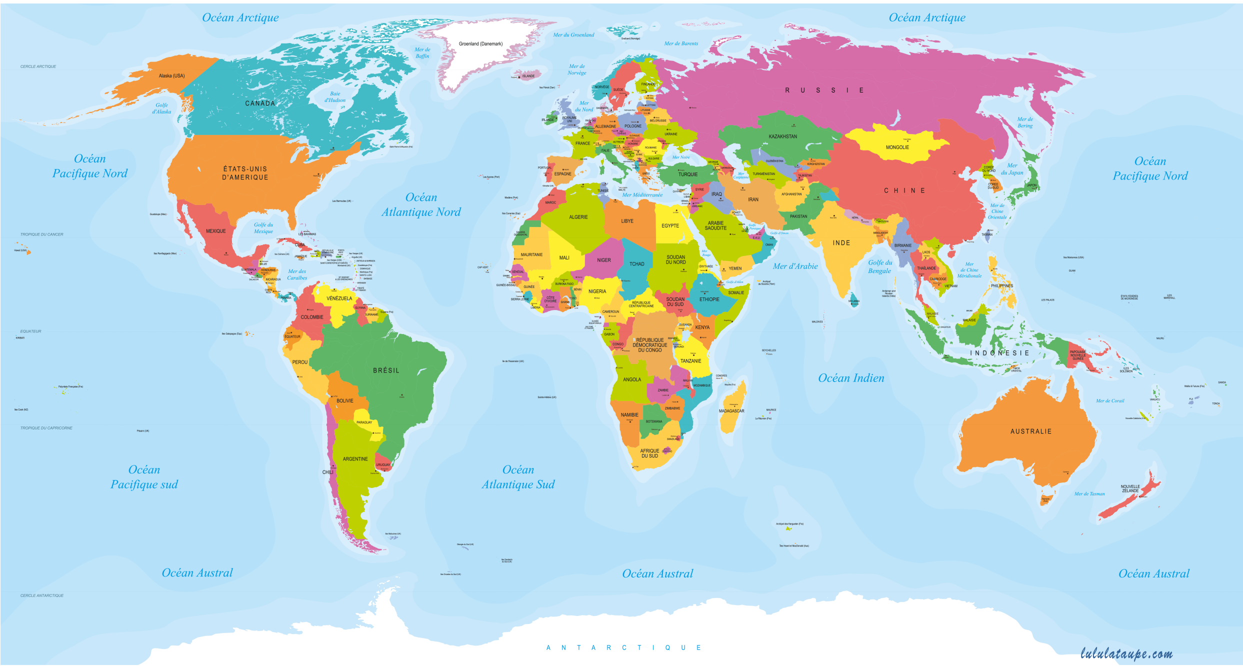
## LE COLORIAGE ET LES GRAPHES

Aujourd'hui, on va s'intéresser aux coloriages et leurs mathématiques !

