PROPÉRADES EN ALGÈBRE, TOPOLOGIE, GÉOMÉTRIE ET PHYSIQUE MATHÉMATIQUE

BRUNO VALLETTE

Mémoire d'habilitation à diriger des recherches

Université de Nice Sophia-Antipolis
Laboratoire J.-A. Dieudonné

Spécialité : Mathématiques

SOUTENANCE : 11 Juin 2009

Rapporteurs : M. Clemens BERGER
M. Bernhard KELLER
M. Yuri Ivanovich MANIN

Membres du Jury : M. Clemens BERGER
M. Bernhard KELLER
M. Jean-Louis LODAY
M. Ieke MOERDIJK (Président du jury)
M. Carlos SIMPSON
M. Boris TSYGAN

Introduction

Quel est le point commun entre toutes les algèbres associatives ou entre toutes les algèbres de Lie ? Les opérations multilinéaires qui agissent dessus. Elles sont toutes du même type. Lorsque l'on essaie de rendre cette phrase rigoureuse mathématiquement, on en vient à coder ces opérations, grâce à des représentations du groupe symétrique, pour tenir compte de leurs symétries. On définit ensuite, à ce niveau, l'analogue de la composition des opérations. En un sens, on peut faire remonter cette idée assez simple à Galois pour qui les opérations agissant sur les ensembles de solutions d'équations étaient aussi des objets mathématiques au même titre que les nombres, les fonctions ou les courbes.

La nécessité de coder abstraitement les opérations est venue de la topologie algébrique dans les années 60. L'algèbre et la théorie de l'homotopie se marient mal à priori. Partant d'un espace topologique X muni d'un produit binaire associatif, on peut transférer ce produit de X à un espace topologique Y homotopiquement équivalent. Cependant le produit transféré n'est pas associatif en général. Un autre exemple est donné par l'espace des lacets d'un espace topologique. On peut composer les lacets, mais à cause de la paramétrisation, ce produit n'est pas associatif ; il le devient si on considère les classes d'homotopie des lacets, ce qui définit les groupes d'homotopie des espaces topologiques. Dans les deux cas précédents, on trouve une structure d'*algèbre associative à homotopie près*, appelées aussi *A_∞-algèbre* [Sta63]. Cette notion généralise et inclut celle d'algèbre associative ; elle est stable pour les constructions homotopiques [BV73]. Plus explicitement, une A_∞-algèbre consiste en la donnée d'un produit binaire, associatif à une homotopie près. Cette homotopie est une opération ternaire qui elle aussi vérifie une certaine relation mais à une autre homotopie près, etc. Il faut une infinité dénombrable d'homotopies pour définir cette notion et ces homotopies supérieures doivent vérifier certaines relations non triviales. Il est donc paru important pour les mathématiciens à cette époque de développer une théorie algébrique permettant de gérer ces homotopies supérieures et leurs relations.

La première notion introduite dans ce sens fut celle de *prop* en théorie des catégories [ML65]. Cette terminologie vient de *pro*duit et *p*ermutation. Un prop est une catégorie monoïdale symétrique dont les objets sont les entiers naturels et dont le produit tensoriel est la somme. L'ensemble des morphismes $\mathrm{Hom}(n, m)$ peut être vu comme modélisant un ensemble d'opérations à n entrées et m sorties. La notion d'"algèbre" sur un prop a été introduite par F.-W. Lawvere [Law63] sous le nom de *théorie algébrique*. Pendant les années 60, F. Adams et S. MacLane ont beaucoup travaillé sur l'application des props en topologie algébrique pour coder les homotopies supérieures. Un exemple important est donné par les opérations de Steenrod qui proviennent des homotopies supérieures pour la commutativité du produit sur les cochaînes singulières d'un espace topologique. Comme ce sont des opérations à une entrée et une sortie, on peut les coder par une algèbre : l'algèbre de Steenrod [Ste62]. Seul l'article [ML65] sorti de ce travail à cette époque. La principale raison est qu'il est difficile de travailler avec les props. Malgré la simplicité de la définition, la combinatoire des compositions d'opérations à plusieurs entrées et plusieurs sorties n'est pas évidente. En 1967, MacLane organisa un séminaire à l'université de Chicago sur le sujet avec F. Adams, J. M. Boardman, J. Stasheff et R. Vogt comme participants. De celui-ci sorti la monographie de Boardmann et Vogt [BV73] dans lequel les auteurs utilisent des props pour modéliser les opérations à une seule sortie qui agissent sur les espaces de lacets itérés. Réciproquement, ils ont montré que si un espace topologique est muni de telles opérations, alors c'est un espace de lacets itérés. Ce fameux résultat est connu sous le nom de *principe de reconnaissance*. J.-P. May a mis en avant l'objet qui code les opérations à plusieurs entrées et une seule sortie [May72]. Il lui a donné le nom d'*opérade* par contraction des mots *opéra*tion et mon*ade*. Il existe par exemple une opérade dont la catégorie d'algèbres est formée des algèbres associatives à homotopie près.

Le même phénomène est apparu en physique mathématique. G. Segal a, par exemple, défini la notion de *théorie des champs conformes* comme une algèbre sur le prop des surface de Riemann [Seg04]. Ces surfaces sont munies de $n + m$ disques paramétrés de manière homolomorphe. On les interprète comme les n entrées et les m sorties d'une opération représentée par la surface elle-même. On "compose" donc ces opérations en recollant les surfaces de Riemann suivant ces disques. On peut aussi concaténer deux surfaces pour en produire une troisième. Ce prop étant assez difficile à comprendre, on a commencé par étudier la sous-opérade engendrée par les surfaces de genre 0, les sphères de Riemann, avec un seul disque en guise de sortie. Les algèbres sur cette opérade ont été étudiées avec attention et sont reliées aux algèbres vertex [Bor86], aux algèbres de Kac-Moody et de Virasoro [Hua97] et algèbres chirales [BD04].

La notion d'opérade est restée pendant vingt ans presque uniquement dans le giron de la topologie algébrique. Elle a connu une extraordinaire renaissance au début des années 90 grâce aux liens avec la physique mathématique (théorie des champs), avec la géométrie algébrique (espace de modules de courbes) et avec la topologie algébrique (dualité de Koszul) sous l'impulsion de M. Kontsevich, Y. I. Manin, E. Getzler, V. Ginzburg et M.M. Kapranov notamment.

Armé des découvertes effectuées au niveau des opérades, on s'est à nouveau attaqué aux props au début du XXIième siècle. Alors qu'une opérade est un monoïde, pour la composition "verticale" des opérations, un prop est un "2-monoïde", c'est-à-dire qu'il est défini par deux produits, la composition "verticale" et la concaténation "horizontale" des opérations. Ceci explique pourquoi les outils homologiques classiques, comme la construction bar ou la dualité de Koszul [Pri70], par exemple, ont pu être étendus aux opérades [GK94, GJ94] mais pas encore aux props.

La première idée de mes travaux fut d'introduire un objet intermédiaire, appelé *propérade*, qui est défini comme un monoïde avec seulement la composition "verticale" des opérations, mais qui permette de coder les opérations à plusieurs entrées et sorties. Par exemple, le prop des surfaces de Riemann est librement engendré par la propérade des surfaces de Riemann connexes ; c'est le cas de nombreux props dans la littérature. On peut donc étudier les théories de champs conformes de manière plus économique et sans perte d'information avec cette propérade. J'ai ensuite expliqué comment faire de l'algèbre homologique à ce niveau, en y définissant une construction bar et en y étendant la dualité de Koszul des opérades [GK94].

L'universalité des notions d'opérade, de propérade et de prop font qu'elles sont maintenant utilisées en topologie algébrique, géométrie différentielle, géométrie algébrique, géométrie non-commutative, physique mathématique, combinatoire algébrique, catégories supérieures et en informatique théorique [Cur06].

Ce mémoire détaille les résultats que nous avons obtenus au cours de ce programme d'étude des propérades en algèbre, topologie, géométrie et physique mathématique.

Articles personnels

A. *Dualité de Koszul des props*, Thèse de doctorat (décembre 2003), 124 pages, prépublication IRMA.

1. *Koszul duality for PROPs*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris 338 (2004), no. 12, 909-914.

2. *A Koszul duality for props*, Trans. Amer. Math. Soc. 359 (2007), 4865-4943.

3. *Free monoids in monoidal abelian categories*, Applied Categorical Structures, Volume 17, Issue 1 (2009), Page 43–63.

4. *Homology of generalized partition posets*, Journal of Pure and Applied Algebra, 208 (2007), no. 2, 699-725.

5. *Pointed and multi-pointed partitions of type A and B*, avec Frédéric Chapoton, J. Algebraic Combin. 23 (2006), no. 4, 295-316.

6. *Manin products, Koszul duality, Loday algebras and Deligne conjecture*, Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelle's Journal), Issue 620, (2008), 105-164.

7. *Deformation theory of representations of prop(erad)s I* , avec Sergei Merkulov, 56 pages, à paraître dans Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelle's Journal).

8. *Deformation theory of representations of prop(erad)s II*, avec Sergei Merkulov, 52 pages, à paraître dans Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelle's Journal).

9. *Homotopy Batalin-Vilkovisky algebras*, avec Imma Gálvez-Carrillo et Andy Tonks, 42 pages, prépublication `arxiv.org/abs/0907.2246`.

Tous ces papiers sont disponibles sur ma page professionnelle : `http ://math.unice.fr/~brunov`.

Table des matières

1. Propérades

On rappelle les notions d'algèbre associative, d'opérade et de propérade [A, 1, 2], qui sont des généralisations successives. Les notions d'opérades et de propérades servent à coder algébriquement les opérations multilinéaires agissant sur les différents types d'algèbres.

1.1. **Algèbres associatives.** Soit $\mathbb{K}$ un anneau de base et soit $(\mathbb{K}\text{-Mod}, \otimes_{\mathbb{K}}, \mathbb{K})$ la catégorie monoïdale des $\mathbb{K}$-modules équipée du produit tensoriel sur $\mathbb{K}$.

Définition (Algèbre associative unitaire)**.** Une *algèbre associative unitaire* est un monoïde $(A,\, \mu,\, \eta)$ dans la catégorie monoïdale $(\mathbb{K}\text{-Mod}, \otimes_{\mathbb{K}}, \mathbb{K})$. Le produit $\mu\, :\, A \otimes_{\mathbb{K}} A \to A$ est associatif et le morphisme $\eta\, :\, \mathbb{K} \to A$ est l'unité de A.

Nous représentons le produit des éléments $a_1, \ldots, a_k$ de A par une barre verticale dont les sommets sont indicés par les a_i, voir figure 1

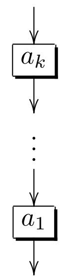


Figure 1. Produit des $a_1, \ldots, a_k$.

Exemple. Soit M un $\mathbb{K}$-module. On considère l'espace des endomorphismes de M : $\mathrm{End}_M := \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(M,\, M)$. Muni de la composition des endomorphismes et de l'unité id_M, End_M est une algèbre associative.

Une *cogèbre coassociative counitaire* est un comonoïde dans la catégorie monoïdale $(\mathbb{K}\text{-Mod}, \otimes_{\mathbb{K}}, \mathbb{K})$, c'est-à-dire un monoïde dans la catégorie opposée. Il s'agit d'un $\mathbb{K}$-module C équipé d'un coproduit $C \to C \otimes_{\mathbb{K}} C$ coassociatif et d'une application counité $C \to \mathbb{K}$.

1.2. **Opérades.** Un $\mathbb{S}$-*module* est une collection $\{\mathcal{P}(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ de modules à droite sur les groupes symétriques $\mathbb{S}_n$. Dans la catégorie des $\mathbb{S}$-modules, on définit un produit monoïdal par la formule suivante :

$$\mathcal{P} \circ \mathcal{Q}(n) := \bigoplus_{1\leqslant l\leqslant n} \left(\bigoplus_{i_1+\cdots+i_l=n} \mathcal{P}(l) \otimes_{\mathbb{K}} \big(\mathcal{Q}(i_1) \otimes_{\mathbb{K}} \cdots \otimes_{\mathbb{K}} \mathcal{Q}(i_l)\big) \otimes_{\mathbb{S}_{i_1}\times\cdots\times\mathbb{S}_{i_l}} k[\mathbb{S}_n] \right)_{\mathbb{S}_l},$$

qui est le module des coinvariants pour l'action du groupe symétrique $\mathbb{S}_l$ définie par

$$(p \otimes_{\mathbb{K}} q_1 \ldots q_l \otimes_{\mathbb{K}} \sigma)^{\nu} := p^{\nu} \otimes_{\mathbb{K}} q_{\nu(1)} \ldots q_{\nu(l)} \otimes_{\mathbb{K}} \bar{\nu}^{-1}.\sigma$$

pour $p \in \mathcal{P}(l)$, $q_j \in \mathcal{Q}(i_j)$, $\sigma \in \mathbb{S}_n$ et $\nu \in \mathbb{S}_l$, tel que $\bar{\nu}$ soit la permutation par bloc induite.

La notion de $\mathbb{S}$-module est utilisée pour modéliser les opérations multilinéaires qui agissent sur les différents types d'algèbres. Le produit monoïdal $\circ$ correspond à la composition de ces opérations et peut être représenté par des arbres à deux niveaux dont les sommets sont indicés par les éléments de $\mathcal{P}$ et de $\mathcal{Q}$, voir figure 2.
L'unité du produit monoïdal est donné par le $\mathbb{S}$-module $I = (0, \mathbb{K},\, 0,\, 0,\, \ldots)$, qui code l'opération identité représentée par $|$.

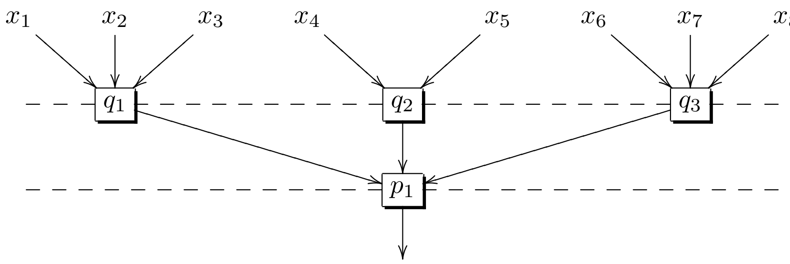


FIGURE 2. Le produit monoïdal $\mathcal{P} \circ \mathcal{Q}$.

