Dossier de candidature au poste de maître de conférences

SECTION 25
octobre 2004

Bruno VALLETTE

ADRESSE PROFESSIONNELLE : Laboratoire J.A. Dieudonné
Université de Nice Sophia-Antipolis
Parc Valrose
06108 Nice Cedex 02
France

TÉLÉPHONE : (+33) 4.92.07.62.95
TÉLÉCOPIE : (+33) 4.93.51.79.74

ADRESSE ÉLECTRONIQUE : `brunov@math.unice.fr`
PAGE PERSONNELLE : `http ://math.unice.fr/~brunov/`

Sommaire :

Domaines de recherche : Algèbre, topologie algèbrique, algèbre homologique, algèbres de Hopf, physique mathématique.

1. CURRICULUM VITAE

État civil

né le 6 janvier 1976 à Gérardmer (Vosges), pacsé
NATIONALITÉ : Française

Situation Professionnelle

◦ Attaché Temporaire d'Enseignement et de Recherche (septembre 2004 - août 2005)
Université de Nice Sophia-Antipolis (Laboratoire J.A. Dieudonné)
◦ Allocataire de recherche et moniteur (septembre 2001 - août 2004)
Université Louis Pasteur Strasbourg (IRMA)

Cursus universitaire

◦ 9 décembre 2003 : Thèse de doctorat, *Dualité de Koszul des PROPs*,
soutenue devant Benjamin Enriquez (Rapporteur interne)
Benoit Fresse (Rapporteur externe)
Jean-Louis Loday (Directeur de thèse)
Martin Markl (Examinateur)
Birgit Richter (Examinatrice)
Alexander A. Voronov (Rapporteur externe)
◦ septembre 2001 - août 2004 : Doctorat de Mathématiques (sous la direction de Jean-Louis Loday)
◦ 2000-2001 : DEA de Mathématiques (ULP Strasbourg)
COURS VALIDÉS : Opérades et algèbre homotopique (J.-L. Loday)
Géométrie symplectique : lagrangiennes (M. Audin)
Géométrie sympletrique : actions de groupes (T. Wurzbacher)
Faisceaux et variétés (O. Debarre)
Approximation par des nombres algèbriques (Y. Bugeaud)
MÉMOIRE : *La dualité de Koszul des $\mathcal{P}$-algèbres quadratiques*
(sous la direction de J.-L. Loday)

◦ 1999-2000 : Agrégation de Mathématiques (reçu 8^e)

◦ juin 1999 : Admis au concours d'entrée en troisième année à l'ENS Cachan

◦ 1998-1999 : Maîtrise de Mathématiques (Magistère de l'ENS Lyon)
COURS DE DEA : *Algèbres de Lie* (P. Caldero)
STAGE : *Graphes cristallins* [d'après Kashiwara et Nakashima]
(sous la direction de P. Caldero, Insitut Desargues Lyon)

◦ 1997-1998 : Licence de Mathématiques (Magistère de l'ENS Lyon)
STAGE : *Histoire de l'Arithmétique vue à travers le Grand Théorème de Fermat*
(sous la direction de Y. Bugeaud et M. Mignotte, IRMA Strasbourg)

Publications

(1) *Koszul duality for PROPs*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris **338** (2004), no. 12, 909-914.

Prépublications

(2) *Dualité de Koszul des PROPs*, Thèse de doctorat (décembre 2003).
`http ://math.unice.fr/~brunov/publications/these.ps`
(3) *Homology of generalized partition posets* (avril 2004), `math.AT/0405312`, soumis.
(4) *Pointed and multi-pointed partitions of type A and B* (octobre 2004),
en collaboration avec Frédéric Chapoton, prépublication, `math.QA/0410051`, soumis.
(5) *Koszul duality for props and homotopy $\mathcal{P}$-gebras*, (extrait de la thèse), prépublication, soumis.
(6) *Free monoids in monoidal abelian categories*, (extrait de la thèse) prépublication, soumis.

3. COMMUNICATIONS ORALES

Conférences : • *Koszul duality for props,* (Louvain-La-Neuve, juin 2004),
Congrès du Groupement de Recherche Européen de Topologie Algébrique
`http ://gauss.math.ucl.ac.be/∼topalg/conf04/`

Séminaires :
- Séminaire d'Algèbre et Topologie (Université de Nice Sophia-Antipolis)
  Conjecture de Chas-Sullivan et dualité de Koszul des props (octobre 2004)
- Séminaire d'Algèbre (Université de Freiburg)
  Koszul duality for props (juillet 2004)
- Séminaire d'Algèbre (Université de Saint-Etienne)
  Homologie des posets et dualité de Koszul des opérades (mars 2004)
- Séminaire d'Algèbre et Topologie (IRMA Strasbourg)
  Homologie des posets de partitions et dualité de Koszul (mars 2004)
- Séminaire de Physique Mathématique (Institut Desargues, Lyon I)
  Dualité de Koszul des PROPs (mars 2004)
- Séminaire d'Algèbre (Institut Desargues, Lyon I)
  Homologie des posets de partition (mars 2004)
- Séminaire de Topologie Algébrique (Université Paris 13)
  Dualité de Koszul des PROPs et $\mathcal{P}$-gèbres à homotopie près (février 2004)
- Séminaire de Mathématiques Pures (Université de Clermont-Ferrand)
  Dualité de Koszul des PROPs et applications (février 2004)
- Séminaire de Topologie (Université de Lille)
  Dualité de Koszul des PROPs (octobre 2003)
- Séminaire d'Algèbre et Topologie (IRMA Strasbourg)
  Dualité de Koszul des PROPs (septembre 2003)