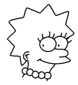


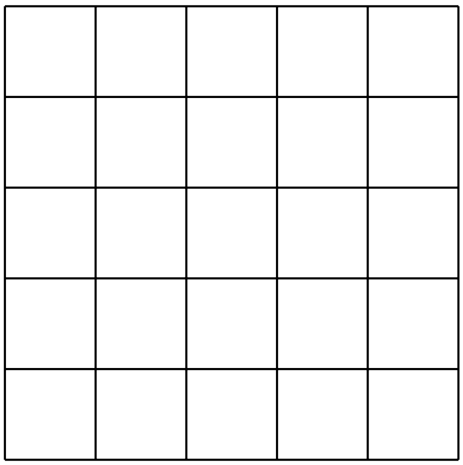

Carte du monde

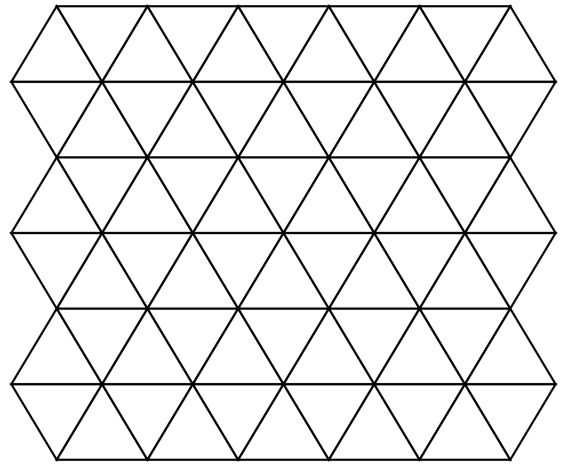
**Énigme 1**.  Colorier les segments de cette droite avec des couleurs de telle sorte que deux segments qui se touchent aient des couleurs différentes.

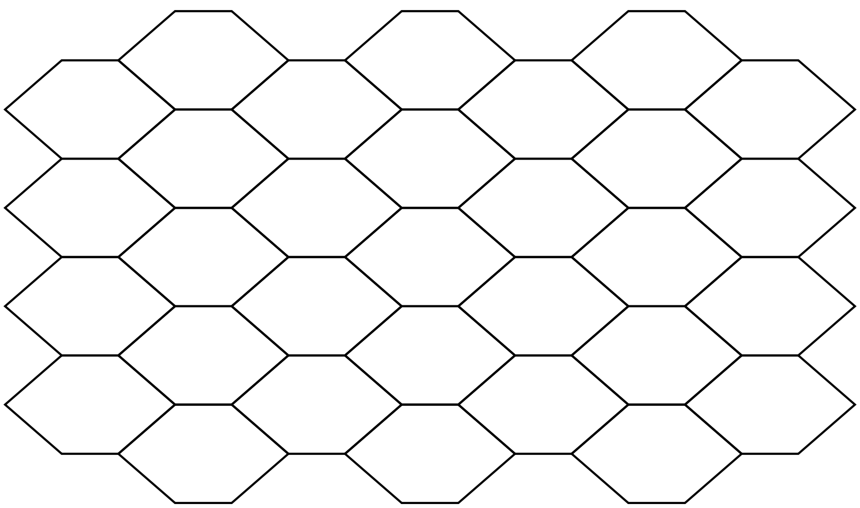
Combien de couleurs peut-on utiliser au minimum ?

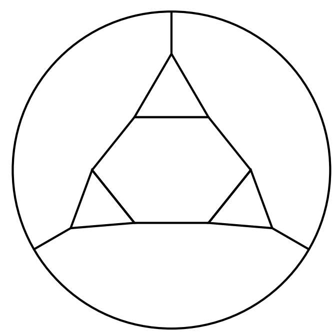
$\rightarrow$ *Il suffit de deux couleurs pour colorier les segments d'une droite.*

**Énigme 2.**  Quel est le nombre minimal de couleurs que l'on peut utiliser pour colorier les zones suivantes du plan de telle sorte que deux zones qui se touchent autrement que par un point aient des couleurs différentes ?









→ ***Il suffit de deux couleurs pour les deux premières, de trois couleurs pour la troisième et de quatre couleurs pour la dernière.***

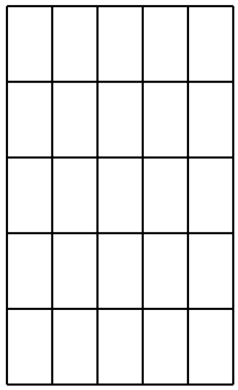
**Énigme 3**.  Quel est le nombre minimal de couleurs que l'on peut utiliser pour colorier la carte de l'Europe de telle sorte que deux pays qui ont une frontière commune aient des couleurs différentes ?