Définition (Opérade)**.** Une *opérade* est un monoïde $(\mathcal{P}, \mu, \eta)$ dans la catégorie monoïdale ($\mathbb{S}$-Mod, $\circ$, I). Le produit associatif $\mu : \mathcal{P} \circ \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ est appelé *produit de composition* et le morphisme $\eta : I \to \mathcal{P}$ est l'*unité*.

Exemples.
- Soit M un $\mathbb{K}$-module et soit la collection $\mathrm{End}_M := \{\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(M^{\otimes n}, M)\}_{n \in \mathbb{N}}$. L'action du groupe symétrique $\mathbb{S}_n$ sur les entrées des morphismes de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(M^{\otimes n}, M)$ fait de End_M un $\mathbb{S}$-module. Avec la composition naturelle des morphismes, End_M est une opérade appelée *opérade des endomorphismes.*
- Soit $\mathrm{Com}(n) := \mathbb{K}$, la représentation triviale, pour tout $n \geq 1$ et $\mathrm{Com}(0) := 0$. Le produit de composition est défini par l'isomorphisme canonique. On peut aussi considérer $\mathrm{uCom}(n) := \mathbb{K}$, pour tout $n \geq 0$.

Dualement, une *coopérade* est un comonoïde dans la catégorie des $\mathbb{S}$-modules ($\mathbb{S}$-Mod, $\circ$, I). Cette notion consiste en la donnée d'un *coproduit de décomposition* $\mathcal{C} \to \mathcal{C} \circ \mathcal{C}$ coassociatif, qui "décompose" tout élément de $\mathcal{C}$ en arbres à deux niveaux de sommets indicés par des éléments de $\mathcal{C}$.

À tout $\mathbb{K}$-module V, on associe un $\mathbb{S}$-module $\widetilde{V} := (0, V, 0, 0, \ldots)$ concentré en arité 1. Cela définit une inclusion des $\mathbb{K}$-modules dans les $\mathbb{S}$-modules. Cette inclusion est compatible avec les produits monoïdaux respectifs : $\widetilde{V \otimes W} = \widetilde{V} \circ \widetilde{W}$. Le catégorie monoïdale ($\mathbb{K}$-Mod, $\otimes_{\mathbb{K}}$, $\mathbb{K}$) est donc une sous-catégorie monoïdale pleine de la catégorie ($\mathbb{S}$-Mod, $\circ$, I). Ainsi toute algèbre associative peut être vue comme une opérade concentrée en arité 1.

On peut oublier l'action des groupes symétriques et travailler dans la catégorie des $\mathbb{K}$-modules $\mathbb{N}$-gradués. Cette catégorie est encore munie d'un produit monoïdal qui est l'analogue non-symétrique du précédent. On le note toujours par $\circ$:

$$\mathcal{P} \circ \mathcal{Q}(n) := \bigoplus_{1 \leqslant l \leqslant n} \left(\bigoplus_{i_1 + \cdots + i_l = n} \mathcal{P}(l) \otimes_{\mathbb{K}} \big(\mathcal{Q}(i_1) \otimes_{\mathbb{K}} \cdots \otimes_{\mathbb{K}} \mathcal{Q}(i_l)\big) \right).$$

Définition (Opérade non-symétrique)**.** Une *opérade non-symétrique* est un monoïde dans la catégorie monoïdale ($\mathbb{N}$-Mod, $\circ$, I).

Exemple. Soit $\mathrm{As}(n) := \mathbb{K}$, pour tout $n \geq 1$ et $\mathrm{As}(0) := 0$. Le produit de composition est défini par l'isomorphisme canonique. On considère aussi $\mathrm{uAs}(n) := \mathbb{K}$, pour tout $n \geq 0$.

On peut aussi définir la notion d'*opérade colorée* où l'on indice les entrées et sorties des opérations par des "couleurs". La composition de telles opérations doit alors être cohérente avec les couleurs ; seules les sorties d'une certaine couleur peuvent être composées avec les entrées de cette couleur, cf. [BV73, VdL03, BM06].

1.3. **Propérades.** Les éléments d'une algèbre associative peuvent être vus comme des opérations à une entrée et une sortie (figure 1). Les éléments d'une opérade représentent des opérations à plusieurs entrées mais une seule sortie. Pour modéliser les opérations à plusieurs entrées et plusieurs sorties avec leur symétrie, on utilise la notion de $\mathbb{S}$-*bimodule* : un $\mathbb{S}$-*bimodule* est une collection $\{\mathcal{P}(m,n)\}_{m,\,n\in\mathbb{N}}$ de modules à droite sur le groupe symétrique $\mathbb{S}_n$ et à gauche sur le groupe symétrique $\mathbb{S}_m$, ces deux actions commutant entre elles. Dans cette catégorie, on définit un produit monoïdal basé sur la composition des opérations indiçant des graphes connexes à deux niveaux, voir figure 3.

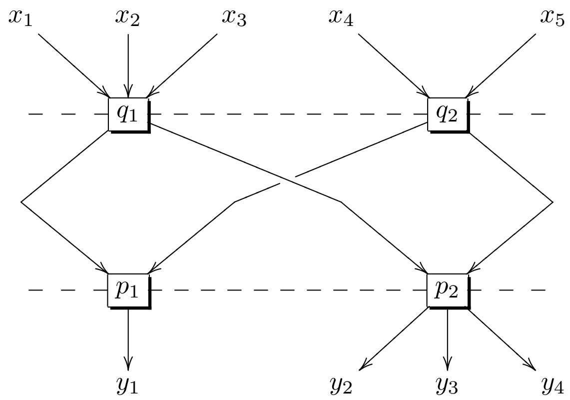
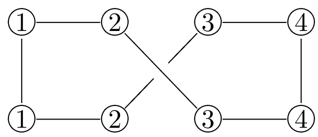


FIGURE 3. Composition d'opérations à plusieurs entrées et plusieurs sorties.

Soit a et b le nombre de sommets du premier et du second niveau respectivement. Soit N le nombre d'arêtes internes entre les deux niveaux. À un a-uplet d'entiers $\bar{\imath} := (i_1,\,\ldots,\,i_a)$, on associe leur somme $|\bar{\imath}| := i_1 + \cdots + i_a$. Pour toute paire de a-uplets $\bar{\imath}$ et $\bar{\jmath}$, on note $\mathcal{Q}(\bar{\jmath},\,\bar{\imath})$ le produit tensoriel $\mathcal{Q}(j_1,\,i_1)\otimes\cdots\otimes\mathcal{Q}(j_a,\,i_a)$ et on note $\mathbb{S}_{\bar{\imath}}$ l'image du produit direct des groupes $\mathbb{S}_{i_1}\times\cdots\times\mathbb{S}_{i_n}$ dans $\mathbb{S}_{|\bar{\imath}|}$.

Définition (Permutations connexes)**.** Soit N un entier. Soient $\bar{k} = (k_1,\,\ldots,\,k_b)$ un b-uplet et $\bar{\jmath} = (j_1,\,\ldots,\,j_a)$ un a-uplet tels que $|\bar{k}| = k_1+\cdots+k_b = |\bar{\jmath}| = j_1+\cdots+j_a = N$.
Une *permutation* $(\bar{k},\,\bar{\jmath})$*-connexe* σ est une permutation de $\mathbb{S}_N$ telle que le graphe de la représentation graphique de σ soit connexe si on relie les entrées indicées par $j_1+\cdots+j_i+1,\,\ldots,\,j_1+\cdots+j_i+j_{i+1}$, pour $0\le i\le a-1$, et les sorties indicées par $k_1+\cdots+k_i+1,\,\ldots,\,k_1+\cdots+k_i+k_{i+1}$, pour $0\le i\le b-1$. L'ensemble des permutations $(\bar{k},\,\bar{\jmath})$-connexes est noté $\mathbb{S}^c_{\bar{k},\,\bar{\jmath}}$.

Exemple. Considérons la permutation (1324) de $\mathbb{S}_4$, $\bar{k}=(2,2)$ et $\bar{\jmath}=(2,2)$. Si on relie les entrées 1, 2 et 3, 4 et les sorties 1, 2 et 3, 4, on obtient le graphe connexe suivant



Donc la permutation (1324) est $((2,2),\,(2,2))$-connexe.

Dans la catégorie des $\mathbb{S}$-bimodules, on considère le produit monoïdal défini par la formule

$$\mathcal{P}\boxtimes\mathcal{Q}(m,\,n) := \bigoplus_{N\in\mathbb{N}^*}\left(\bigoplus_{\bar{l},\,\bar{k},\,\bar{\jmath},\,\bar{\imath}}\mathbb{K}[\mathbb{S}_m]\otimes_{\mathbb{S}_{\bar{l}}}\mathcal{P}(\bar{l},\,\bar{k})\otimes_{\mathbb{S}_{\bar{k}}}k[\mathbb{S}^c_{\bar{k},\,\bar{\jmath}}]\otimes_{\mathbb{S}_{\bar{\jmath}}}\mathcal{Q}(\bar{\jmath},\,\bar{\imath})\otimes_{\mathbb{S}_{\bar{\imath}}}k[\mathbb{S}_n]\right)_{\mathbb{S}_b^{\mathrm{op}}\times\mathbb{S}_a},$$

où la seconde somme directe porte sur les b-uplets $\bar{l}$, $\bar{k}$ et les a-uplets $\bar{\jmath}$, $\bar{\imath}$ tels que $|\bar{l}| = m$, $|\bar{k}| = |\bar{\jmath}| = N$, $|\bar{\imath}| = n$ et où on considère le module des coinvariants pour l'action suivante de $\mathbb{S}_b^{\mathrm{op}}\times\mathbb{S}_a$:

$$\begin{aligned}&\theta\otimes p_1\otimes\cdots\otimes p_b\otimes\sigma\otimes q_1\otimes\cdots\otimes q_a\otimes\omega\sim\\&\theta\,\tau_{\bar{l}}^{-1}\otimes p_{\tau^{-1}(1)}\otimes\cdots\otimes p_{\tau^{-1}(b)}\otimes\tau_{\bar{k}}\,\sigma\,\nu_{\bar{\jmath}}\otimes q_{\nu(1)}\otimes\cdots\otimes q_{\nu(a)}\otimes\nu_{\bar{\imath}}^{-1}\,\omega,\end{aligned}$$

pour $\theta \in \mathbb{S}_m$, $\omega \in \mathbb{S}_n$, $\sigma \in \mathbb{S}^c_{\bar{k},\,\bar{\jmath}}$ et pour $\tau \in \mathbb{S}_b$ avec $\tau_{\bar{k}}$ la permutation par bloc associée, $\nu \in \mathbb{S}_a$ et $\nu_{\bar{\jmath}}$ la permutation par bloc associée. L'unité I de ce produit monoïdal est donnée par

$$\begin{cases} I(1,\,1) := \mathbb{K}, & \text{et} \\ I(m,\,n) := 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On note cette catégorie monoïdale $(\mathbb{S}\text{-biMod}, \boxtimes,\ I)$.

Remarque. Il faut se restreindre aux graphes connexes et aux permutations connexes pour que ce produit définisse une catégorie monoïdale, voir Proposition 1.6 de [2].

Définition (Propérade)**.** Une *propérade* est un monoïde dans la catégorie monoïdale des $\mathbb{S}$-bimodules $(\mathbb{S}\text{-biMod}, \boxtimes,\ I)$.

Exemples.

- Soit M un $\mathbb{K}$-module et soit la collection $\mathrm{End}_M := \{\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(M^{\otimes n},\ M^{\otimes m})\}_{m,\,n\in\mathbb{N}}$. La permutation des entrées et des sorties des applications de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(M^{\otimes n},\ M^{\otimes m})$ fait de End_M un $\mathbb{S}$-bimodule. À nouveau, les compositions “connexes” des morphismes munissent End_M d'une structure de propérade.
- Posons $\mathrm{Frob}_\diamond(n, m) := \mathbb{K}$, la représentation triviale, pour tout $n, m \geq 1$. Le produit de composition suivant un graphe de genre 0 est défini par l'isomorphisme canonique. Sur un graphe de genre strictement positif, il est nul.
- Considérons $\mathrm{Frob}(n, m) := \mathbb{K}[x]$, l'algèbre polynomiale sur un élément x avec l'action triviale de $\mathbb{S}_n$ et $\mathbb{S}_m$, pour tout $n, m \geq 1$. Le produit de composition suivant un graphe de genre g est défini par le produit dans l'algèbre polynomiale de tous les éléments indiçant les sommets du graphe, fois x^g.

Une *copropérade* est un comonoïde dans la catégorie monoïdale $(\mathbb{S}\text{-biMod}, \boxtimes,\ I)$.

À tout $\mathbb{S}$-module V, on associe un $\mathbb{S}$-bimodule $\widetilde{V}$ défini par

$$\begin{cases} \widetilde{V}(1,\,n) := V(n) & \text{et} \\ \widetilde{V}(m,\,n) := 0 & \text{pour } m > 1. \end{cases}$$

Ceci définit une inclusion de catégories monoïdales $\widetilde{V \circ W} = \widetilde{V} \boxtimes \widetilde{W}$. La catégorie $(\mathbb{S}\text{-Mod}, \circ,\ I)$ est une sous-catégorie pleine de $(\mathbb{S}\text{-biMod}, \boxtimes,\ I)$. Une opérade est donc une propérade.
Au final, une algèbre associative est une opérade et une opérade est une propérade. Comme le cas des propérades inclus ces deux autres cas, nous travaillerons dans ce contexte.

Catégorie monoïdale :	$(\mathbb{K}\text{-Mod},\ \otimes_{\mathbb{K}})$	$\rightarrowtail$	$(\mathbb{S}\text{-Mod}, \circ)$	$\rightarrowtail$	$(\mathbb{S}\text{-biMod}, \boxtimes)$
Monoïde :	Algèbre associative	$\rightarrowtail$	Opérade	$\rightarrowtail$	Propérade.