Groupes de travail :
- *Différentes structures algébriques en Topologie des Cordes* (octobre 2004)
- *Opérades cycliques et graphe-complexes* (mars 2004)
- *Champs de vecteurs symplectiques et graphe-complexe,*
  théorème de Kontsevich (janvier 2004)
- *Le théorème de Loday-Quillen-Tsygan* (janvier 2004)
- *Diagonale sur le permutoèdre et l'associaèdre*
  [d'après Saneblidze et Umble] (février 2003)
- *Algèbres de Lie semi-simples* (octobre 2002)
- *Bicatégories et 2-catégories* (février 2002)
- *Opérade de Barratt-Eccles* (octobre 2001)
- *Homologie simpliciale et homologie singulière*
  (décembre 2001, dans le cadre du cours de DEA de H.-W. Henn)

Séminaire des doctorants :
- *À homotopie près* (janvier 2004)
- *Des dessins d'arbres aux opérades* (avril 2003)
- *Représentations des algèbres de Lie* (janvier 2002)

4. SÉJOURS, COLLOQUES, ÉCOLES D'ÉTÉ ET GROUPES DE TRAVAIL

Séjour à l'étranger : • Séjour à l'Institut Mittag-Leffler de Stockholm
du 5 au 17 avril 2004,
Programme *Géométrie non-commutative*,
`http ://www.ml.kva.se/program0304.html`

Colloques : • 71^e Rencontre entre physiciens théoriciens et mathématiciens à Strasbourg
Graphs and cohomology in mathematical physics (septembre 2002)
• Journées Etat de la Recherche à Nantes
Foncteurs polynômiaux, modules instables et cohomologie des schémas en groupes finis (décembre 2001)

École d'été : • *Interactions between Homotopy theory and Algebra*,
University of Chicago (26 juin - 6 août 2004)
• Rencontres mathématiques de Glanon (Juillet 2003)

Groupes de travail : • *Topologie des Cordes* (depuis octobre 2004)
• *Graphe homologie* (2003-2004)
• *Algèbres vertex et algèbres chirales* (2003)
• *Opérades, polytopes, groupes de Coxeter, tresses, algèbres de Hopf* (octobre 2002 - mars 2003)
• *Catégories supérieures* (janvier 2002 - juin 2002)
• *Opérades, PROPs et* Γ*-homologie* (octobre 2001 - décembre 2001)

Cours de DEA : • *Les groupes des tresses* par C. Kassel (2002-2003)
• *Cobordisme et groupes formels* par H.-W. Henn (2001-2002)

Cours : • *Lectures on fusion categories* par P. Etingof (Juin 2003)
`http ://www-irma.u-strasbg.fr/irma/publications/2004/04005.shtml`

5. ACTIVITÉ ADMINISTRATIVE ET ORGANISATION

Responsabilités scientifiques

- Arbitre

Responsabilités administratives

- Membre élu au conseil scientifique de l'IRMA Strasbourg (2003-2004)

Organisation

- Coorganisateur avec Jean-Louis Loday des groupes de travail
  - *Graphe Homologie* (2003-2004)
    `http ://www-irma.u-strasbg.fr/~vallette/GdTgraph.html`
  - *Algèbres vertex et algèbres chirales* (2003)
    `http ://www-irma.u-strasbg.fr/~vallette/GdT.html`

• **Titulaire de l'agrégation de mathématiques**
(reçu à la 8ème place, session 2000)

• **Monitorat à l'UFR mathématique et informatique (ULP Strasbourg) de septembre 2001 à août 2004**

◦ Préparation à l'agrégation externe de Mathématiques (de septembre 2001 à juin 2004)
- Corrections de sujets écrits suivies de cours d'approfondissment. Cela représente un total de 12 sujets sur trois ans portant sur l'ensemble du programme de l'agrégation (algèbre, géométrie et analyse)
- Préparation de feuilles d'exercices et séances de Travaux Dirigés avec les étudiants
- Interrogations orales (Oraux blancs)
`http ://irmasrv1.u-strasbg.fr/agregation/`

◦ Cours intégrés en DEUG (première année)
Cours et séances de Travaux Dirigés en DEUG Sciences de la Vie et de la Terre (Premier semestre 2003/2004). L'intitulé du cours était *Rappels de Mathématiques*.
Il portait sur l'étude des fonctions, la dérivation, l'intégration et les nombres complexes.

• **Colles en classes préparatoires aux grandes écoles**
(classe de MP* au Lycée du Parc, Lyon)

Mes travaux, effectués durant ces trois années de thèse, portent globalement sur la théorie algébrique de la dualité de Koszul (des algèbres associatives, des opérades et des props) et admettent des applications en topologie algèbrique, algèbre quantique et en physique mathématique. Ils sont recensés dans ma thèse, *Dualité de Koszul des PROPs*, qui a donné lieu à deux articles et dans deux articles indépendants, *Homology of generalized partition posets* et *Pointed and multi-pointed partitions of type A and B.*

Thèse : **Dualité de Koszul des PROPs**

Le but de ma thèse est d'établir une théorie de dualité de Koszul pour les props.

Introduction. La dualité de Koszul des algèbres associatives est une théorie qui a été développée par S. Priddy dans les années 1970. Elle associe à toute algèbre quadratique A une *cogèbre duale* $A^{¡}$ et un complexe de chaînes appelé *complexe de Koszul.* Lorsque ce dernier est acyclique, on dit que l'algèbre A est *de Koszul.* Une telle algèbre, ainsi que ses représentations, ont de nombreuses propriétés (*cf.* les travaux de Beilinson, Ginzburg et Soergel, entre autres [BGS]).

Dans les années 1990, une théorie similaire a été développée par V. Ginzburg et M.M. Kapranov pour les *opérades algèbriques* (*cf.* [GK]). Une opérade est un objet algébrique qui modélise les opérations à n variables sur un certain type d'algèbres : $A^{\otimes n} \to A$. Par exemple, il existe des opérades $\mathcal{A}s$, $\mathcal{C}om$ et $\mathcal{L}ie$ qui codent les algèbres associatives, commutatives et les algèbres de Lie. Comme ces opérations portent sur plusieurs entrées mais n'ont qu'une seule sortie, on peut représenter leurs compositions par des arbres (*cf.* figure 1).