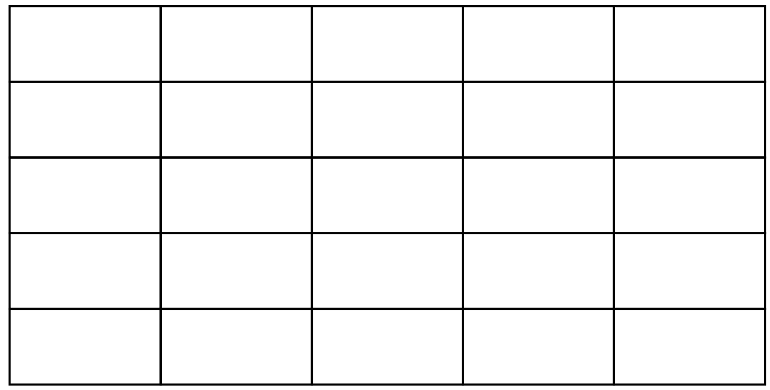
→ *Quatre couleurs suffisent pour colorier la carte de l'Europe.*

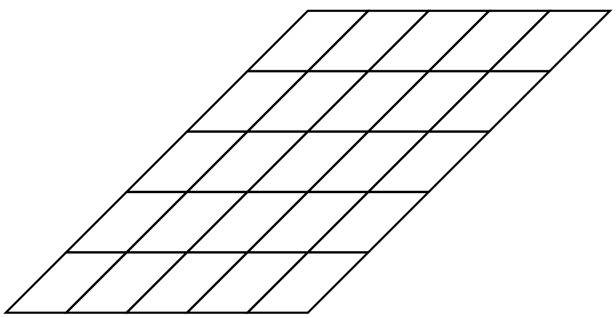
Combien de couleurs différentes est-il suffisant d'avoir pour pouvoir colorier toutes les cartes possible ?

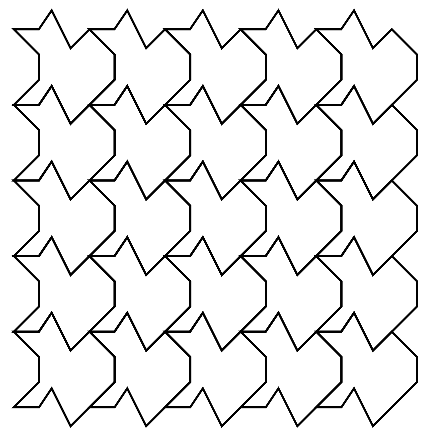
→ *Des exemples que nous venons de voir, on peut conjecturer qu'il suffit de quatre couleurs différentes pour colorier toutes les cartes possibles. Il s'agit en fait d'un théorème mathématique dont l'histoire célèbre est racontée à la fin de ce texte. Mais avant cela, on va voir quel outil les mathématiciennes et les mathématiciens ont introduit et utilisé pour le démontrer.*