Notons que le premier produit monoïdal $\otimes_{\mathbb{K}}$ est bilinéaire et symétrique, que le deuxième $\circ$ n'est linéaire qu'à gauche et non-symétrique et que le troisième n'est linéaire ni à gauche, ni à droite.

1.4. **$\mathcal{P}$-gèbres.** Soit $(A,\ \mu,\ \eta)$ une algèbre associative et soit M un $\mathbb{K}$-module. Une structure de *module sur* A est la donnée d'un morphisme d'algèbres associatives $\phi\ :\ A \to \mathrm{End}_M$. Plus généralement, on donne la définition suivante.

Définition ($\mathcal{P}$-gèbres)**.** Soit $\mathcal{P}$ une propérade et soit M un $\mathbb{K}$-module. Une structure de *$\mathcal{P}$-gèbre* sur M est un morphisme de propérades $\mathcal{P} \to \mathrm{End}_M$.

Lorsque $\mathcal{P}$ est une opérade, on retrouve la notion d'*algèbre sur* $\mathcal{P}$ ou *$\mathcal{P}$-algèbre*, cf. [BV73, May72, GK94]. Une propérade est un objet algébrique qui modélise abstraitement les types d'opérations agissant sur une catégorie d'“algèbres”. Se donner un morphisme concret $\mathcal{P} \to \mathrm{End}_M$ équivaut à réaliser ces opérations abstraites sur M. L'image de $\mathcal{P}$ par ce morphisme fournit les opérations concrètes qui agissent sur M. Comme c'est un morphisme de propérades, les relations vérifiées par le produit de composition de $\mathcal{P}$ donnent les relations vérifiées par ces opérations sur M.

Exemples.

- Une Com-algèbre est une algèbre associative et commutative. Une uCom-algèbre est une algèbre associative et commutative unitaire.
- Une As-algèbre est une algèbre associative. Une uAs-algèbre est une algèbre associative unitaire.
- Une Frob-gèbre est un $\mathbb{K}$-module A, muni d'un produit binaire $\mu : A^{\otimes 2} \to A$, $\curlyvee$, associatif et commutatif et d'un coproduit $\delta : A \to A^{\otimes 2}$, $\curlywedge$, coassociatif et cocommutatif. Le coproduit est un morphisme de modules avec la structure donnée par le produit. Cette notion est proche de celle d'algèbre de Frobenius, cf. [Koc04].
- Une $\mathrm{Frob}_\diamond$-gèbre est une Frob-gèbre telle que

$$\mu(\delta) = \diamond = 0.$$

Les catégories de "bigèbres" définies par des produits et des coproduits (plusieurs sorties), ne peuvent pas être modélisées par des opérades. Dans ce cas, il faut utiliser des propérades. Par exemple, il existe une propérade BiLie qui code les bigèbres de Lie, une propérade BiAs qui code les bigèbres associatives .

Remarques.

(1) La terminologie de "gèbre" vient de J-.P. Serre [Ser93], ce terme englobe des notions aussi diverses que les modules, comodules, algèbres, cogèbres, bigèbres. Il n'y aucune obstruction à omettre le "al" de "al-jabr" qui signifie "le". Le but de cette terminologie est d'éviter les confusions entre algèbre (produits), cogèbre (coproduits) et bigèbre (les deux).

(2) La catégorie des algèbres associatives unitaires apparait deux fois, mais de manières différentes. Toute algèbre associative unitaire est un opérade particulière et il existe un opérade uAs qui code les algèbres associatives unitaires.

L'intérêt des notions d'opérade et de propérade est de modéliser les opérations algébriques agissant sur toutes les gèbres d'un certain type. Toute construction effectuée au niveau des propérades traduit donc des relations entre catégories de gèbres.

Nous avons introduit ici la notion de propérade algébrique en nous basant sur la catégorie symétrique monoïdale ($\mathbb{K}$-Mod, $\otimes_{\mathbb{K}}$). Cette même définition est applicable mutatis mutandis à toute catégorie monoïdale symétrique. Dans celle des ensembles munie du produit cartésien, on obtient la notion de *propérade ensembliste*, dans celle des espaces topologiques, on obtient la notion de *propérade topologique*, dans celle des ensembles simpliciaux, on obtient la notion de *propérade simpliciale*, enfin dans celle des modules différentiels gradués munie du produit tensoriel, on obtient la notion de *propérade différentielle graduée.*

2. Monoïde libre

La construction du monoïde libre est une question générale qui se pose dans toute catégorie monoïdale. Nous avons apporté une réponse générale dans [3] afin d'expliciter la notion de propérade libre.

À toute catégorie monoïdale $(\mathcal{A}, \boxtimes, I)$, on associe la catégorie $\mathcal{M}on(\mathcal{A})$ des monoïdes de $\mathcal{A}$. Le foncteur *oubli*, $U : \mathcal{M}on(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}$, associe à un monoïde son object sous-jacent. Réciproquement on considère son foncteur adjoint à gauche $\mathcal{F} : \mathcal{A} \to \mathcal{M}on(\mathcal{A})$, lorsqu'il existe.

$$\mathcal{F} \ : \ \mathcal{A} \rightleftarrows \mathcal{M}on(\mathcal{A}) \ : \ U$$

L'image d'un object V de $\mathcal{A}$ par le foncteur $\mathcal{F}$ est appelé *monoïde libre sur* V. Il est caractérisé par la propriété universelle suivante : il existe un morphisme $i : V \to \mathcal{F}(V)$ dans $\mathcal{A}$ tel que tout morphisme $\varphi : V \to M$, où M est un monoïde de $\mathcal{A}$, se factorise de manière unique par i

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "\varphi"'] & \mathcal{F}(V) \arrow[d, dashed, "\exists ! \Phi"] \\ & M \end{tikzcd}$$

avec $\Phi : \mathcal{F}(V) \to M$ morphisme de monoïdes.

Dans une catégorie monoïdale munie de coproduits dénombrables où les deux côtés du produit monoïdal préservent les coproduits, le monoïde libre sur un objet V est explicitement donné par les "mots" en V (cf. [ML98] Chapitre VII, Section 3, Théorème 2). Si on note le coproduit de la catégorie par $\oplus$, la colimite suivante fournit l'objet sous-jacent au monoïde libre :

$$\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} V^{\boxtimes n} = \mathrm{Colim}(I \to I \oplus V \to I \oplus V \oplus V^{\boxtimes 2} \to \cdots)$$

Ce cas inclut celui des algèbres associatives libres.

L'existence du monoïde libre a été établie par M. Barr [Bar70] sous des hypothèses plus générales. E. Dubuc [Dub74] a décrit une construction du monoïde libre lorsque le produit monoïdal préserve les colimites sur la catégorie simpliciale. Cette construction est basée sur un processus transfini.

Lorsque seul un côté du produit monoïdal préserve les colimites, donc les coproduits, G.M. Kelly a construit le monoïde libre à l'aide d'une colimite particulièrement bien choisie (équation (23.2) page 69 de [Kel80], voir aussi H. J. Baues, M. Jibladze, A.Tonks [BJT97] Appendice B et C. Rezk [Rez96] Appendice A).
Soit V un objet de $\mathcal{A}$. On pose $V^0 := I$, $V^1 := I \oplus V \cong I \oplus V \boxtimes V^0$ et plus généralement $V^n := I \oplus V \boxtimes V^{n-1}$ pour $n \geq 1$. De même, on définit les morphismes $i_0 : V^0 = I \to I \oplus V = V^1$, par l'inclusion, et $i_n : V^{n-1} \to V^n$ par la formule de récurrence $i_n := \mathrm{id}_I \oplus \mathrm{id}_V \boxtimes i_{n-1}$. Le monoïde libre est alors donné par cette colimite

$$\mathcal{F}(V) = \mathrm{Colim}(V^0 \xrightarrow{i_0} V^1 \xrightarrow{i_1} V^2 \xrightarrow{i_2} \cdots)$$

Cette construction suffit à traiter le cas des opérades ; elle est éminemment dissymétrique.

Tous les cas précédents exigent que le produit monoïdal préserve beaucoup de colimites, en particulier les coproduits. Or cette propriété n'est pas vérifiée dans les exemples qui nous intéressent, notamment celui des propérades. Il faut donc raffiner les arguments. Pour cela, j'ai introduit dans [3] une colimite de nature symétrique qui donne le monoïde libre. Rétrospectivement, cela permet de retrouver les deux cas précédents et d'expliquer conceptuellement la forme de la propérade libre.

Le théorème principal de [3] repose sur l'introduction de la notion de *partie multilinéaire* et sur l'utilisation de la notion de *coégalisateur réflexif*.

2.1. **Partie multilinéaire.** Plaçons-nous dans une catégorie monoïdale abélienne $(\mathcal{A}, \boxtimes, I)$. Comme nous l'avons vu ci-dessus, le point crucial de l'étude du monoïde libre réside dans le comportement du produit monoïdal $\boxtimes$ vis-à-vis du coproduit $\oplus$ de $\mathcal{A}$. Suivant cette notation, nous noterons $f + g$ la somme de deux morphismes de $\mathcal{A}$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, tail, "\iota_A"] \arrow[dr, "f"'] & A \oplus B \arrow[d, "f+g"] & B \arrow[l, tail, "\iota_B"'] \arrow[dl, "g"] \\ & C. & \end{tikzcd}$$

Définition (Partie multilinéaire)**.** Soient A, B, X et Y des objets de $\mathcal{A}$. On appelle *partie multilinéaire* en X de $A \boxtimes (X \oplus Y) \boxtimes B$, le conoyau du morphisme suivant

$$A \boxtimes Y \boxtimes B \xrightarrow{A \boxtimes \iota_Y \boxtimes B} A \boxtimes (X \oplus Y) \boxtimes B,$$

que l'on note $A \boxtimes (\underline{X} \oplus Y) \boxtimes B$.

La partie multiplinéaire en X est naturellement isomorphe au noyau de l'application

$$A \boxtimes (X \oplus Y) \boxtimes B \xrightarrow{A \boxtimes \pi_Y \boxtimes B} A \boxtimes Y \boxtimes B,$$

où π_Y est la projection $X \oplus Y \to Y$. La suite exacte courte

$$\begin{tikzcd} A \boxtimes (\underline{X} \oplus Y) \boxtimes B \arrow[r, tail] & A \boxtimes (X \oplus Y) \boxtimes B \arrow[r, two heads, "A \boxtimes \pi_Y \boxtimes B"'] & A \boxtimes Y \boxtimes B \arrow[l, bend right, "A \boxtimes \iota_Y \boxtimes B"'] \end{tikzcd}$$

se relève pour donner

$$A \boxtimes (X \oplus Y) \boxtimes B \;\cong\; A \boxtimes (\underline{X} \oplus Y) \boxtimes B \;\oplus\; A \boxtimes Y \boxtimes B.$$

Le produit monoïdal préserve les coproduits à gauche et à droite si et seulement si $A \boxtimes (\underline{X} \oplus Y) \boxtimes B = A \boxtimes X \boxtimes B$ pour tout A, B, X et Y dans $\mathcal{A}$. Donc la partie multilinéaire mesure le défaut pour le produit monoïdal à préserver les coproduits.

Définition (Foncteurs de multiplication)**.** À tout objet A de $\mathcal{A}$, on associe le *foncteur de muliplication à gauche* par A (respectivement *à droite*) défini par $G_A \,:\, X \mapsto A \boxtimes X$ (respectivement $D_A \,:\, X \mapsto X \boxtimes A$).

2.2. **Coégalisateurs réflexifs.** Les foncteurs de multiplication L_A et R_A ne préservent pas nécessairement les conoyaux, même lorsqu'ils préservent les coproduits. Néanmoins dans les cas qui nous intéressent, les foncteurs de multiplication préservent les *coégalisateurs réflexifs*, qui est une notion plus faible que celle de conoyau.

Définition (Coégalisateurs réflexifs)**.** Une paire de morphismes $X_1 \underset{d_0}{\overset{d_1}{\rightrightarrows}} X_0$ est dite *réflexive* s'il existe un morphisme $s_0 \,:\, X_0 \to X_1$ tel que $d_0 \circ s_0 = d_1 \circ s_0 = id_{X_0}$. Un coégalisateur d'une paire réflexive est appelé un *coégalisateur réflexif.*

Un foncteur qui préserve les coégalisateurs réflexifs, préserve les épimorphismes (Proposition 1 de [3]). On dit que le produit monoïdal $\boxtimes$ *préserve les coégalisateurs réflexifs* si les foncteurs de multiplication L_A et R_A préservent les coégalisateurs réflexifs, pour tout objet A de $\mathcal{A}$. Dans ce cas, le produit monoïdal de deux coégalisateurs réflexifs est le coégalisateur réflexif du produit monoïdal (Lemme 0.17 de [Joh77]). Tout ceci permet de démontrer l'égalité suivante, qui est le noeud gordien de [3],

$$A \boxtimes \big(\underline{(X+Y)} \oplus B\big) \cong A \boxtimes (\underline{X} \oplus B) + A \boxtimes (\underline{Y} \oplus B),$$

vue dans $A \boxtimes B$, où X et Y sont des sous-objets de B.

Pour plus de détails sur les coégalisateurs réflexifs, nous renvoyons le lecteur au livre de P. T. Johnstone [Joh77].

2.3. **Construction générale.** On se place dans une catégorie monoïdale abélienne $(\mathcal{A}, \boxtimes, I)$ qui admet des colimites séquentielles, préservées par le produit monoïdal.

Rappelons que la *catégorie simpliciale* Δ est la catégorie dont les objets sont les ensembles finis ordonnés $[n] = \{0 < 1 < \cdots < n\}$, pour $n \in \mathbb{N}$ et dont les morphismes sont les applications croissantes. La catégorie Δ_{face} est la sous-catégorie de Δ engendrée par les *morphismes de face*

$$\varepsilon_n^i(j) = \begin{cases} j & \text{if} \quad j < i, \\ j+1 & \text{if} \quad j \geq i, \end{cases}$$

de $\mathrm{Hom}_\Delta([n],\,[n+1])$ pour $i=0,\ldots,\,n$.