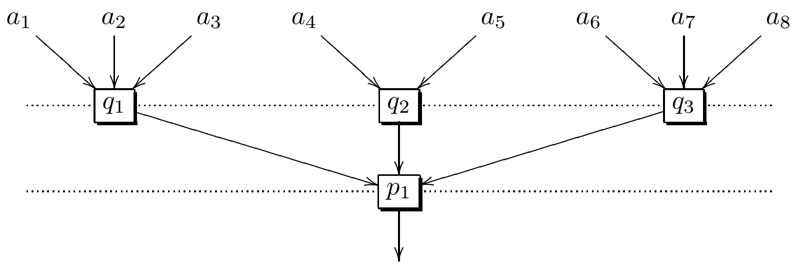

Fig. 1. Exemple de composition d'opérations multilinéaires.

La dualité de Koszul des opérades a de nombreuses applications : construction d'un "petit" complexe pour le calcul des groupes d'homologie d'une algèbre, *modèle minimal* d'une opérade, notion d'*algèbre à homotopie près.*

Les opérades ne tiennent compte que des opérations à plusieurs entrées et une seule sortie. Or, dans le cas des bigèbres et des bigèbres de Lie (*cf.* V. Drinfeld [D]), on a des opérations et aussi des coopérations (à plusieurs sorties). Leurs compositions se représentent alors avec des graphes dirigés (*cf.* Figure 2).
On doit alors enrichir la notion d'opérade, c'est-à-dire travailler avec des *props.*
Il est naturel d'essayer d'étendre la dualité de Koszul des opérades aux props. Plusieurs travaux existent déjà dans cette direction par M. Kontsevich, W. L. Gan , M. Markl et A. A. Voronov. Comme le produit monoïdal $\circ$ des opérades est linéaire à gauche alors que son équivalent $\boxtimes$ au niveau des props ne l'est pas, les définitions et les démonstrations opéradiques ne sont pas reconductibles au cas des props.

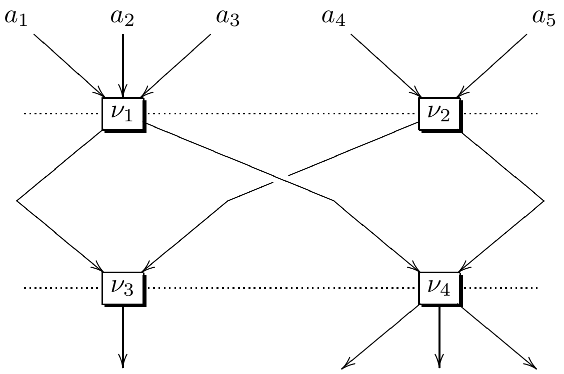

FIG. 2. Exemple de composition d'opérations à plusieurs entrées et plusieurs sorties.

Théorème principal. Un enjeu principal en homologie algébrique est de pouvoir trouver des résolutions (les plus simples possibles) des objets sur lesquels on travaille. La théorie de dualité de Koszul des props apporte une solution à ce problème pour une large classe de props. A tout prop *gradué* $\mathcal{P}$, je construis un *coprop dual* $\mathcal{P}^i$ et je considère la cobar construction sur $\mathcal{P}^{\text{i}}$. Le principal théorème de la dualité de Koszul fournit un critère (acyclicité d'un "petit" complexe $\mathcal{P}^{\text{i}} \boxtimes \mathcal{P}$, appelé *complexe de Koszul*) qui détermine si la cobar construction sur le dual $\mathcal{P}^{\text{i}}$ est une résolution quasi-libre du prop de départ $\mathcal{P}$.

THÉORÈME (Critère de Koszul des props).
Soit $\mathcal{P}$ un prop différentiel gradué. Les propositions suivantes sont équivalentes :

(1) *Le complexe de Koszul $\mathcal{P}^i \boxtimes \mathcal{P}$ est acyclique.*

(2) *Le morphisme de pros différentiels gradués $\mathcal{B}^c(\mathcal{P}^i) \to \mathcal{P}$ est un quasi-isomorphisme.*

Lorsque c'est le cas, on dit que $\mathcal{P}$ est un *prop de Koszul* et la résolution (2) fournit le *modèle minimal* de $\mathcal{P}$.

Lemme : Monoïde libre. Dans le premier chapitre de cette thèse, je démontre un théorème qui fournit la construction du *monoïde libre* dans une catégorie monoïdale abélienne. Cette construction est bien connue dans le cas où le produit est bilinéaire, elle est donnée par les mots. Le cas général est plus compliqué et a été très peu étudié. Grâce à cette construction, j'obtiens notamment les notions d'*opérade* et de *prop libres*.

Définitions. Pour arriver à démontrer ce théorème, je commence par généraliser les différentes définitions relatives aux algèbres associatives et aux opérades dans le cadre des props (module, idéal).

La dualité de Koszul des opérades a vu le jour en 1994 grâce à l'invention par M. Kontsevich de la notion d'homolgie des graphes (*cf.* [K]). Les bords des différents complexes opéradiques considérés par V. Ginzburg et M.M. Kapranov dans [GK] sont définis sur des arbres par des *contractions d'arêtes* (*edge contraction*) et des *décompositions de sommets* (*vertex expansion*), deux notions introduites par M. Kontsevich dans [K].
Afin de pouvoir définir les différents complexes (*bar et cobar constructions*, *complexe de Koszul*) au niveau des props, j'ai dû généraliser les définitions des graphes-complexes de M. Kontsevich. Les constructions des différents bords sur les graphes en jeu viennent de définitions naturelles. Par exemple, le bord qui définit la bar construction est donné par l'unique codérivation qui prolonge le produit partiel (Chapitre 3 et 4).

Démonstration. Pour ce qui est de la démonstration proprement dite, je prouve que la bar construction augmentée est acyclique et que que la construction bar-cobar fournit une résolution du prop de départ.