**Énigme 4.**  Combien de couleurs sont suffisantes pour colorier les pavages suivants ?





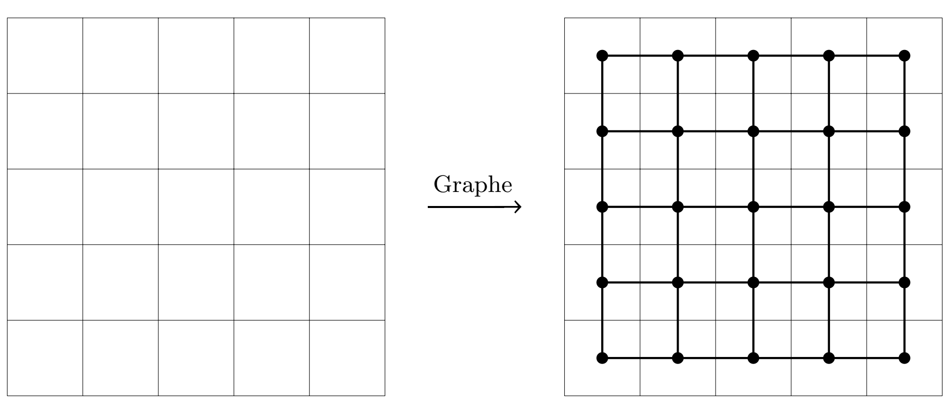


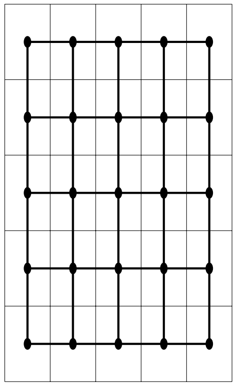


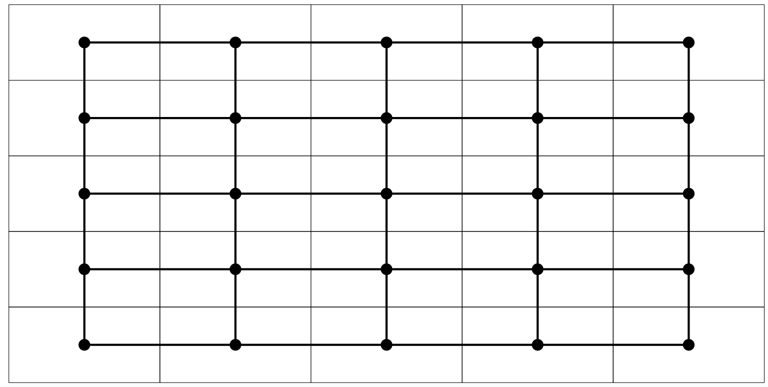
Que pensez-vous de ces différentes figures ?

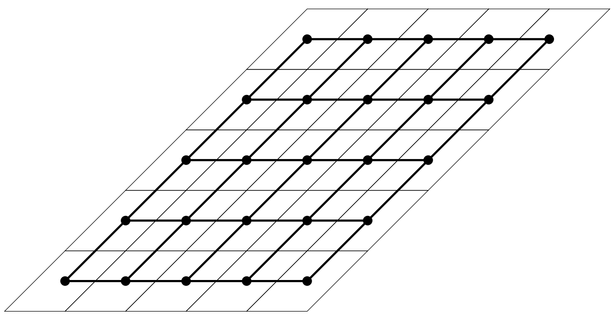
→ *Ces quatre figures sont «les mêmes», elles sont toutes obtenues en déformant le quadrillage régulier. Le problème du nombre de couleurs à utiliser pour les colorier est donc «le même» à chaque fois : 2 couleurs sont suffisantes pour les colorier.*

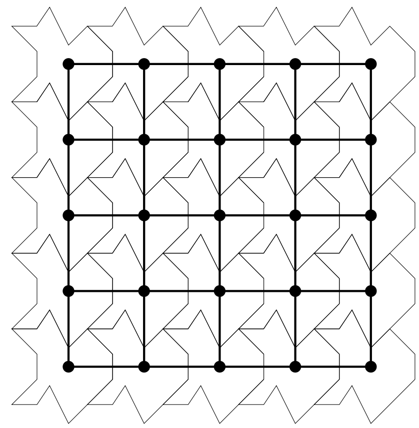
Pour les étudier, on va leur associer un nouveau objet mathématique (*graphe*) de la manière suivante : on représente chaque pays par sa capitale (*point*) et on relie les capitales de pays qui ont une frontière commune par une ligne de chemin de fer (*arête*).