Soit V un objet de $\mathcal{A}$. On considère les $V_n := (I\oplus V)^{\boxtimes n}$ pour $n\geq 1$ et $V_0 := I$. Ces objets sont munis des applications η_n^i suivantes

$$V_n \cong (I\oplus V)^{\boxtimes i}\boxtimes I\boxtimes (I\oplus V)^{\boxtimes (n-i)} \xrightarrow{V_i\boxtimes\iota_I\boxtimes V_{n-i}} (I\oplus V)^{\boxtimes i}\boxtimes (I\oplus V)\boxtimes (I\oplus V)^{\boxtimes (n-i)} = V_{n+1}\ .$$

Si le produit monoïdal préserve les coproduits de chaque côté, alors la colimite des $\{V_n\}_n$ sur la catégorie Δ_{face} est égale à $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} V^{\boxtimes n}$, ce qui donne les mots en V et le monoïde libre. En général, la colimite $\mathrm{Colim}_{\Delta_{\text{face}}} V_n$ n'est pas préservée par le produit monoïdal. Il faut donc quotienter les V_n avant de passer à la colimite.

Pour tout objet V de $\mathcal{A}$, on pose $\lambda_V\ :\ I\boxtimes V \xrightarrow{\cong} V$ et $\rho_V\ :\ V\boxtimes I \xrightarrow{\cong} V$ les isomorphismes naturels de la catégorie monoïdale $\mathcal{A}$. On considère le morphisme $\tau\ :\ V\to V_2$ défini par la composée suivante

$$V \xrightarrow{\lambda_V^{-1}\oplus\rho_V^{-1}} I\boxtimes V\oplus V\boxtimes I \xrightarrow{\eta\boxtimes\iota_V-\iota_V\boxtimes\eta} (I\oplus V)\boxtimes(I\oplus V) = V_2\ .$$

Pour tous objets A et B de $\mathcal{A}$, on considère l'objet “relation” suivant

$$R_{A,B} := \mathrm{Im}\left(A\boxtimes(\underline{V}\oplus V_2)\boxtimes B \hookrightarrow A\boxtimes(V\oplus V_2)\boxtimes B \xrightarrow{A\boxtimes(\tau+id_{V_2})\boxtimes B} A\boxtimes V_2\boxtimes B\right).$$

On définit l'objet $\widetilde{V}_n$ par

$$\widetilde{V}_n := \mathrm{Conoyau}\left(\bigoplus_{i=0}^{n-2} R_{V_i,\,V_{n-i-2}} \to V_n\right).$$

Les morphismes η_n^i entre V_n et V_{n+1} passent au quotient et induisent des morphismes entre $\widetilde{V}_n$ et $\widetilde{V}_{n+1}$ qui sont tous égaux. On considère l'objet $\mathcal{F}(V) := \mathrm{Colim}_{\mathbb{N}}\,\widetilde{V}_n$ défini par cette colimite séquentielle. Après passage au quotient, la colimite des V_n sur la catégorie Δ_{face} est devenue une colimite séquentielle des $\widetilde{V}_n$ qui est préservée par le produit monoïdal par hypothèse.

On définit l'unité $u\ :\ I\to\mathcal{F}(V)$ par le premier morphisme de la colimite et le produit μ par passage au quotient du morphisme de concaténation $V_n\boxtimes V_m\to V_{n+m}$.

Théorème 1 (Monoïde libre)**.** *Dans une catégorie monoïdale abélienne qui admet des colimites séquentielles et telle que le produit monoïdal préserve les colimites séquentielles et les coégalisateurs réflexifs, le triplet $(\mathcal{F}(V),\,\mu,\,u)$ forme un monoïde, qui est libre en V.*

2.4. **Foncteurs analytiques scindés.** En pratique, pour pouvoir appliquer le théorème précédent, il faut pouvoir montrer que le produit monoïdal préserve les coégalisateurs réflexifs. Pour cela nous introduisons la notion de *foncteur analytique scindé.*

Soit Δ_n le foncteur diagonal $\mathcal{A}\to\mathcal{A}^{\times n}$. Un *foncteur polynômial homogène de degré* n est un foncteur $f_{(n)}\ :\ \mathcal{A}\to\mathcal{A}$ de la forme $f_{(n)} = f_n\circ\Delta_n$, avec f_n un foncteur $\mathcal{A}^{\times n}\to\mathcal{A}$ qui préserve les coproduits en chacune de ses entrées.

Définition (Foncteur analytique scindé)**.** Un *foncteur analytique scindé* est un foncteur $f\ :\ \mathcal{A}\to\mathcal{A}$ de la forme $f=\bigoplus_{n=0}^{\infty} f_{(n)}$ où chaque $f_{(n)}$ est un foncteur polynômial homogène de degré n.

Exemple. Les foncteurs de multiplication G_A et R_A de la catégorie monoïdale ($\mathbb{S}$-bimod, $\boxtimes$, I) des $\mathbb{S}$-bimodules sont des foncteurs analytiques scindés (Lemme 12 de [3]).

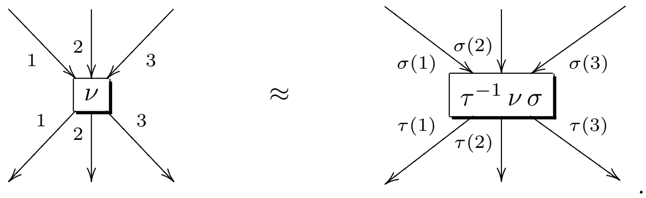
Proposition 2. *Soit $f=\bigoplus_{n=0}^{\infty} f_{(n)}$ un foncteur analytique scindé tel que pour tout $n\in\mathbb{N}$, tout $i\in[n]$ et tout $X_1,\ldots,X_{i-1},X_{i+1},\ldots,X_n\in\mathcal{A}$ le foncteur $X\mapsto f_n(X_1,\ldots,X_{i-1},X,X_{i+1},\ldots,X_n)$ préserve les coégalisateurs réflexifs. Alors f préserve les coégalisateurs réflexifs.*

2.5. **Applications et généralisations.** La proposition précédente s'applique aux foncteurs de multiplication de la catégorie monoïdale des $\mathbb{S}$-bimodules, démontrant que ce produit monoïdal préserve les coégalisateurs réflexifs. On peut donc lui appliquer le Théorème 1, ce qui donne la propérade libre.

Théorème 3. *La propérade libre sur un* $\mathbb{S}$*-bimodule* V *est donnée par*

$$\mathcal{F}(V) = \left(\bigoplus_{g \in \mathcal{G}_c} \bigotimes_{\nu \in \mathcal{S}_g} V(|Sorties(\nu)|, |Entrées(\nu)|) \right) \Big/ \approx \ ,$$

où G_c *est l'ensemble des graphes connexes (sans niveau),* $\mathcal{S}_g$ *l'ensemble des sommets d'un graphe* g*,* $|Sorties(\nu)|$ *le nombre de sorties de* ν*,* $|Entrées(\nu)|$ *le nombre d'entrées de* ν *et où* $\approx$ *est la relation d'équivalence engendrée par*



Le produit de composition est donné par le greffage des graphes.

Le module V_n est ici le module des graphes connexes à n niveaux dont les sommets sont indicés par des éléments de I et de V. Les espaces de relations $R_{V_i, V_{n-i-2}}$ consistent à identifier les sous-graphes de la forme $I^{\otimes m} \otimes \nu \in I \boxtimes V$ et $\nu \otimes I^{\otimes n} \in V \boxtimes I$ pour tout $\nu \in V(m,n)$, c'est-à-dire à oublier les niveaux.

Ce résultat général s'applique à d'autres types de monoïdes proches des propérades, comme les $\frac{1}{2}$-props [MV03], les diopérades [Gan03], les props spéciaux [Mar06a] ou matrons [SU05] ainsi qu'aux $\frac{2}{3}$-props [Sho03].

Comme l'a fait remarquer Steven Lack [Lac08], la construction explicitée ici et l'hypothèse que le produit monoïdal préserve les coégalisateurs réflexifs suffisent à donner le monoïde libre lorsque la catégorie monoïdale n'est pas nécessairement abélienne.

L'article [3] a été appliqué par P.-A. Melliès et N. Tabareau dans [MT08] pour construire des théories algébriques libres sur une pseudo-monade qui apparaissent en logique mathématique et en informatique théorique.

3. Modèles

Dans cette section, nous détaillons les méthodes pour expliciter des modèles de propérades que nous avons mises en point dans $[A, 1, 2, 7, 9]$.

Plaçons nous maintenant sur la catégorie de base des modules différentiels gradués. Nous travaillons alors avec des propérades différentielles graduées et copropérades différentielles graduées, que nous appellerons propérades et copropérades, pour ne pas alourdir la rédaction. Soit $\mathcal{P}$ une propérade et soit S_0 un système de générateurs de $\mathcal{P}$. On a donc un épimorphisme $\mathcal{F}(S_0) \twoheadrightarrow \mathcal{P}$. En général, ce morphisme n'est pas injectif ; son noyau est un idéal engendré par un $\mathbb{S}$-bimodule S_1. On a donc le début d'une suite exacte. En itérant, on peut espérer trouver un $\mathbb{S}$-bimodule $S = S_0 \oplus S_1 \oplus S_2 \oplus \cdots$ et une différentielle sur $\mathcal{F}(S)$ telle que cette propérade soit quasi-isomorphe à $\mathcal{P} : \mathcal{F}(S) \xrightarrow{\sim} \mathcal{P}$. C'est ce que l'on appelle un *modèle de* $\mathcal{P}$. Les S_n sont les *syzygies propéradiques* de $\mathcal{P}$. En effet, ce procédé est similaire à celui donnant des résolutions libre de modules sur une algèbre en géométrie algébrique, cf. [Eis05].

Les papiers $[A, 1, 2, 7, 9]$ offrent un début de réponse au programme suivant : soit une propérade $\mathcal{P}$, peut-on donner un modèle explicite pour $\mathcal{P}$? Il existe un foncteur dans la catégorie des propérades appelé *construction bar-cobar* qui fournit une résolution canonique pour toute $\mathcal{P}$. Ce côté fonctoriel a un coût : la construction bar-cobar est énorme. Des résolutions plus petites dépendent de la forme de $\mathcal{P}$. Lorsque la propérade admet une présentation avec des relations quadratiques, nous utilisons la *dualité de Koszul* des propérades de $[A, 1, 2]$, lorsque ses relations sont de poids 2 et moins, nous utilisons la *dualité de Koszul hétérogène* de [9] et lorsque ses relations sont de poids 2 et plus, nous utilisons la *dualité de Koszul homotopique* de [7].

Trouver des résolutions ou décrire les syzygies est un vieux et difficile problème. Au lieu de travailler par récurrence, les méthodes de dualité de Koszul données ici reposent sur le principe suivant : produire S et la différentielle de $\mathcal{F}(S)$ d'un seul coup comme réponse à un problème algébrique universel. Par exemple, S est une coproperade engendrée par des (co)générateurs de (co)relations. La petite donnée de générateurs et de relations fournit automatiquement toutes les syzygies.

3.1. **Propérades quasi-libres, modèles et modèles minimaux.**

Définition (Propérade quasi-libre)**.** Une *propérade quasi-libre* $(\mathcal{F}(S), d)$ est une propérade différentielle graduée dont le $\mathbb{S}$-bimodule sous-jacent est une propérade libre $\mathcal{F}(S)$.

Une propérade quasi-libre n'est pas nécessairement libre ; la différentielle d n'est en général pas l'extension libre de celle de S.

Définition (Modèle)**.** Soit $\mathcal{P}$ une propérade. Un *modèle* de $\mathcal{P}$ est une propérade quasi-libre $(\mathcal{F}(S),\, d)$ munie d'un quasi-isomorphisme $\mathcal{F}(S) \xrightarrow{\sim} \mathcal{P}$.

Parmi les modèles, il existe une classe particulièrement intéressante, celle des modèles sans différentielle interne. La propérade libre est graduée par le nombre de sommets des graphes qui représentent ses éléments. On note cette graduation $\mathcal{F}(S)^{(n)}$, pour $n \in \mathbb{N}$.

Définition (Différentielle décomposable)**.** La différentielle d'une propérade quasi-libre $(\mathcal{F}(S),\, d)$ est dite *décomposable* si l'image de S par d est composée uniquement d'éléments décomposables, c'est-à-dire $d(S) \subset \bigoplus_{n\geq 2} \mathcal{F}(S)^{(n)}$.

Définition (Modèle minimal)**.** Un modèle $(\mathcal{F}(S),\, d)$ est dit *minimal* si sa différentielle est décomposable.

Les modèles minimaux des algèbres commutatives jouent un rôle important en topologie algébrique car ils permettent de calculer les groupes d'homotopie rationnelle [Sul77, FHT01].

3.2. **Morphismes tordants, résolution bar-cobar.** Dans cette section, on généralise aux propérades les notions de morphismes todants et construction bar et cobar des algèbres associatives [Car55, Bro59, HMS74] et des opérades [GJ94].

Proposition 4. *Pour toute copropérade $\mathcal{C}$ et toute propérade $\mathcal{P}$, le $\mathbb{S}$-bimodule différentiel gradué* $\mathrm{Hom}(\mathcal{C}, \mathcal{P})$ *est une propérade. Cette construction est naturelle en $\mathcal{C}$ et en $\mathcal{P}$.*

La différentielle ∂ sur $\mathrm{Hom}(\mathcal{C}, \mathcal{P})$ est définie par $\partial(f) := d_{\mathcal{P}} \circ f - (-1)^{|f|} f \circ d_{\mathcal{C}}$. On appelle ce type de propérades, une *propérade de convolution.* Dans le cas où $\mathcal{C} = C$ est une cogèbre coassociative et $\mathcal{P} = A$ une algèbre associative, on retrouve que $\mathrm{Hom}(C, A)$ est une algèbre associative. Dans le cas où $\mathcal{C}$ est une coopérade et $\mathcal{P}$ une opérade, ce résultat a été démontré dans [BM03].

