generalized partition posets

A toute opérade ensembliste, j'associe un poset (ensemble partiellement ordonné) du type partition. Le principal résultat de cet article affirme qu'une opérade ensembliste est de Koszul si et seulement si son poset est de Cohen-Macaulay, c'est-à-dire que son homologie est concentrée en dimension maximale. Dans un sens, cela permet de calculer l'homlogie de posets qui sont des variations du poset des partitions. Cette homologie est donnée par la duale de Koszul de l'opérade considérée. Dans l'autre sens, les méthodes combinatoires pour montrer qu'un poset est Cohen-Macaulay permettent de montrer que certaines opérades sont de Koszul.