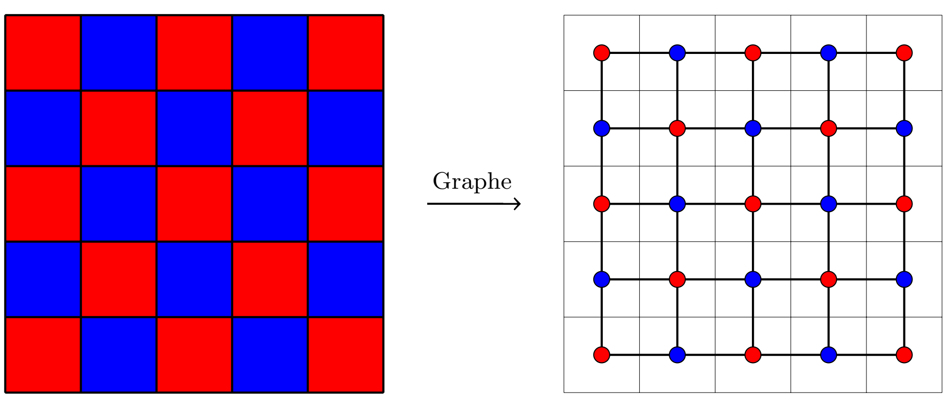




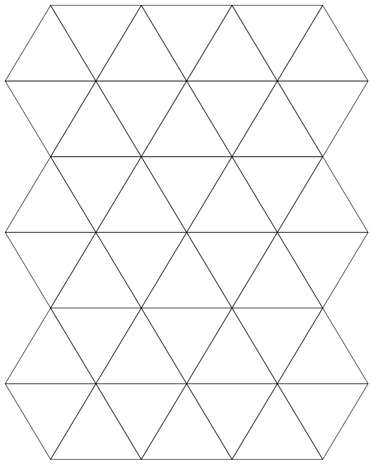


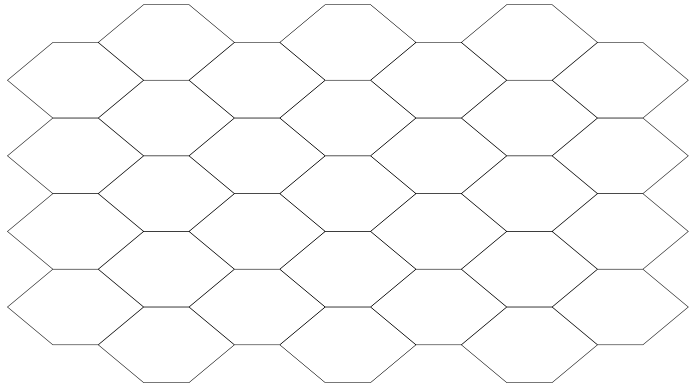
Le problème du coloriage des figures (pavages, cartes) revient à faire quoi sur leur graphe associé ?

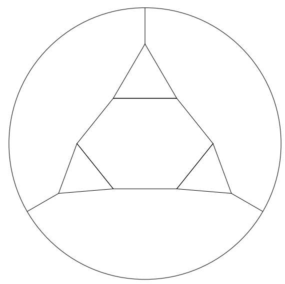
→ *Le problème du coloriage des figures revient à colorier les sommets du graphe de telle sorte que deux sommets reliés par une arête n'aient pas la même couleur.*

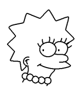


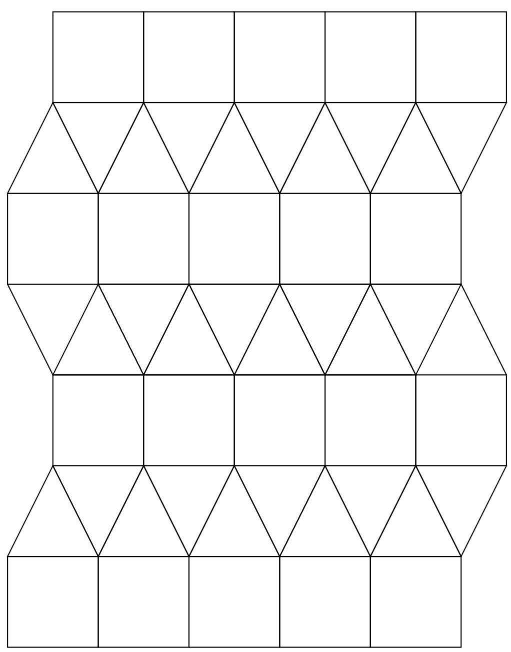
**Énigme 5**.  Dessiner et colorier le graphe des figures vues au début.