Proposition 5. *Soit $\mathcal{P}$ une propérade, la somme directe de ses composantes $\bigoplus_{m,n} \mathcal{P}(m, n)$ est munie d'une structure naturelle d'algèbre de Lie différentielle graduée. Cette structure se restreint au sous-module des invariants pour l'action des groupes symétriques.*

Ce théorème généralise celui de [KM01] pour les opérades.

Corollaire 6. *Pour toute copropérade $\mathcal{C}$ et toute propérade $\mathcal{P}$, la somme directe des morphismes équivariants* $\mathrm{Hom}_{\mathbb{S}}(\mathcal{C}, \mathcal{P}) := \bigoplus_{m,n} \mathrm{Hom}_{\mathbb{S}}(\mathcal{C}(m, n), \mathcal{P}(m, n))$ *est une algèbre de Lie différentielle graduée. De plus, cette construction est naturelle en $\mathcal{C}$ et $\mathcal{P}$.*

On peut donc considérer *l'équation de Maurer-Cartan* $\partial(\alpha) + \frac{1}{2}[\alpha, \alpha]$ dans cette algèbre de Lie de convolution. Supposons $\mathcal{P}$ *augmentée* (respectivement $\mathcal{C}$ *coaugmentée*), c'est-à-dire munie d'un morphisme de propérades $\mathcal{P} \to I$ (respectivement un morphisme de copropérades $I \to \mathcal{C}$). À partir de maintenant, nous supposerons toutes les propérades augmentées et les copropérades coaugmentées. Dans ce cas, on appelle *morphisme tordant* toute solution de degré -1 de l'équation de Maurer-Cartan qui s'annule si on la compose avec l'augmentation de $\mathcal{P}$ ou avec la coaugmentation de $\mathcal{C}$. L'ensemble de morphismes tordants est noté $\mathrm{Tw}(\mathcal{C}, \mathcal{P})$.

Tout morphisme tordant $\alpha \in \mathrm{Tw}(\mathcal{C}, \mathcal{P})$ induit une différentielle d_α de carré nul sur $\mathcal{C} \boxtimes \mathcal{P}$. Ce complexe de chaînes est appelé le *produit de composition tordu* et il est noté $\mathcal{C} \boxtimes_\alpha \mathcal{P}$. On définit de la même manière un produit de composition tordu à droite $\mathcal{P} \boxtimes_\alpha \mathcal{C}$.

Théorème 7 (Lemme de comparaison des produits de composition tordus)**.** *Soient $g : \mathcal{P} \to \mathcal{P}'$ un morphisme de propérades graduées par un poids et $f : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ un morphisme de copropérades graduées par un poids. Soient $\alpha : \mathcal{C} \to \mathcal{P}$ et $\alpha' : \mathcal{C}' \to \mathcal{P}'$ deux morphismes tordants compatibles avec f et g : $\alpha' \circ f = g \circ \alpha$.*
Si deux des morphismes parmi f, g et $f \boxtimes g : \mathcal{C} \boxtimes_\alpha \mathcal{P} \to \mathcal{C}' \boxtimes_{\alpha'} \mathcal{P}'$ sont des quasi-isomorphismes, alors le troisième l'est aussi.

La copropérade colibre $\mathcal{F}^c(V)$ est réalisée à nouveau par les graphes connexes et le coproduit de décomposition est donné dualement par les découpages des graphes en deux niveaux. À toute propérade augmentée $\mathcal{P}$, on associe la copropérade $\mathcal{F}^c(s\bar{\mathcal{P}})$, où s est la suspension homologique et $\bar{\mathcal{P}}$ l'idéal d'augmentation. Il existe une unique codérivation d_2 qui étend le produit partiel de deux éléments de la propérade $\mathcal{P}$. La différentielle interne de $\mathcal{P}$ induit une unique codérivation d_1 sur $\mathcal{F}^c(s\bar{\mathcal{P}})$. La copropérade ainsi obtenue est appelée la *construction bar de* $\mathcal{P}$ et est notée $B\mathcal{P} := (\mathcal{F}^c(s\bar{\mathcal{P}}), d_1 + d_2)$. La construction cobar $\Omega\mathcal{C}$ d'une copropérade coaugmentée se définit de manière duale sur $\mathcal{F}(s^{-1}\bar{\mathcal{C}})$. Ces deux constructions permettent de représenter le bifoncteur Tw.

Théorème 8. *Pour tout propérade augmentée $\mathcal{P}$ et toute copropérade conilpotente $\mathcal{C}$, on a les bijections naturelles suivantes*

$$\mathrm{Hom}_{dg\ prop.}(\Omega\mathcal{C}, \mathcal{P}) \cong \mathrm{Tw}(\mathcal{C}, \mathcal{P}) \cong \mathrm{Hom}_{dg\ coprop.}(\mathcal{C}, B\mathcal{P}).$$

Ce théorème implique l'existence de deux *morphismes tordants universels* $\pi : B\mathcal{P} \to \mathcal{P}$ et $\iota : \mathcal{C} \to \Omega\mathcal{C}$ associés respectivement à la counité et à l'unité d'adjonction. Tout morphisme tordant α se factorise par eux

$$\begin{tikzcd}
& \Omega\mathcal{C} \arrow[dr, dashed, "g_\alpha"] & \\
\mathcal{C} \arrow[ur, "\iota"] \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, dashed, "f_\alpha"'] & & \mathcal{P} \\
& B\mathcal{P}, \arrow[ur, "\pi"'] &
\end{tikzcd}$$

avec g_α morphismes de propérades et f_α morphismes de copropérades.

Proposition 9. *Les produits de composition tordus $B\mathcal{P} \boxtimes_\pi \mathcal{P}$, $\mathcal{P} \boxtimes_\pi B\mathcal{P}$, $\mathcal{C} \boxtimes_\iota \Omega\mathcal{C}$ et $\Omega\mathcal{C} \boxtimes_\iota \mathcal{C}$ sont acycliques.*

Un morphisme tordant α dont le produit de composition tordu $\mathcal{C} \boxtimes_\alpha \mathcal{P}$ est acyclique est appelé un *morphisme de Koszul.*

Théorème 10 (Théorème fondamental des morphismes de Koszul)**.** *Soient $\mathcal{P}$ une propérade connexe graduée par un poids et $\mathcal{C}$ une copropérade connexe graduée par un poids. Pour tout morphisme tordant $\alpha : \mathcal{C} \to \mathcal{P}$, les propositions suivantes sont équivalentes.*

(1) *Le produit de composition tordu à gauche $\mathcal{C} \boxtimes_\alpha \mathcal{P}$ est acyclique.*

(2) *Le produit de composition tordu à droite $\mathcal{P} \boxtimes_\alpha \mathcal{C}$ est acyclique.*

(3) *le morphisme de copropérades* $f_\alpha : \mathcal{C} \xrightarrow{\sim} B\mathcal{P}$ *est un quasi-isomorphisme.*

(4) *le morphisme de propérades* $g_\alpha : \Omega\mathcal{C} \xrightarrow{\sim} \mathcal{P}$ *est un quasi-isomorphisme.*

Ce théorème est une conséquence directe du lemme de comparaison (Théorème 7) et de la proposition 9 en considérant par exemple $f_\alpha \boxtimes \mathrm{Id}_\mathcal{P} : \mathcal{C} \boxtimes_\alpha \mathcal{P} \to B\mathcal{P} \boxtimes_\pi \mathcal{P}$ pour montrer (1) $\Leftrightarrow$ (3).

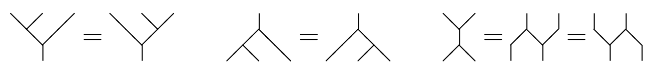
Comme corollaire, on obtient que la counité d'adjonction est un quasi-isomorphisme.

Théorème 11. *La counité d'adjonction* $\Omega B\mathcal{P} \to \mathcal{P}$ *est un quasi-isomorphisme.*

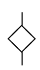
Ce résultat fournit un modèle canonique pour toute propérade. Par contre, cette construction est assez grosse ; il faut considérer les graphes de graphes d'éléments de $\mathcal{P}$. Dans certains cas particuliers, on peut simplifier cette résolution. C'est l'objet de la prochaine section.

3.3. **Dualité de Koszul.** On appelle *donnée quadratique* tout paire (V, R) où V est un $\mathbb{S}$-bimodule et R un sous-$\mathbb{S}$-bimodule de $\mathcal{F}(V)^{(2)}$, partie de poids 2 de la propérade libre composée des graphes à 2 sommets. À partir d'une donnée quadratique, on peut associer une *propérade quadratique* $\mathcal{P}(V, R) := \mathcal{F}(V)/(R)$ définie par le quotient de la propérade libre sur V par l'idéal engendré par R. Dualement, on définit une *copropérade quadratique* $\mathcal{C}(V, R)$ comme une sous-copropérade de la copropérade colibre $\mathcal{F}^c(V)$. (Pour une étude détaillée des idéaux et des coidéaux dans les monoïdes et comonoïdes, on renvoie le lecteur à l'appendice B de [6].)

Exemples.
- L'algèbre symétrique $S(V)$ et l'algèbre extérieure $\Lambda(V)$ sont des algèbres quadratiques.
- L'opérade non-symétrique As est quadratique. Elle est engendrée par une opération binaire V et est soumise à la relation d'associativité R qui s'écrit avec des arbres à deux sommets, cf. [GK94]. De même, l'opérade Com est une opérade quadratique. Il existe d'autres opérades quadratiques : l'opérade Lie qui code les algèbres de Lie, l'opérade G qui code les algèbres de Gerstenhaber, l'opérade PreLie qui code les algèbres preLie, cf. [Ger63] pour les définitions.
- La propérade Frob est quadratique. Elle est engendrée par un produit binaire commutatif et un coproduit binaire cocommutatif V qui sont respectivement associatifs et coassociatifs et dont le coproduit est un morphisme de modules avec la structure donnée par le produit :

R : 

- La propérade $\mathrm{Frob}_\diamond$ est quadratique. Elle admet la même présentation que Frob avec le terme supplémentaire suivant dans le module des relations

 $= 0$

- Il existe d'autres propérades quadratiques, citons le propérade BiLie des bigèbres de Lie [Dri87], le propérade $\mathrm{BiLie}_\diamond$ des bigèbres de Lie à involution [CS99, Cha04], la propérade InfBi des bigèbres de Hopf infinitésimales [Agu00]. D'autres exemples intéressants ont été introduits par J.-L. Loday [Lod08] pour démontrer des théorèmes de Cartier-Milnor-Moore généralisés.

Définition (Duale de Koszul)**.** Soit une (V, R) une donnée quadratique. On appelle *duale de Koszul* de $\mathcal{P}(V, R)$ la copropérade $\mathcal{P}^{\text{¡}} := \mathcal{C}(sV, s^2R)$.

La copropérade $\mathcal{P}^{\text{¡}}$ est la sous-copropérade de $B\mathcal{P}$ donnée par les groupes d'homologie des dimension maximale. Comme le calcul d'une copropérade engendrée par des (co)générateurs et des (co)relations est un exercice difficile, on la dualise linéairement et on la désuspend, ce qui donne une propérade. On appelle cette dernière la *propérade duale de Koszul* de $\mathcal{P}$ et on la note $\mathcal{P}^!$. Lorsque V est de dimension finie, elle est donnée par la formule $\mathcal{P}^! = \mathcal{P}(V^\vee, R^\perp)$, où $V^\vee$ est le dual linéaire de V tordu par la représentation signature du groupe symétrique. Dans ce cas, on a la relation de dualité $(\mathcal{P}^!)^! \cong \mathcal{P}$.

Exemples.
- La duale de Koszul de $S(V)$ est $S(V)^! = \Lambda(V^*)$.

- L'opérade As est auto-duale, $\mathrm{As}^! \cong \mathrm{As}$. La duale de Koszul de Com est Lie, et vice-versa. Ce résultat explique rétrospectivement la nature des foncteurs apparaissant en homotopie rationnelle, cf. [Qui69, Sul77, GK94]. L'opérade G des algèbres de Gerstenhaber est autoduale, $\mathrm{G}^! \cong \mathrm{G}$, cf. [GJ94].
- Les propérades Frob et $\mathrm{BiLie}_\diamond$ sont duales de Koszul, l'une de l'autre. Les propérades $\mathrm{Frob}_\diamond$ et BiLie sont duales de Koszul, l'une de l'autre.

Il existe un morphisme tordant $\kappa : \mathcal{P}^{¡} \to \mathcal{P}$. Le produit de composition tordu associé $\mathcal{P}^{¡} \boxtimes_\kappa \mathcal{P}$ est appelé le *complexe de Koszul*. Le théorème 10 fournit ici le critère suivant.

Théorème 12 (Critère de Koszul)**.** *Soit (V, R) une donnée quadratique. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

(1) *le complexe de Koszul à gauche $\mathcal{P}^{¡} \boxtimes_\kappa \mathcal{P}$ est acyclique,*
(2) *le complexe de Koszul à droite $\mathcal{P} \boxtimes_\kappa \mathcal{P}^{¡}$ est acyclique,*
(3) *l'inclusion $\mathcal{P}^{¡} \to B\mathcal{P}$ est un quasi-isomorphisme,*
(4) *la projection $\Omega\mathcal{P}^{¡} \to \mathcal{P}$ est un quasi-isomorphisme.*

Lorsque c'est le cas, on dit que la propérade $\mathcal{P}$ est une *propérade de Koszul*. Toutes les propérades quadratiques données précédemment sont de Koszul, sauf Frob et $\mathrm{BiLie}_\diamond$ pour lesquelles aucune démontration n'a été donnée à ce jour. Le complexe de Koszul donne donc un moyen pratique pour tester si la construction cobar fournit un modèle minimal de $\mathcal{P}$. Le gain par rapport à la résolution bar-cobar est substantielle ; on utilise l'homologie $\mathcal{P}^{¡}$ de la construction bar, à la place d'elle-même.

Même si on ne sait toujours pas si les propérade Frob et $\mathrm{BiLie}_\diamond$ sont de Koszul, la propérade $\Omega\mathrm{Frob}_\diamond^{¡}$ a déjà trouvé des applications en topologie des cordes, théorie des champs symplectiques et en théorie de Floer, cf. [DCTT08, CFL08].