Théorème (Acyclicité de la bar construction augmentée).
Le complexe $\mathcal{B}(\mathcal{P}) \boxtimes \mathcal{P}$ est acyclique.

Théorème (Résolution bar-cobar).
Pour tout prop différentiel gradué $\mathcal{P}$, le morphisme $\mathcal{B}^c(\mathcal{B}(\mathcal{P})) \longrightarrow \mathcal{P}$ est un quasi-isomorphisme de props différentiels gradués.

Je démontre le même type de lemmes de comparaison que B. Fresse (*cf.* [F]) pour le produit $\boxtimes$. Puis, j'utilise ces lemmes pour "simplifier" la résolution bar-cobar notamment.
Notons que les démonstrations opéradiques ne sont pas reconductibles ici. Pour démontrer ce type de résultat dans le cadre des props, j'introduis une graduation supplémentaire et j'utilise des foncteurs analytiques issus du produit $\boxtimes$ pour décomposer les différents complexes. (Chapitre 5 et 6).

Exemples. En pratique, pour monter qu'un prop est de Koszul, il reste à montrer que son complexe de Koszul est acyclique. J'introduis une large classe de props, définis comme un "mélange" de deux props $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ plus simples, pour lesquels je démontre qu'ils sont de Koszul si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ le sont. Ce résultat permet de prouver que le prop $\mathcal{B}i\mathcal{L}ie$ des bigèbres de Lie (*cf.* V. Drinfeld [D]) et que le prop $\varepsilon\mathcal{B}i$ des bigèbres de Hopf infinitésimales (*cf.* M. Aguiar [A]) sont de Koszul.

Théorème. *Le prop $\mathcal{B}i\mathcal{L}ie$ des bigèbres de Lie et le prop $\varepsilon\mathcal{B}i$ des bigèbres de Hopf infinitésimales sont de Koszul.*

Applications. Suivant l'avis de J.-P. Serre dans [S], j'appelle *gèbre* sur un prop $\mathcal{P}$ la généralisation de la notion d'algèbre sur une opérade. Par exemple, une gèbre sur le prop $\mathcal{B}i\mathcal{L}ie$ est exactement une bigèbre de Lie.

- Soit $\mathcal{P}$ un prop de Koszul. Son dual $\mathcal{P}^{¡}$ permet de définir la bonne théorie homologique (pour la déformation) des gèbres sur $\mathcal{P}$. Dans le cas des bigèbres de Lie, on trouve une théorie proche de celle de P. B. A. Lecomte et C. Roger [LR].
- Une gèbre sur la cobar construction de $\mathcal{P}^{¡}$ définit la notion de *$\mathcal{P}$-gèbre à homotopie près.* Comme corollaire du théorème précédent, nous avons la notion de *bigèbre de Lie à homotopie près.*
- En interprétant la (co)bar construction de certains props de Koszul en termes de graphe-complexes, on peut calculer leur (co)homologie au sens de M. Kontsevitch . Dans les cas $\mathcal{B}i\mathcal{L}ie$ et $\varepsilon\mathcal{B}i$, on retrouve les mêmes résultats que [MV] sur la cohomologie des graphes classiques ainsi que des graphes *ribbons.* (Ces résultats ont été trouvés simultanément par l'auteur).
- Dans une dernière partie, je généralise les définitions des *séries de Poincaré* des algèbres associatives et des opérades aux props. J'établis une équation fonctionnelle qui relie la série de Poincaré d'un prop de Koszul à celle de son dual.

Ces résultats ont été annoncés dans une note aux C.R.A.S. : *Koszul duality for PROPs* et ont donné lieu à deux articles *Koszul duality for props and homotopy $\mathcal{P}$-gebras* et *Free monoids in monoidal abelian categories.*

Prépublication : **Homology of generalized partition posets**

Le but de cet article est de décrire une équivalence entre la théorie des opérades et celle des ensembles partiellement ordonnés (*posets*).

Introduction. On considère l'ensemble des partitions de $\{1, \ldots, n\}$. Cet ensemble peut être muni d'une relation d'ordre partiel. Une partition λ est plus petite qu'une partition μ ,($\lambda \leq \mu$), si μ est un raffinement de λ. Par exemple, on a $\{\{1, 3\}, \{2, 4\}\} \leq \{\{1\}, \{3\}, \{2, 4\}\}$. Cet ensemble partiellement ordonné, important en topologie algébrique, est appelé le *poset des partitions* et noté Π_n. Son homologie est définie comme l'homologie simpliciale des chaînes $\lambda_0 \leq \cdots \leq \lambda_r$ de partitions. Comme le groupe symétrique $\mathbb{S}_n$ agit naturellement sur ce poset, son homologie est un module sur $\mathbb{S}_n$. Il a fallu plusieurs années pour la calculer. Elle est concentrée en dimension maximale et elle est donnée par la représentation du groupe symétrique $\mathbb{S}_n$ définie par la dual linéaire de la partie de degré n de l'algèbre de Lie libre sur n générateurs tordue par la représentation signature : $\mathcal{L}ie(n)^* \otimes sgn_{\mathbb{S}_n}$. En 2003, B. Fresse a montré dans [F] que ce résultat était une conséquence directe de la dualité de Koszul des opérades. Le poset des partions est construit à partir de l'opérade $\mathcal{C}om$ des algèbres commutatives et son homologie est donnée par sa duale : $\mathcal{L}ie$.

Construction. A toute opérade ensembliste $\mathcal{P}$, j'associe une famille de posets $(\Pi_{\mathcal{P}}(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ du type partition.

Théorème principal. On dit qu'un poset Π est de *Cohen-Macaulay* si l'homologie de tout intervalle de Π est concentrée en dimension maximale. Le principal résultat de cet article affirme que l'opérade $\mathcal{P}$ est de Koszul si et seulement si tout poset de la famille $(\Pi_{\mathcal{P}}(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est de Cohen-Macaulay.