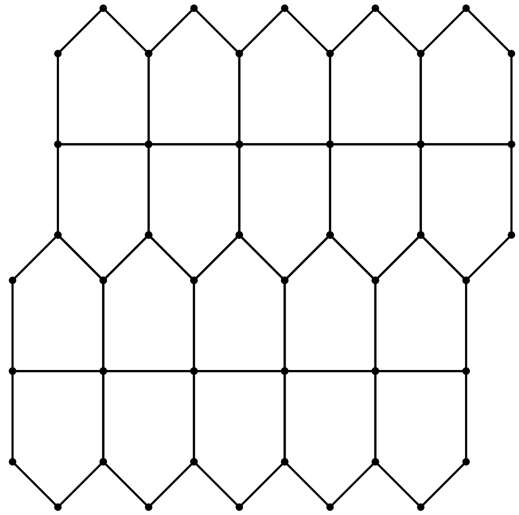






**Énigme 6**.  Dessiner le graphe de ce pavage.

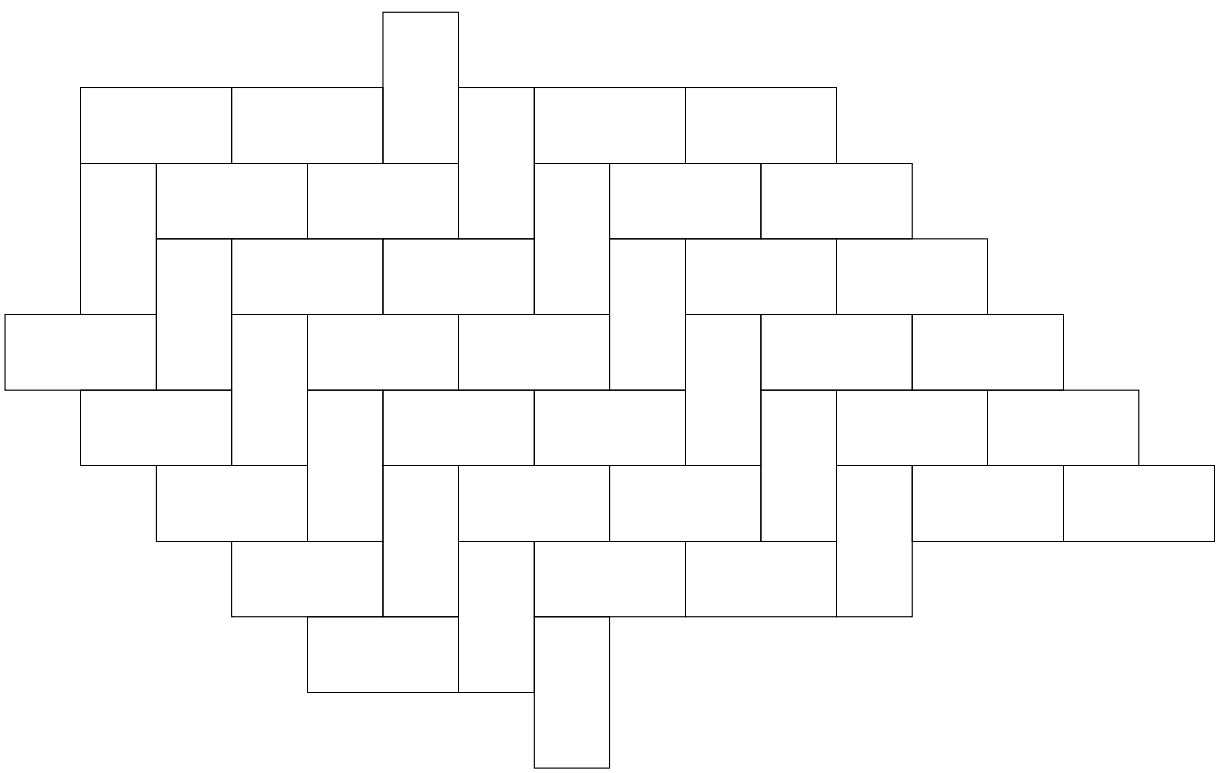




Dessiner le graphe de ce graphe : Que remarquez-vous ?