3.4. **Dualité de Koszul hétérogène.** La méthode de la section précédente ne s'applique que lorsque la propérade est quadratique. Nous raffinons ici la dualité de Koszul pour traiter les cas de propérades qui admettent des relations de poids 1 et 2 : $R \subset V \oplus F(V)^{(2)}$. De telles propérades sont appelées des *propérades quadratiques hétérogènes.*

Exemples.
- L'algèbre de Steenrod et l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie sont des algèbres quadratiques hétérogènes, cf. [Pri70] et [Kos49].
- L'opérade BV qui code les algèbres de Batalin-Vilkovisky est une opérade quadratique hétérogène. (On renvoie à la section 7.1 pour la définition d'une algèbre de Batalin-Vilkovisky.)

Déjà dans le papier originel sur la dualité de Koszul [Pri70], S. Priddy avait démontré la dualité de Koszul hétérogène. Son but était justement de traiter ces deux premiers exemples. Nous avons généraliser cette théorie aux propérades dans [9] dans le but de traiter l'exemple des algèbres de Batalin-Vilkovisky.

Soit $\mathcal{P} = \mathcal{F}(V)/(R)$ une propérade quadratique hétérogène et soit la projection $\mathrm{q} : \mathcal{F}(V) \twoheadrightarrow \mathcal{F}(V)^{(2)}$. On considère l'image de R par q, que l'on note $\mathrm{q}R$. Elle contient la partie quadratique des relations de $\mathcal{P}$. On définit la propérade quadratique $\mathrm{q}\mathcal{P} := \mathcal{F}(V)/(\mathrm{q}R)$. Nous supposons que $R \cap V = \{0\}$. Dans le cas contraire, il suffit de réduire le module des générateurs V. Sous cette hypothèse, il existe un morphisme de $\mathbb{S}$-bimodules $\varphi : \mathrm{q}R \to V$ tel que R s'écrive comme le graphe de φ :

$$R = \{X - \varphi(X),\ X \in \mathrm{q}R\}.$$

On note abusivement $R \otimes V$ (respectivement $V \otimes R$) le sous-$\mathbb{S}$-bimodule de $\mathcal{F}(V)^{(2)} \oplus \mathcal{F}(V)^{(3)}$ obtenu en greffant un élément de V au-dessus d'un élément de R de toutes les manières possibles (respectivement en-dessous).

Lemme 13. *Lorsque $(R \otimes V + V \otimes R) \cap \mathcal{F}(V)^{(2)} \subset R \cap \mathcal{F}(V)^{(2)}$, le morphisme φ induit une codérivation d_φ de carré nul sur $\mathrm{q}\mathcal{P}^{¡}$.*

Définition (Copropérade duale de Koszul)**.** Sous la condition du lemme 13, on appelle *copropérade duale de Koszul de* $\mathcal{P}$ la copropérade différentielle graduée $\mathcal{P}^{¡} := (\mathrm{q}\mathcal{P}^{¡}, d_\varphi)$.

On a maintenant tous les outils en main pour généraliser les résultats de la section précédente au cas hétérogène.

Définition (Propérade de Koszul)**.** Une propérade $\mathcal{P}$ est appelé une *propérade de Koszul* si elle admet une présentation quadratique hétérogène $\mathcal{P} = \mathcal{F}(V)/(R)$ avec $R \subset V \oplus F(V)^{(2)}$ et telle que

(1) $R \cap V = \{0\}$,

(2) $(R \otimes V + V \otimes R) \cap \mathcal{F}(V)^{(2)} \subset R \cap \mathcal{F}(V)^{(2)}$,

(3) la propérade quadratique $\mathrm{q}\mathcal{P} := \mathcal{F}(V)/(\mathrm{q}R)$ est de Koszul dans le sens du théorème 12.

La condition (1) porte sur la minimalité du module des générateurs. La condition (2) exprime la maximalité du module des relations. Les trois exemples précédents sont des propérades de Koszul. Dans le cas de l'opérade des algèbres de Batalin-Vilkovosky, il faut prendre la présentation donnée en 7. La relation de dérivation de l'opérateur Δ par rapport au crochet de Lie $\langle\ ,\ \rangle$ est une conséquence des autres relations. Si on l'omettait, la condition (2) ne serait plus satisfaite. Cette définition inclut le cas quadratique, pour lequel $d_\varphi = 0$.

Théorème 14. *Soit $\mathcal{P}$ une propérade de Koszul. La construction cobar de sa copropérade duale de Koszul est une résolution de $\mathcal{P}$: $\Omega\mathcal{P}^{¡} \xrightarrow{\sim} \mathcal{P}$.*

Ce théorème fournit des résolutions plus petites que la construction bar-cobar mais pas un modèle minimal à cause de la différentielle interne d_φ. On renvoie à la section 7 pour des applications de la résolution $\Omega\mathrm{BV}^{¡} \xrightarrow{\sim} \mathrm{BV}$.

La démonstration se fait par un argument de suite spectrale convergente. Les objets suivants apparaissent dans cette démonstration. La graduation naturelle de la propérade libre $\mathcal{F}(V)$ donnée par le nombre de générateurs induit la filtration suivante sur $\mathcal{P}$:

$$F_n := \{\pi(\bigoplus_{k\leq n} \mathcal{F}(V)^{(k)})\},$$

où π est la projection canonique $\mathcal{F}(V) \twoheadrightarrow \mathcal{P}$. On note la propérade graduée associée par $gr\mathcal{P}$. Comme les relations qR sont vérifiées dans $gr\mathcal{P}$, il existe un morphisme de propérades graduées

$$p\ :\ \mathrm{q}\mathcal{P} \twoheadrightarrow gr\mathcal{P}.$$

Théorème 15 (Théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt pour la propérade $\mathcal{P}$)**.** *Lorsque $\mathcal{P}$ est une propérade de Koszul, le morphisme $p\ :\ \mathrm{q}\mathcal{P} \to gr\mathcal{P}$ est un isomorphisme de propérades. Les trois $\mathbb{S}$-bimodules suivants sont isomorphes $\mathcal{P} \cong gr\mathcal{P} \cong \mathrm{q}\mathcal{P}$.*

Dans le cas de l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie, cela donne une nouvelle démonstration du théorème classique de Poincaré-Birkhoff-Witt, cf. A. Polischuk et L. Positselski [PP05]. Dans le cas de l'opérade BV, cela donne une autre démonstration du fait que l'algèbre de Batalin-Vilkovisky libre sur X a pour module sous-jacent $\mathrm{BV}(X) \cong \mathrm{Com} \circ \mathrm{Lie}^1(X \oplus \Delta(X))$, où Lie^1 est l'opérade qui code les algèbres de Lie avec un crochet de degré 1, cf. E. Getzler [Get94] et [9].

Pour définir une propérade de Koszul, on peut utiliser la condition $(2')$: $R = ((V \oplus \mathcal{F}(V)^{(2)}) \cap (R))$, qui est équivalente à la condition (2). C'est encore une condition de maximalité sur la présentation des relations. Elle est difficile à montrer en pratique, on peut donc voir ce resultat comme une conséquence intéressante des propérades de Koszul.

3.5. **Propérade à homotopie près et copropérades à homotopie près.** Toute dérivation d sur la propérade libre $\mathcal{F}(s^{-1}\mathcal{C})$ est caractérisée par l'image de ses générateurs $\delta\ :\ s^{-1}\mathcal{C} \to \mathcal{F}(s^{-1}\mathcal{C})$. Posons δ_n la projection de celle-ci sur $\mathcal{F}(s^{-1}\mathcal{C})^{(n)}$, qui consiste à décomposer les éléments de $\mathcal{C}$ en n. Lorsque $\mathcal{C}$ est une copropérade, la donnée d'un coproduit de décomposition sur un $\mathbb{S}$-bimodule $\mathcal{C}$ est équivalente à la donnée d'une dérivation d de carré nul sur $\mathcal{F}(s^{-1}\mathcal{C})$ telle que seul δ_2 soit non nul. Il y a là une équivalence entre la dérivation d'une propérade quasi-libre et la structure algébrique sur ses générateurs. Nous allons généraliser ce résultat à tout modèle, c'est-à-dire lorsqu'il n'y a aucune restriction sur les δ_n.

Une algèbre associative est un module muni d'un produit binaire vérifiant la relation stricte d'associativité. J. Stasheff a donné dans [Sta63] une notion plus faible, celle d'*algèbre associative à homotopie près* ou A_∞*-algèbre*. Une A_∞-algèbre est un module différentiel gradué (A, d_A) muni d'opérations $\mu_n : A^{\otimes n} \to A$ de degré $n-2$, pour tout $n \geq 2$, telles que μ_3 soit une homotopie pour la relation d'associativité de μ_2, et ainsi de suite. Une structure de A_∞-algèbre est équivalente à la donnée d'une codérivation de carré nul sur la cogèbre colibre $T^c(sA)$. P. Van der Laan a généralisé cette notion en définissant celle d'*opérade à homotopie près* [VdL02, VdL03] et J. Granåker est allé encore plus loin [Gra07] avec celle de *propérade à homotopie près* : une propérade à homotopie près est un $\mathbb{S}$-bimodule $\mathcal{P}$ telle que la copropérade colibre $\mathcal{F}^c(s\mathcal{P})$ soit munie d'une codérivation de carré nul. Une telle codérivation est caractérisée par son image sur le module des générateurs $\mathcal{F}^c(s\mathcal{P}) \to s\mathcal{P}$. On obtient alors la définition équivalente suivante.

Proposition 16 (Propérade à homotopie près)**.** *Une propérade à homotopie près est un* $\mathbb{S}$*-bimodule différentiel gradué* $(\mathcal{P}, d_\mathcal{P})$ *muni d'opérations* $\mu_n : \mathcal{F}^c(\mathcal{P})^{(n)} \to \mathcal{P}$ *de degré* $n-2$*, vérifiant une certaine relation quadratique (Proposition* 22 *de* [7]*).*

Une propérade à homotopie près possède donc des opérations qui "composent" tout graphe dont les sommets dont incidés par des éléments de $\mathcal{P}$. Pour tout graphe, la somme de toutes les possibilités de composer un sous-graphe puis le graphe restant doit être nulle. Une propérade est une propérade à homotopie près où tous les μ_n sont nuls pour $n \geq 3$.

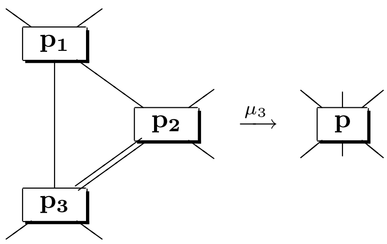


FIGURE 4. Exemple de composition dans une propérade à homotopie près

Par extension, on appelle la première définition de propérade à homotopie près, la *construction bar* $B\mathcal{P} := \mathcal{F}^c(s\mathcal{P})$ de $\mathcal{P}$. Un morphisme entre propérades à homotopie près est la donnée d'un morphisme de copropérades différentielles graduées $(\mathcal{F}^c(s\mathcal{P}_1), d_1) \to (\mathcal{F}^c(s\mathcal{P}_2), d_2)$.

Dualement, nous avons introduit la notion de *copropérade à homotopie près.*

Définition (Copropérade à homotopie près)**.** Une *copropérade à homotopie près* est un $\mathbb{S}$-bimodule $\mathcal{C}$ telle que la propérade libre $\mathcal{F}(s^{-1}\mathcal{C})$ soit munie d'une dérivation de carré nul.

Proposition 17 (Copropérade à homotopie près)**.** *Une copropérade à homotopie près est un* $\mathbb{S}$*-bimodule différentiel gradué* $(\mathcal{C}, d_\mathcal{C})$ *muni de coopérations* $\delta_n : \mathcal{C} \to \mathcal{F}(\mathcal{C})^{(n)}$ *de degré* $n-2$*, vérifiant une certaine relation quadratique (Proposition* 23 *de* [7]*).*

La coopération δ_n décompose tout élément de $\mathcal{C}$ en n éléments indiçant un graphe connexe. La somme sur toute les possibilités d'appliquer un δ_n puis un δ_k à tout sommet du résultat doit être nulle. La première définition de copropérade à homotopie près est appelée *construction cobar* de $\mathcal{C}$ et notée $\Omega\mathcal{C}$. Un morphisme entre copropérades à homotopie près est la donnée d'un morphisme de propérades différentielles graduées $(\mathcal{F}(s^{-1}\mathcal{C}_1), d_1) \to (\mathcal{F}(s^{-1}\mathcal{C}_2), d_2)$.

Pour toute A_∞-algèbre A, son homologie $H(A)$ a une structure naturelle d'algèbre associative. Reconstruire le type d'homotopie de A à partir de cette seule structure est impossible. Pour cela, il faut transférer à $H(A)$ toute une structure d'A_∞-algèbre, c'est ce que l'on appelle le *théorème de transfert* ou *lemme de perturbation homologique* [Kad82, GS86, Mer99, KS00]. Dans le cas de l'algèbre des cochaînes d'un espace topologique, ce procédé donne les produits de Massey de la cohomologie singulière. Ce théorème a été étendu aux propérades par J. Granåker dans [Gra07].

Proposition 18. *Soit $\mathcal{C}$ une copropérade à homotopie près conilpotente, il existe une structure de copropérade à homotopie près sur l'homologie $H(\mathcal{C})$ faiblement équivalente à celle de $\mathcal{C}$ et qui étende sa structure de copropérade.*

Tout comme dans le cas des A_∞-algèbres [KS00], la formule de la structure transférée est ici donnée par des sommes d'arbres. Dans la section suivante, on explicite les modèles minimaux grâce à cette proposition.

3.6. **Koszul homotopique.** Dans les sections précédentes, nous avons donné des méthodes pour expliciter des modèles de propérades dont les relations sont concentrées en poids inférieur à 2 ; ici nous traitons le cas où les relations sont concentrées en poids supérieur à 2.