Théorème. *Soit $\mathcal{P}$ une opérade ensembliste.*
L'opérade $\mathcal{P}$ est de Koszul sur $\mathbb{Z}$ si et seulement si tout poset de la famille $(\Pi_{\mathcal{P}}(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est de Cohen-Macaulay. Dans ce cas, on a

$$H_*(\Pi_{\mathcal{P}}(n)) \cong \begin{cases} \mathcal{P}^{¡}(n) & si * = n-1 \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

Applications.

($\Rightarrow$) Dans un sens, ce théorème permet de calculer explicitement l'homlogie de posets du type partition. Si $\Pi(n)$ est un poset associé à une opérade $\mathcal{P}$ de Koszul alors on sait que l'homologie de $\Pi(n)$ est concentrée en dimension maximale. De plus, le dernier groupe d'homologie (non nul) est isomorphe, en tant que représentation du groupe symétrique $\mathbb{S}_n$, à la duale de Koszul $\mathcal{P}^{¡}(n)$.

($\Leftarrow$) Dans l'autre sens, ce résultat est un outil efficace pour montrer qu'une opérade est de Koszul (sur $\mathbb{Z}$ ou sur tout corps k). Pour montrer qu'une opérade $\mathcal{P}$ est de Koszul, il suffit de voir si les posets $\Pi_{\mathcal{P}}(n)$ sont de Cohen-Macaulay. Pour cela, on peut utiliser les différents critères combinatoires mis au jour par A. Björner et M. Wachs dans [BW] notament.

Prépublication : **Pointed and multi-pointed partitions of type A and B**

Dans cet article, rédigé en collaboration avec Frédéric Chapoton, nous introduisons et étudions les posets des partitions pointees et multi-pointees en type A et B (dans la classification des groupes de Coxeter finis).

Introduction. Pour tout groupe de Weyl W, il existe une famille de posets du type partition définis par les arrangements d'hyperplans du type W. Dans le cas A_{n-1} on retrouve les posets des partitions de $\{1, \ldots, n\}$. Une famille de posets de partitions pointées et une famille de posets de partitions multi-pointées apparaissent naturellement de la théorie des opérades grâce à la correspondance donnée dans l'article précédent. Une des motivations de cet article est qu'il doit exister une famille de posets de partitions pointées et multi-pointées pour tout groupe de Weyl.

Définition. En plus des posets de partitions pointées et multi-pointées du type A, nous proposons une définition pour le poset des partitions pointées du type B. Ces posets possèdent de bonnes propriétés pour l'action du groupe de Weyl du type B.

Polynômes caractéristiques et algèbre d'incidence. On calcule les polynômes caractéristiques de ces différents posets. Remarquons que ces polynômes caractéristiques sont les mêmes que ceux de certains posets associés à des arrangements d'hyperplans, ce qui laisse penser qu'il existe un lien avec cette théorie. Comme toutes les familles de posets étudiées ici partagent une bonne propriété pour le produit (on dit qu'elles sont *héréditaires*), on peut leur associer une algèbre de Hopf d'incidence, que nous décrivons.

Homologie. Nous montrons que tous les posets étudiés ici sont totalement semi-modulaires. Ce critère combinatoire implique que ces posets sont de Cohen-Macaulay sur $\mathbb{Z}$. En utilisant le principal théorème de l'article précédent , on obtient que les opérades $\mathcal{P}erm$ et $\mathcal{C}omtrias$ sont de Koszul sur $\mathbb{Z}$ et on explicite l'homologie des posets de partitions pointées et multi-pointées grâce aux duales de Koszul de ces opérades.

Références de l'auteur

[1] *Koszul duality for PROPs*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris **338** (2004), no. 12, 909-914.
[2] *Dualité de Koszul des PROPs*, Thèse de doctorat (décembre 2003), prépublication IRMA, `http ://www-irma.u-strasbg.fr/irma/publications/2003/03030.shtml`
[3] *Koszul duality for props and $\mathcal{P}$-gebras up to homotopy*, prépublication,
[4] *Free monoids in monoidal abelian categories*, prépublication,
[5] *Homology of generalized partition posets*, prépublication, `http ://www.arxiv.org/abs/math.AT/0405312`
[6] *Pointed and multi-pointed partitions of type A and B*, prépublication, `http ://www.arxiv.org/abs/math.QA/0410051`

Références

[A] M. Aguiar, *Infinitesimal Hopf algebras*, Contemporary Mathematics **267** (2000) 1-30.
[BGS] A. Beilinson, V. Ginzburg, W. Soergel, *Koszul duality patterns in representation theory*, J. Amer. Math. Soc. **9** (1996), no. 2, 473-527.
[BW] A. Björner, M. Wachs, *On lexicographically shellable posets*, Trans. Amer. Math. Soc. **277** (1983), no. 1, 323-341.
[D] V. Drinfeld, *Hamiltonian structures on Lie groups, Lie bialgebras and the geometric meaning of classical Yang-Baxter equations*, Soviet Math. Dokl. **27** (1983), no. 1, 68-71.
[F] B. Fresse, *Koszul duality of operads and homology of partition posets*, preprint `arXiv :math.AT/0301365` (2003).
[K] M. Kontsevich, *Formal (non)commutative symplectic geometry*, The Gelfand Mathematical Seminars, 1990-1992, 173-187, Birkhuser Boston, Boston, MA, 1993.
[LR] P. B. A. Lecomte, C. Roger, *Module et cohomologie des bigèbres de Lie*, C. R. Acad. Sci. Paris Série I **310** (1990), 405-410.
[GK] V. Ginzburg, M.M. Kapranov, *Koszul duality for operads*, Duke Math. J. **76** (1995), 203-272.
[MV] M. Markl, A. A. Voronov, *PROPped up graph cohomology*, preprint `arXiv :math.QA/0307081` (2003).
[S] J.-P. Serre, *Gèbres*, Enseign. Math. (2) **39** (1993), no. 1-2, 33-85.

Mon projet de recherche s'inscrit dans quatre grandes directions.