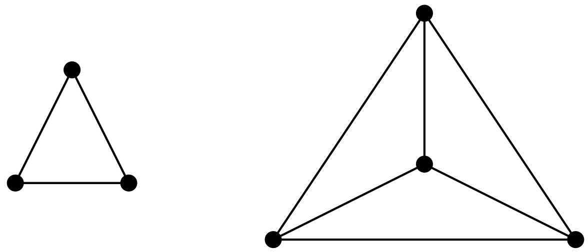
→ *On remarque que l'on est retombé sur la même figure qu'au départ. C'est d'ailleurs le cas aussi pour le quadrillage carré du plan et pour les deux pavages triangulaires et hexagonaux réguliers ! On peut surement conjecturer que ce phénomène est toujours vrai : le graphe du graphe d'un pavage redonne le pavage initial.*

**Énigme 7**.  Combien de couleurs sont suffisantes pour colorier le pavage suivant ?



→ *Trois couleurs sont suffisantes. Pour voir cela, pas besoin d'essayer de colorier, le graphe de ce pavage est le même que celui du pavage hexagonal, il faut donc le même nombre de couleurs.*

**Énigme 8**.  Pouvez-vous dessiner un graphe à 3 sommets qui sont tous reliés deux-à-deux par une arrête et sans que les arêtes se croisent ? Faire la même question avec 4 sommets puis 5 sommets.



→ *Le dernier cas est impossible. Si on réfléchit un peu, si on était capable de dessiner dans le plan le graphe complet à 5 sommets, alors cela voudrait dire qu'on pourrait dessiner un carte avec 5 pays qui ont des frontières communes deux-à-deux et ... cela contredirait le théorème des quatre couleurs.*

**Pour se divertir**.  En 1852 Francis Guthrie, professeur de mathématiques dans un collège en Afrique du Sud s'intéresse au problème du coloriage de la carte des régions d'Angleterre. Comme il remarque que quatre couleurs suffisent, il demande à son frère Frédéric de voir si le professeur de mathématiques à l'université de ce dernier Augustus de Morgan connait un tel théorème. Ce n'est pas le cas ! En 1879, Alfred Kempe publie un article contenant une démonstration de ce théorème. Mais Percy Heawood découvre en 1890 que celle-ci est fausse ! Les idées n'étaient pas bêtes mais elles ne permettent «que» de montrer que cinq couleurs suffisent. Les mathématiciennes et mathématiciens se cassent alors les dents sur ce problème pendant un siècle. Elles et ils ont néanmoins réussi à ramener ce problème général à 1478 cartes particulières à colorier, ça fait beaucoup ... Grâce au développement de l'informatique, Kenneth Appel et Wolfgang Haken, arrivent à vérifier tous ces cas en les programmant sur un ordinateur en 1976 : il fallait alors 1 200 heures de calcul. Mais peut-on considérer qu'il s'agit d'une «démonstration» ? Et si l'ordinateur s'était trompé ? En 2005, Georges Gonthier et Benjamin Werner (École Polytechnique), formalise conceptuellement la démonstration, toujours sur ordinateur, ce qui contribue à la valider définitivement. En 2026, on ne connait toujours pas de démonstration sans ordinateur : à vous de jouer !

Aujourd'hui, les graphes sont partout dans la nature : génétique, sciences sociales, réseaux de communication, linguistique, traitement de l'image, etc.

Voyage au pays des maths : la théorie des graphes

https://www.arte.tv/fr/videos/107398-005-A/voyages-au-pays-des-maths/