Théorème 19. *Soit $\mathcal{P}$ une propérade augmentée concentrée en degrés positifs et soit $(\mathcal{F}(S),\, d)$ un modèle minimal de $\mathcal{P}$. La suspension du $\mathbb{S}$-bimodule S est isomorphe à l'homologie de la construction bar de $\mathcal{P}$.*

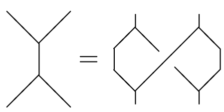
Réciproquement, la construction bar-cobar fournit toujours une résolution de $\mathcal{P} : \Omega B\mathcal{P} \xrightarrow{\sim} \mathcal{P}$. On transfère la structure de copropérade de la construction bar à son homologie par la proposition 18. Comme cette dernière est faiblement équivalente à la première, on conserve un quasi-isomorphisme vers $\mathcal{P}$, d'où le modèle minimal. On le fait concrètement de la manière suivante.

Définition. Soit $\mathcal{P} = \mathcal{F}(V)/(R)$ une propérade dont les relations satisfont $R \subset \oplus_{n\geq 2}\mathcal{F}(V)^{(n)}$. La propérade $\mathcal{P}$ est appelé une *propérade de Koszul homotopique* si

(1) il existe une graduation supplémentaire $\mathcal{P} = \oplus_\lambda \mathcal{P}(\lambda)$ telle que chaque $\mathcal{P}(\lambda)$ soit un $\mathbb{S}$-bimodule de dimension finie.
(2) les propérades $\mathcal{P}$ et $\mathrm{q}\mathcal{P} = \mathcal{F}(V)/(\mathrm{q}R)$ sont isomorphes comme $\mathbb{S}$-bimodules,
(3) la propérade quadratique $\mathrm{q}\mathcal{P} = \mathcal{F}(V)/(\mathrm{q}R)$ est de Koszul.

En pratique les conditions $(1) - (3)$ ne sont pas difficiles à vérifier, comme le prouvent les exemples suivants.

Exemples.
- La propérade BiAs des bigèbres associatives est une propérade de Koszul homotopique (Proposition 41 de [7]). Le produit est associatif, le coproduit coassociatif mais la relation de compatibilité



  est de poids 2 et 4.
- Soit $\mathcal{P}$ une opérade de Koszul. L'opérade colorée $\mathcal{P}_{\bullet\to\bullet}$ qui code deux $\mathcal{P}$-algèbres et un morphisme entre les deux est une opérade de Koszul homotopique.

Théorème 20. *Une propérade de Koszul homotopique $\mathcal{P}$ admet un modèle minimal de la forme $(\mathcal{F}(s\overline{\mathrm{q}\mathcal{P}^{\mathrm{i}}}), d)$.*

Dans ce cas, on montre que l'homologie de la bar construction est égale à $\mathrm{q}\mathcal{P}^{\mathrm{i}}$ et on applique la proposition 18. Dans le cas des propérades Bias et $\mathcal{P}_{\bullet\to\bullet}$, ceci explique conceptuellement la forme des modèles minimaux proposés par M. Markl dans [Mar06a] et [Mar06b].

Remarquons que nous avons vu apparaître "le principe d'incertitude d'Heisenberg" suivant : il est en général très difficile d'avoir un modèle où le module des syzygies S et la différentielle d soient tous les deux simples en même temps. Il n'y a que dans le cas très particulier de la dualité de Koszul quadratique où ce soit le cas : S est alors égal à l'homologie de la bar construction de $\mathcal{P}$ et d vient de la structure de copropérade de $H(B\mathcal{P})$. Ce cas correspond au cas où la bar construction de $\mathcal{P}$ est formelle.

4. Théorie de déformation des morphismes de propérades

Dans les papiers [7] et [8], écrits en collaboration avec Sergeï Alexeevich Merkulov, nous avons développé la théorie de déformation des morphismes de propérades.

La théorie de déformation des morphismes entre algèbres commutatives à été étudiée par D. Quillen dans [Qui70], voir aussi [And67]. Elle a été étendue aux topos et aux schémas par L. Illusie [Ill71, Ill72] en géométrie algébrique. Cette théorie requiert l'introduction de la notion de *catégorie de modèles* pour faire de l'homotopie dans un cadre abstrait. Chez Quillen, le complexe de déformation d'un morphisme d'algèbres commutatives est un foncteur dérivé mais depuis une catégorie non-abélienne, d'où les catégories de modèles. Comme une structure de gèbre sur une propérade est un morphisme de propérades, nous avons défini et étudié la théorie de déformation des morphismes des propérades. Ceci fournit la définition de la cohomologie des gèbres et des gèbres à homotopie près sur une propérade. Une algèbre commutative étant une algèbre associative, qui est une opérade, qui est une propérade, cette démarche est une généralisation stricte de la théorie de Quillen à un cadre non-commutatif et non-linéaire.

Nous commençons donc par munir la catégorie des propérades différentielles graduées d'une structure de catégorie de modèles. Nous donnons la définition de *$\mathcal{P}$-gèbre à homotopie près*, que nous explicitons grâce aux résolutions de la section 3. Comme ces résolutions sont quasi-libres, nous interprétons ces structures comme des solutions de l'équation de Maurer-Cartan généralisée dans une L_∞-algèbre. Nous définissons ensuite abstraitement le *complexe de déformation d'un morphisme de propérades*, grâce aux notions de *bimodules infinitésimals sur une propérade* et *de module de Kähler des formes différentielles* qui représente les dérivations. Comme ce complexe est défini par un foncteur dérivé, nous utilisons les modèles de la section précédente pour le réaliser. Et comme nous utilisons la même résolution que celle qui définit la notion de $\mathcal{P}$-gèbre à homotopie près, nous obtenons que ce complexe de chaînes est l'algèbre L_∞ tordue par la solution de Maurer-Cartan généralisée correspondant à la structure de $\mathcal{P}$-gèbre à homotopie près de départ. Les éléments de Maurer-Cartan généralisés dans cette nouvelle algèbre L_∞ sont en bijection avec les déformations possibles du morphisme de départ. Dans le cas Koszul, on trouve une algèbre de Lie stricte, c'est le *crochet intrinsèque* de [Sta93]. Dans le cas de la dualité de Koszul homotopique de l'opérade colorée qui code les morphismes de $\mathcal{P}$-algèbres, cela donne une interprétation des morphismes homotopiques comme élément de Maurer-Cartan d'une L_∞-algèbre. Dans le cas de la propérade des bigèbres, on démontre que le complexe de déformation réalisé par ce modèle minimal est isomorphe au complexe total du bicomplexe de Gerstenhaber-Schack [GS90]. Ceci prouve que ce complexe est muni d'une structure L_∞ qui contrôle les déformations des bigèbres.

4.1. **Catégorie de modèles.** La notion de catégorie de modèles a été introduite par D. Quillen dans [Qui67]. Elle décrit un cadre abstrait pour faire de la théorie de l'homotopie. Une catégorie de modèles est une catégorie munie de trois classes de morphismes : les équivalences faibles, les fibrations et les cofibrations. Pour les axiomes que ces trois classes doivent vérifier et pour plus de détails, nous renvoyons à [DS95, Hov99, GS07]. Le but de cette notion est de décrire la catégorie homotopique obtenue en inversant formellement les équivalences faibles grâce aux informations supplémentaires données par les fibrations et les cofibrations. On travaille ici sur un corps de caractéristique 0.

Théorème 21. *La catégorie des propérades différentielles graduées forme une catégorie de modèles cofibrement engendrée avec pour équivalences faibles, les quasi-isomorphismes, pour fibrations, les épimorphismes et pour cofibrations, les morphismes vérifiant la propriété de relèvement à gauche par rapport aux fibrations acycliques.*

Comme la catégorie des $\mathbb{S}$-bimodules différentiels gradués est cofibrement engendrée, la démonstration se fait via le foncteur $\mathcal{F}$ de propérade libre et le théorème de transfert (section II.4 de [Qui67], Theorem 3.3 de [Cra95] et Proposition 2.1.19 de [Hov99] Proposition 2.1.19).

Les propérades cofibrantes sont les retracts des propérades quasi-libres *triangulées*, c'est-à-dire avec une condition de filtration sur les générateurs, voir théorème 22 ci-dessous, comme en homotopie rationnelle [Sul77], voir aussi [Sul08]. Donc les propérades quasi-libres triangulées sont cofibrantes (Corollaire 40 de [8]). Réciproquement, nous avons le résultat suivant.

Théorème 22. *Toute propérade différentielle graduée admet un remplacement cofibrant de la forme $\mathcal{F}(S)$ où les composantes de S sont des $\mathbb{S}$-bimodules libres, munis d'une filtration exhaustive*

$$S_0 = \{0\} \subset S_1 \subset S_2 \subset \cdots \subset \mathrm{Colim}_i S_i = S$$

telle que $d\,:\,S_i \to \mathcal{F}(S_{i-1})$ et telle que les $S_{i-1} \rightarrowtail S_i$ soient des monomorphismes scindés avec des $\mathbb{S}$-bimodules libres pour conoyaux.

Deux remplacements cofibrants de la même propérade sont quasi-isomorphes.

4.2. **$\mathcal{P}$-gèbres à homotopie près.** Soit $\mathcal{P}$ une propérade. On peut définir la notion de *$\mathcal{P}$-gèbre à homotopie près* ou *$\mathcal{P}_\infty$-gèbre* comme une gèbre sur un remplacement cofibrant de $\mathcal{P}$. Comme deux remplacements cofibrants sont quasi-isomorphes, la catégorie homotopique des $\mathcal{P}_\infty$-gèbres, définie en inversant formellement les quasi-isomorphismes, est bien définie. C'est suffisant si seules les propriétés homotopiques des $\mathcal{P}_\infty$-gèbres nous intéressent.

Définition. Une *$\mathcal{P}$-gèbre à homotopie près* est une gèbre sur un modèle minimal cofibrant de $\mathcal{P}$.

Dans ce cas le modèle minimal est triangulé ; il est équipé d'une filtration supplémentaire qui permet de montrer son unicité à isomorphisme près, cf. [FHT01, Mar96]. (Le cas des propérades reste à écrire mais ne pose pas de problème insurmontable). Cette notion est donc bien définie.

En pratique, on utilise les modèles minimaux fournis à la section 3 qui sont tous cofibrants. Dans le cas As, on retrouve la notion de A_∞-algèbre de Stasheff [Sta63]. Dans le cas Lie, on retouve la notion d'*algèbre de Lie à homotopie près* ou *L_∞-algèbre* qui est une version anti-symétrique de celle de A_∞-algèbre. C'est un module différentiel gradué $(\mathfrak{g}, d)$ muni d'opérations $l_n\,:\,\Lambda^n\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ de degré $n-2$, pour tout $n \geq 2$, vérifiant une relation quadratique. Cette définition est équivalente à la donnée d'une codérivation de carré nul sur la cogèbre symétrique colibre $\mathcal{S}^c(s\mathfrak{g})$. Cette notion joue un rôle crucial en géométrie et en physique mathématique, cf. [Kon03].

Dans le cas de la propérade BiLie, la dualité de Koszul des propérades fournit la notion de *bigèbre de Lie à homotopie près*. Dans le cas BiAs, la dualité de Koszul homotopique donne la notion de *bigèbre associative à homotopie près*, cf. [Mar06b, SU05]. Dans le cas de $\mathcal{P}_{\bullet\to\bullet}$, la résolution de Koszul homotopique redonne la notion de *∞-morphisme* entre $\mathcal{P}_\infty$-algèbres [BV73, Mar04].

Soit A un module différentiel gradué, on voudrait maintenant pouvoir comprendre l'ensemble des structures de $\mathcal{P}_\infty$-gèbre sur A. C'est le but de la section suivante.

4.3. **Propérades, copropérades et algèbres de Lie à homotopie près.** Nous généralisons les premiers résultats de la section 3.2 au cas où $\mathcal{C}$ est une copropérade à homotopie près.

Théorème 23. *Pour toute copropérade à homotopie près $\mathcal{C}$ et toute propérade $\mathcal{Q}$, le $\mathbb{S}$-bimodule $\mathrm{Hom}(\mathcal{C}, \mathcal{Q})$ est une propérade à homotopie près. Cette construction est naturelle en $\mathcal{C}$ et en $\mathcal{Q}$.*

Théorème 24. *Soit $\mathcal{P}$ un propérade à homotopie près, la somme directe de ses composantes $\bigoplus_{m,n} \mathcal{P}(m,n)$ est munie d'une structure naturelle d'algèbre de Lie à homotopie près. Cette structure se restreint au sous-module des invariants pour l'action des groupes symétriques.*

Ce dernier théorème généralise celui de [VdL02] pour les opérades à homotopie près.

Corollaire 25. *Pour toute copropérade à homotopie près $\mathcal{C}$ et toute propérade $\mathcal{Q}$, le produit des morphismes équivariants* $\mathrm{Hom}_{\mathbb{S}}(\mathcal{C},\mathcal{Q}) := \prod_{m,n} \mathrm{Hom}_{\mathbb{S}}(\mathcal{C}(m,n),\mathcal{Q}(m,n))$ *est une L_∞-algèbre. De plus, cette construction est naturelle en $\mathcal{C}$ et $\mathcal{Q}$.*

Cette L_∞-algèbre est appelée *L_∞-algèbre de convolution.*

Dans toute L_∞-algèbre, vérifiant une hypothèse de finitude, on considère *l'équation de Maurer-Cartan généralisée* suivante :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n!}\, l_n(\alpha,\ldots,\alpha) = 0, \text{ où } l_1 = d.$$

Les solutions de cette équation dans l'algèbre de Lie à homotopie près de convolution sont appelées des *morphismes tordants généralisés* et leur ensemble est noté $\mathrm{Tw}(\mathcal{C},\mathcal{Q})$. La propriété essentielle de cette notion réside dans la proposition suivante.

Proposition 26. *Soient $\mathcal{C}$ un copropérade à homotopie près et $\mathcal{Q}$ une propérade, il existe une bijection naturelle*

$$\mathrm{Hom}_{dg\ propérades}(\Omega(\mathcal{C}),\ \mathcal{Q}) \cong \mathrm{Tw}(\mathcal{C},\mathcal{Q}).$$

Pour $\mathcal{Q} = \mathrm{End}_A$ et $\Omega\mathcal{C} \xrightarrow{\sim} \mathcal{P}$, ceci donne une interprétation des structures de $\mathcal{P}_\infty$-gèbres sur A comme des morphismes tordants généralisés.