(1) Etude des applications possibles de la dualité de Koszul des props démontrée dans ma thèse. J'espère trouver de nouveaux types de "bigèbres" (gèbres) et utiliser la dualité de Koszul des props en topologie algébrique et en algèbre quantique (structures à homotopie près, déformation).

(2) Homologie des graphes de Kontsevich.

(3) Généralisation des constructions des algèbres de Hopf de Connes-Kreimer et étude de leurs propriétés et des liens avec les diagrammes de Feynman.

(4) Résolutions de problèmes liés aux polytopes convexes et à la théorie des représentations.

1. Dualité de Koszul des props en topologie algébrique et algèbre quantique

Introduction. Un problème important en topologie algébrique réside dans le calcul de groupes d'homologie et d'homotopie. Pour cela, on essaie souvent de montrer que ces groupes possèdent des structures algébriques supplémentaires. Par exemple, on peut définir un produit sur les groupes de cohomologie singulière ou simpliciale, appelé *cup produit*, qui confère à ces groupes une structure d'algèbre associative. De la même manière, les groupes de cohomologie de Hochschild $HH^*(A, A)$ d'une algèbre associative A sont munis d'une structure d'algèbre de Gerstenhaber.

Les premières structures algébriques à avoir été étudiées sont celles des algèbres (algèbres associatives, algèbres commutatives, algèbres de Lie). Ces algèbres sont composées de produits, c'est-à-dire d'opérations à plusieurs entrées et une seule sortie. On sait, depuis les années 70, que les opérations agissant sur un certain type d'algèbre peuvent être modélisées par un autre objet algébrique : les *opérades*. On appelle algèbre sur une opérade $\mathcal{P}$: une $\mathcal{P}$*-algèbre*. Il existe des opérades $\mathcal{A}s$, $\mathcal{C}om$, $\mathcal{L}ie$ telles que la notion de $\mathcal{A}s$-algèbre corresponde à celle d'algèbre associative, celle de $\mathcal{C}om$-algèbre corresponde à celle d'algèbre commutative, etc ... Cette prise de hauteur au niveau des structures algébriques s'est révélée très fructueuse ces dernières années.

La découverte des groupes quantiques (*cf.* [D]) a mis au jour et popularisé des structures algébriques mélangeant produits et coproduits (c'est-à-dire des opérations avec plusieurs sorties). C'est le cas des bigèbres et des bigèbres de Lie , par exemple. Le cadre des opérades ne permet pas de traiter de tels objets. Pour modéliser les opérations à plusieurs entrées et sorties agissant sur un certain type de "bigèbres", on utilise un autre objet algébrique : les *props* (*cf.* [V]). Suivant l'avis de J.-P. Serre [S], j'appelle une "algèbre" sur un prop $\mathcal{P}$: une $\mathcal{P}$*-gèbre*.

Nouveaux types de gèbres. Les opérades ont connu un regain d'intérêt grâce à la théorie de la dualité de Koszul développée dessus, il y a 10 ans par V. Ginzburg et M.M. Kapranov [GK]. J'ai généralisé cette théorie de dualité de Koszul aux PROPs dans ma thèse [V]. Je propose maintenant de chercher à obtenir le même type de résultats que ceux obtenus grâce aux opérades.

La dualité de Koszul des opérades s'est révélée être une méthode très efficace pour trouver de nouveaux types d'algèbres (*cf.* [L]). Dans le même esprit, je veux mettre à profit la théorie de dualité de Koszul des props pour découvrir des nouveaux types de gèbres. (Déjà dans ma thèse, le prop dual de celui des bigèbres de Lie donnait un nouveau type de gèbre).

Conjecture de Chas-Sullivan. Un des principaux enjeux en topologie algébrique est de "remonter" une structure algébrique, présente au niveau des groupes d'homologie, sur le complexe de chaînes. Pour pouvoir faire cela, on a besoin de relâcher les relations algébriques vérifiées en homologie. Ainsi, apparait la notion de $\mathcal{P}$-algèbre *à homotopie près*. Le premier exemple vient des espaces de lacets. La composition des lacets fournit un produit associatif à homotopie près mais qui devient strictement associatif en homologie. Le problème est de savoir comment définir la notion équivalente "à homotopie près". Une réponse est donnée par la dualité de Koszul des opérades. Pour une opérade de Koszul $\mathcal{P}$, une $\mathcal{P}$-algèbre à homotopie près , notée $\mathcal{P}_\infty$*-algèbre* est une algèbre sur le *modèle minimal* de $\mathcal{P}$ (à savoir la cobar construction sur la coopérade duale $\mathcal{P}^{\text{i}}$). Un autre exemple célèbre vient de la conjecture de Deligne qui affirme que le complexe de cochaînes de Hochschild $C^*(A, A)$ est muni d'une structure d'algèbre de Gerstenhaber à homotopie près (*cf.* C. Berger, B. Fresse [BF]).

En généralisant la démarche opéradique, j'ai défini dans ma thèse la notion de $\mathcal{P}$*-gèbre à homotopie près*. Mon but est maintenant de démontrer que des structures de $\mathcal{P}$-gèbres au niveau homologique se relèvent en des structures de $\mathcal{P}$-gèbre à homotopie prés sur les complexes de chaînes. Dans le cadre de la topologie des cordes une structure de *bigèbre de Lie à involution* (c'est-à-dire un type particulier de bigèbre de Lie) a été trouvée par M. Chas et D. Sullivan [CS] sur les groupes d'homologie équivariante réduite de l'espace des lacets libres d'une variété de dimension quelconque. Comme le prop des bigèbres de Lie à involution est un prop de Koszul (*cf.* [V]), je donne comme corollaire dans ma thèse la définition des bigèbres de Lie à involution à homotopie près. On peut énoncer précisément leur conjecture :

Conjecture ([CS]). *L'espace de lacets libres d'une variété de dimension quelconque admet une structure de bigèbre de Lie combinatoire à homotopie près.*

Une première piste pour démontrer ce type de conjectures et de montrer la formalité de certains props, comme pour les opérades des petits disques, dans le cadre de la conjecture de Deligne (*cf.* M. Kontsevich [K1]). (On dit qu'un objet est *formel* lorsqu'il est quasi-isomorphe à sa cohomologie).

Homologie des $\mathcal{P}$-gèbres. La prise de hauteur apportée par la dualité de Koszul des opérades a permis de comprendre comment construire une théorie homologique naturelle pour les $\mathcal{P}$-algèbres. Pour toute $\mathcal{P}$-algèbre A, l'homologie opéradique de A est définie sur l'espace $H_*^{\mathcal{P}}(A) := \mathcal{P}^{\text{i}}(A)$ par un bord qui vient de la structure de coopérade de $\mathcal{P}^{\text{i}}$. Par exemple, dans le cas $\mathcal{A}s$, on retrouve l'homologie de Hochschild et dans le cas $\mathcal{L}ie$, on retrouve l'homologie de Chevalley-Eilenberg. Il est bien connu que l'homologie de Hochshild d'une algèbre associative A mesure les déformations possibles de A (*cf.* [K1]). Plus généralement, on peut montrer que l'homologie opéradique $H_*^{\mathcal{P}}(A)$ d'une $\mathcal{P}$-algèbre mesure les *déformations* possibles de A en tant que $\mathcal{P}$-algèbre, par exemple en montrant que l'espace des *dérivations* de $\mathcal{P}^{\text{i}}(A)$ est muni d'une structure d'algèbre de Lie et en étudiant une telle structure. Il reste maintenant à généraliser cette démarche aux props et aux gèbres sur un prop de Koszul, grâce au travail effectué dans ma thèse.

Catégories modèles fermées. Plus généralement, le bon cadre d'étude pour les théories homotopiques est celui des *catégories modèles fermées* de D. Quillen [Q]. Grâce à la dualité de Koszul des opérades, on sait que la catégorie des opérades connexes et celle des algèbres différentielles graduées sur une opérade de Koszul sont des catégories modèles fermées. Je propose donc de réinterpréter les résultats de ma thèse, notamment les différentes résolutions homologiques des propérades (objets plus petits que les props mais qui suffisent à coder complétement certains types de gèbres) dans ce cadre et de montrer la conjecture suivante :

Conjecture.

- *La catégorie des propérades connexes est une catégorie modèle fermée.*
- *La catégorie des $\mathcal{P}$-gèbres sur une propérade de Koszul est une catégorie modèle fermée.*

2. Graphe homologie d'après Kontsevich

Homologie des graphes. Suivant la même démarche que Loday-Quillen-Tsygan, M. Kontsevich a montré en 1994 que l'homologie des champs de vecteurs symplectiques (algèbre de Lie de dimension infinie) est isomorphe à l'homologie de certains graphes finis (*cf.* [K2]).

Depuis les travaux de E. Getzler et M. M. Kapranov [GeK], on sait qu'à toute opérade cyclique ou modulaire, on peut associer un type de graphe et une homologie particulière. Dans le cas de l'opérade $\mathcal{C}om$, on retrouve les graphes *commutatifs* de Kontsevich. Dans le cas $\mathcal{A}s$, on trouve les graphes *rubans* dont l'homologie est reliée aux espaces modulaires et aux espaces de Teichmüller et dans le cas $\mathcal{L}ie$, on trouve des graphes dont l'homologie correspond à l'homologie du groupe des automorphismes extérieurs du groupe libre.

Il reste à calculer l'homologie de ces différents graphes. Peu de choses sont connues sur cette homologie. M. Kontsevich conjecture qu'elle est de type fini.

Calcul de l'homologie de certaines familles de graphes. Les résultats de ma thèse peuvent être interprétés en terme d'homologie des graphes. Un graphe *dirigé* est un graphe où l'orientation des arêtes est imposée par un flot global (du haut vers le bas, par exemple). Les graphes dirigés du type commutatif sont construits à partir du prop dual de celui des bigèbres de Lie, $\mathcal{B}i\mathcal{L}ie^!$. Comme ce PROP est une *diopérade* (toutes les compositions d'opérations faisant apparaître des graphes de genre strictement positif sont nulles), le bord de la bar construction correspond au bord de l'homologie des graphes de Kontsevich. J'ai montré que le prop $\mathcal{B}i\mathcal{L}ie$ est de Koszul. Comme corollaire, on obtient que l'homologie des graphes dirigés du type commutatif est égale au prop $\mathcal{B}i\mathcal{L}ie$.

Le bon cadre d'étude pour l'homologie des graphes semble être celui des props et non des opérades cycliques. Dans le cas des graphes dirigés, leur homologie est donnée par la dualité de Koszul des props. La seule différence entre les graphes dirigés et les graphes de Kontsevich vient des signes qui définissent le bord des complexes. Le but est maintenant d'utiliser le calcul de l'homologie dans le cas dirigé pour étudier le cas général.
Ce type de résultat a des conséquences dans les domaines cités précédement (espaces modulaires, espaces de Teichmüller, automorphismes extérieurs du groupe libre) que je souhaite étudier.

3. Algèbres de Hopf et Diagrammes de Feynman

Introduction. Dans le cadre de la théorie quantique des champs, on est amené à étudier des quantités liées aux intégrales de Feynman qui ne sont pas toujours convergentes. Dans les années 50 et 60, N.N. Bogoliubov, O.S. Parasiuk et K. Hepp, W. Zimmermann ont mis au point un procédé combinatoire, basé sur les diagrammes de Feynman, qui permet d'extraire des quantités finies de telles intégrales. Ce processus de renormalisation a connu un regain d'intérêt dans les dernières années grâce aux travaux d'Alain Connes et de Dirk Kreimer [CK]. Ces derniers ont décrit ce processus de manière algébrique grâce à la théorie des algèbres de Hopf. D'abord, D. Kreimer a construit une algèbre de Hopf sur les arbres enracinés et a relié l'antipode de cette algèbre au processus de renormalisation. Ensuite, A. Connes et D. Kreimer ont contruit une algèbre de Hopf sur les diagrammes de Feynman et ont décrit ce processus grâce à la décomposition de Birkhoff des algèbres de Hopf.

Construction générale et conjecture. Il apparait que ces algèbres de Hopf sont construites suivant un schéma particulier. Elles sont de la forme $T(\mathcal{C})$, algèbre tensorielle libre sur une coopérade $\mathcal{C}$ ou de la forme duale $T^c(\mathcal{P})$, cogèbre tensorielle colibre connexe sur une opérade $\mathcal{P}$. Grâce au produit monoïdal $\boxtimes$ que j'ai introduit dans [V] pour décrire les compositions d'opérations à plusieurs entrées et sorties et mieux comprendre la notion de prop, on peut généraliser la construction précédente et considérer des algèbres de Hopf de la forme $T(\mathcal{C})$, où $\mathcal{C}$ est un coprop, ou de la forme duale $T^c(\mathcal{P})$, où $\mathcal{P}$ est un prop. De telles algèbres de Hopf possèdent de bonnes propriétés :

Conjecture. *L'algèbre tensorielle libre $H = T(\mathcal{C})$ sur un coprop $\mathcal{C}$ est une algèbre de Hopf autoduale $H \cong H^*$ et sa partie primitive est donnée par $Prim(H) = \mathcal{C}$.*

J'espère en trouver d'autres, notamment en m'inspirant des travaux récents efféctués par J.-L. Loday et M. Ronco [LR] sur les algèbres de Hopf colibres. Sachant que les diagrammes de Feynman ne sont pas seulement munis de structures d'opérades mais de props, j'entends leur appliquer cette construction et chercher des applications en physique théorique.

4. Polytopes et Représentation

Introduction. Il existe deux familles de polytopes convexes appelées respectivement *permutoèdres* et *associaèdres*. Les faces des permutoèdres sont indicées par les arbres binaires planaires à niveaux, alors que les faces des associaèdres sont indicées par les arbres binaires planaires sans niveau. On peut donc facilement décrire une projection du permutoèdre de dimension n sur l'associaèdre de dimension n, en oubliant les niveaux des arbres. Cette projection possède de bonnes propriétés. En particulier, elle préserve les ordres partiels.

Généralisation. Cet exemple correspond au cas A_n dans la classification des groupes de Coxeter. (Les arbres binaires planaires à niveaux peuvent être mis en bijection avec les permutations du groupe symétrique). Dans le cas B_n, les *hyperoctoèdres* remplacent les permutoèdres et les *cycloèdres* remplacent les associaèdres. Plus généralement, F. Chapoton, S. Fomin et A. Zelevinsky ont proposé des familles de polytopes pour tous les types de systèmes de racines dans [CFZ]. Il reste à étudier comment généraliser les différents ordres partiels et comment décrire une projection qui les respecte.

Diagonales sur les permutoèdres et associaèdres. Un autre problème, lié aux familles des permutoèdres et des associaèdres, réside dans la construction d'une diagonale sur chaque polytope. Une réponse peu explicite a été donnée par S. Saneblidze et R. Umble dans [SU]. Les auteurs décrivent une diagonale sur le permutoèdre puis la projèttent en une diagonale sur l'associaèdre. Une telle construction est très utile. Elle permet notamment de définir le produit de deux algèbres associatives à homotopie près.

Il existe une construction géométrique d'une telle diagonale. Je cherche maintenant à la comprendre algébriquement en termes de représentations du groupe symétrique.

Références

[BF] C. Berger, B. Fresse, *Combinatorial operad actions on cochains,* Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **137** (2004), no. 1, 135-174.

[CFZ] F. Chapoton, S. Fomin, A. Zelevinsky, *Polytopal realizations of generalized associahedra*, Canad. Math. Bull. **45** (2002), no. 4, 537-566.

[CK] A. Connes, D. Kreimer, *Hopf algebras, renormalization and noncommutative geometry*, Comm. Math. Phys. **199** (1998), 203-242.

[CS] M. Chas, D. Sullivan, *Closed string operators in topology leading to Lie bialgebras and higher string algebra*, preprint `arXiv :math.GT/0212358` (2002).

[D] V. G. Drinfel'd, *Quantum groups*, in Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Berkeley Calif.), (1986) Providence, RI, (1987), Amer. Math. Soc. 798-820.

[GK] V. Ginzburg, M.M. Kapranov, *Koszul duality for operads*, Duke Math. J. **76** (1995), 203-272.

[GeK] E. Getzler, M.M. Kapranov, *Modular operads*, Compositio Math. **110** (1998), no. 1, 65-126.

[K1] M., Kontsevich, *Operads and motives in deformation quantization*, Lett. Math. Phys. **48** (1999), no. 1, 35-72.

[K2] M. Kontsevich, *Formal (non)commutative symplectic geometry*, The Gelfand Mathematical Seminars, 1990-1992, 173-187, Birkhuser Boston, Boston, MA, 1993.

[L] J.-L. Loday, *Dialgebras an related operads*, Lecture Notes in Math. **1763**, Springer-Verlag, 2001.

[LR] J.-L. Loday, M. Ronco, *On the structure of cofree Hopf algebras*, preprint `http ://www.arxiv.org/abs/math.QA/0405330`

[Q] D. Quillen, *Homotopical algebra*, Lecture Notes in Math. **43**, Springer-Verlag, 1967.

[SU] S. Saneblidze, R. Umble, *Diagonals on the Permutahedra, Multiplihedra and Associahedra*, preprint, `arXiv :math.AT/0209109` (2002).

[S] J.-P. Serre, *Gèbres*, Enseign. Math. (2) **39** (1993), no. 1-2, 33-85.

[V] B. Vallette, *Dualtié de Koszul des PROPs*, Thèse `http ://www-irma.u-strasbg.fr/∼vallette/these.ps`.