Théorème 27. *Il existe une bijection naturelle entre l'ensemble des structures de $\mathcal{P}_\infty$-gèbres sur A et les solutions de l'équation de Maurer-Cartan généralisée dans la L_∞-algèbre de convolution* $\mathrm{Hom}_{\mathbb{S}}(\mathcal{C},\mathrm{End}_A)$.

Ce théorème répond à la philosophie de la théorie des déformation qui remonte à Grothendieck et Deligne qui veut que "tout ensemble de structures" soit codé par une algèbre de Lie différentielle graduée, voire une L_∞-algèbre. Dans le cas de la résolution de Koszul homotopique de $\mathcal{P}_{\bullet\to\bullet}$, ceci donne une interprétation des ∞-morphismes entre $\mathcal{P}_\infty$-algèbres en terme de solutions de l'équation de Maurer-Cartan généralisée dans une algèbre L_∞ (voir V. Dolgushev [Dol07] pour le cas $\mathcal{P} = \mathrm{Lie}$ traité ad hoc).

4.4. **Complexe de déformation des morphismes de propérades.** Dans la catégorie monoïdale des $\mathbb{S}$-bimodules, la notion de bimodule M sur une propérade $\mathcal{P}$ est définie par deux morphismes $\mathcal{P}\boxtimes M \to M$ et $M\boxtimes\mathcal{P} \to M$. Ceci équivaut à faire agir plusieurs opérations de $\mathcal{P}$ sur plusieurs opérations de M. Dans la suite, nous aurons besoin de la notion infinitésimale suivante.

Définition (Bimodule infinitésimal)**.** Un *bimodule infinitésimal sur une propérade* $\mathcal{P}$ est un $\mathbb{S}$-bimodule M muni de deux morphismes de $\mathbb{S}$-bimodules

$$\mathcal{P}\boxtimes(\mathcal{P};M) \to M \quad \text{et} \quad (\mathcal{P};M)\boxtimes\mathcal{P} \to M,$$

où $\mathcal{P}\boxtimes(\mathcal{P};M)$ (respectivement $(\mathcal{P};M)\boxtimes\mathcal{P}$) est la partie linéaire en M du foncteur $M \mapsto \mathcal{P}\boxtimes(\mathcal{P}\oplus M)$ (respectivement $M \mapsto (\mathcal{P}\oplus M)\boxtimes\mathcal{P}$). Ces deux actions commutent entre elles et sont compatibles avec la composition de la propérade $\mathcal{P}$, cf. section 3 de [7].

La donnée d'un bimodule infinitésimal M est équivalente à la donnée d'une *extension abélienne* $\mathcal{P}\ltimes M$ de $\mathcal{P}$, qui est une structure de propérade sur $\mathcal{P}\oplus M$ telle que la composition d'au moins 2 éléments de M soit nulle.
Soit $\mathcal{I}\to\mathcal{P}$ un morphisme de propérades. On considère la catégorie des propérades sous $\mathcal{I}$ et sur $\mathcal{P}$, notée $\mathcal{I}\backslash\mathrm{Prop.}/\mathcal{X}$.

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{X} \arrow[d, "f"] \\ \mathcal{I} \arrow[ur, "u"] \arrow[r] & \mathcal{P} \end{tikzcd}$$

Soit M un bimodule infinitésimal sur $\mathcal{P}$. En tirant en arrière par f, c'est aussi un bimodule infinitésimal sur $\mathcal{X}$. On peut donc considérer le module des dérivations $\mathrm{Der}_{\mathcal{I}}(\mathcal{X},M)$ de $\mathcal{X}$ dans M s'annulant sur $\mathcal{I}$. L'extension abélienne $\mathcal{P}\ltimes M$ représente ce bifoncteur à droite. Il forme donc un objet en groupe abélien dans $\mathcal{I}\backslash\mathrm{Prop.}/\mathcal{X}$.

Proposition 28. *Il existe une bijection naturelle*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{I}\backslash Prop./\mathcal{P}}(\mathcal{X}, \mathcal{P} \ltimes M) \cong \mathrm{Der}_{\mathcal{I}}(\mathcal{X}, M).$$

Afin de le représenter à droite, on introduit le *module de Kähler des formes différentielles* d'une propérade $\mathcal{X}$ sur $\mathcal{I}$, noté $\Omega_{\mathcal{X}/\mathcal{I}}$.

Proposition 29. *Il existe une bijection naturelle*

$$\mathrm{Der}_{\mathcal{I}}(\mathcal{X}, M) \cong \mathrm{Hom}_{Inf.\,\mathcal{X}\text{-}biMod}(\Omega_{\mathcal{X}/\mathcal{I}}, M).$$

Théorème 30. *On a l'adjonction suivante*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{I}\backslash Prop./\mathcal{P}}(\mathcal{X}, \mathcal{P} \ltimes M) \cong \mathrm{Der}_{\mathcal{I}}(\mathcal{X}, M) \cong \mathrm{Hom}_{Inf.\,\mathcal{P}\text{-}biMod}(\mathcal{P} \boxtimes_{\mathcal{X}} \underbrace{\Omega_{\mathcal{X}/\mathcal{I}}}_{1} \boxtimes_{\mathcal{X}} \mathcal{P}, M),$$

où $\mathcal{P} \boxtimes_{\mathcal{X}} \underbrace{\Omega_{\mathcal{X}/I}}_{1} \boxtimes_{\mathcal{X}} \mathcal{P}$ *est le* $\mathcal{P}$*-bimodule infinitésimal libre sur* $\Omega_{\mathcal{X}/\mathcal{I}}$*, il est donné par la partie linéaire du foncteur* $N \mapsto \mathcal{P} \boxtimes_{\mathcal{X}} N \boxtimes_{\mathcal{X}} \mathcal{P}$ *évaluée en* $\Omega_{\mathcal{X}/\mathcal{I}}$.

Le théorème 21 permet de montrer que $\mathcal{I}\backslash\mathrm{Prop.}/\mathcal{P}$ est une catégorie de modèles cofibrement engendrée. On montre aussi que la catégorie des $\mathcal{P}$-bimodules infinitésimaux est une catégorie de modèles cofibrement engendrée (Lemme 74 de [8]).

Proposition 31. *La paire de foncteurs adjoints*

$$\mathcal{P} \boxtimes_{-} \underbrace{\Omega_{-/\mathcal{I}}}_{1} \boxtimes_{-} \mathcal{P} \;:\; \mathcal{I}\backslash Prop./\mathcal{P} \;\rightleftharpoons\; Inf.\,\mathcal{P}\text{-}biMod \;: \mathcal{P} \ltimes -$$

forme une adjonction de Quillen.

On peut donc dériver ces foncteurs dans les catégories homotopiques associées. Ceci démontre que $\mathrm{Der}_{\mathcal{I}}(\mathcal{R}, M)$ est indépendant du choix de la résolution cofibrante $\mathcal{R}$ de $\mathcal{P}$ choisie.

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{Ho}(\mathcal{I}\backslash\mathrm{Prop.}/\mathcal{P})}(\mathcal{R}, \mathcal{P} \ltimes M) \cong \mathrm{Der}_{\mathcal{I}}(\mathcal{R}, M) \cong \mathrm{Hom}_{\mathsf{Ho}(\mathrm{Inf.}\,\mathcal{P}\text{-}\mathrm{biMod})}(\mathcal{P} \boxtimes_{\mathcal{R}} \underbrace{\Omega_{\mathcal{R}/\mathcal{I}}}_{1} \boxtimes_{\mathcal{R}} \mathcal{P}, M).$$

Tout morphisme de propérades $\varphi : \mathcal{P} \to \mathcal{Q}$ induit une structure de $\mathcal{P}$-bimodule infinitésimal sur $\mathcal{Q}$. Le foncteur dérivé total, i.e. non-abélien, $\mathrm{Der}_I(\mathcal{R}, \mathcal{Q})$ défini le *complexe de déformation du morphisme* φ. Cette définition conceptuelle montre que ce complexe est représenté par le suivant.

Définition (Complexe cotangent)**.** Le *complexe cotangent* de $\mathcal{P}$ est le foncteur dérivé total à gauche

$$\mathbb{L}_{\mathcal{P}/\mathcal{I}} := \mathcal{P} \boxtimes_{\mathcal{R}} \underbrace{\Omega_{\mathcal{R}/\mathcal{I}}}_{1} \boxtimes_{\mathcal{R}} \mathcal{P},$$

où $\mathcal{R}$ est une résolution cofibrante de $\mathcal{P}$.

Sur l'homologie du complexe cotangent classique des algèbres commutatives, on peut lire les propriétés de régularité du morphisme $\mathcal{I} \to \mathcal{P}$ (lisse, étale, etc.). Par analogie, nous espérons pouvoir montrer ce type de résultat ici en adaptant les méthodes de la géométrie algébrique. La théorie des groupes quantiques, avec ses diverses structures de bigèbres et de bigèbres de Lie, fournit un champ d'applications potentielles. Nous pensons par exemple pouvoir expliquer conceptuellement des conjectures du type de [EH08].

La généralisation du complexe cotangent pour des E_∞-algèbres est étudié par J. Lurie en géométrie algébrique dérivée et par B. Toen en géométrie algébrique topologique (après les travaux de Miller-Goerss-Hopkins). Le module de Kähler des formes différentielles avaient déjà été généralisé par A. Connes des algèbres commutatives aux algèbres associatives [Con85], voir aussi [Kar87, Lod98]. Nous espérons voir intervenir celui des propérades en géométrie non-commutative.

Un autre intérêt de cette approche théorique est qu'elle fournit automatiquement les théorèmes de transitivité et de changement de base [Qui70] qui sont des outils pratiques pour étudier le complexe de déformation et le complexe cotangent.

Nous travaillons ici sur un corps de caractéristique 0, d'où l'utilisation des modules différentiels gradués. Si nous voulions travailler un caractéristique quelconque, il faudrait comme [Qui70] et [And67] travailler avec des résolutions simpliciale.

4.5. **Structure algébrique du complexe de déformation.** Soit $\mathcal{P} \to \mathcal{Q}$ un morphisme de propérades. Ceci munit $\mathcal{Q}$ d'une structure de $\mathcal{P}$-bimodule infinitésimal. Soit $\Omega\mathcal{C}$ une résolution quasi-libre de $\mathcal{P} : \Omega\mathcal{C} \xrightarrow{\sim} \mathcal{P}$. On prend ici $\mathcal{I} = I$. La composition de morphismes $\alpha : \Omega\mathcal{C} \to \mathcal{P} \to \mathcal{Q}$ fournit un morphisme tordant généralisé dans la L_∞-algèbre de convolution $\mathrm{Hom}_{\mathbb{S}}(\mathcal{C}, \mathcal{Q})$.

Théorème 32. *Le complexe de déformation* $\mathrm{Der}_I(\Omega\mathcal{C}, Q)$ *est isomorphe à la* L_∞*-algèbre de convolution* $\mathrm{Hom}^\alpha_{\mathbb{S}}(\mathcal{C}, \mathcal{Q})$ *tordue par* α.

Les dérivations depuis une propérade libre sont caractérisées par l'image des générateurs : $\mathrm{Der}_I(\Omega\mathcal{C}, Q) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{S}}(\mathcal{C}, \mathcal{Q})$. On vérifie que la différentielle est celle obtenue en tordant celle de l'algèbre de convolution par α :

$$\partial^\alpha(-) := \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!}\, l_n(-, \alpha, \ldots, \alpha).$$

Proposition 33. *Cette* L_∞*-algèbre est indépendante de la resolution quasi-libre cofibrante choisie : deux résolutions quasi-libres cofibrantes sont quasi-isomorphes, ce qui induit un* L_∞*-isomorphisme entre les deux* L_∞*-algèbres de convolution.*

Dans le cas où $\mathcal{Q} = \mathrm{End}_A$, opérade des endomorphismes d'un dg-module A, ceci définit la *cohomologie de la* $\mathcal{P}$*-gèbre* A. Si la propérade $\mathcal{P}$ est de Koszul, elle admet une résolution quasi-libre quadratique $\Omega\mathcal{P}^{\text{i}}$ donc le complexe de déformation est une algèbre de Lie. Ce crochet est appelé *crochet intrinsèque* par J. Stasheff [Sta93]. Dans le cas de l'opérade As, on retrouve le complexe de Hochschild des algèbres associatives muni du crochet de Gerstenhaber [Ger63], dans le cas de l'opérade Lie, on retrouve le complexe de Chevalley-Eilenberg des algèbres de Lie muni du crochet de Nijenhuis-Richardson [NR66]. Pour la propérade de Koszul des bigèbres de Lie, on retrouve la théorie de cohomologie de P. Lecomte et C. Roger [LR90] avec le crochet de Lie de Y. Kosmann-Schwarzbach [KS91]. Dans le cas de la propérade BiLie[1] qui code les bigèbres de Lie avec un crochet en degré 1, on retombe sur le crochet de Schouten des champs de polyvecteurs [Mer05]. Enfin, si on l'applique à l'opérade PreLie[2], on retrouve la crochet de Frölicher-Nijenhuis sur le faisceau, $T_X \otimes \Omega^\bullet_X$, du fibré tangent à valeurs dans les formes différentielles [Mer05].

Dans le cas où $\mathcal{P} = \mathrm{As}$, une opérade non-symétrique $\mathcal{Q}$ munie d'un morphisme d'opérades $\mathrm{As} \to \mathcal{Q}$ est appelée une *opérade multiplicative.* Le complexe de déformation de ce morphisme donne ce que J.E. McClure et J.H. Smith [MS02] appelle le *complexe de Hochschild de* $\mathcal{Q}$ dans le contexte de la conjecture de Deligne. V. Tourtchine a montré que le complexe de deformation du morphisme $\mathrm{As} \to \mathcal{Q} = \mathrm{Poisson}$, est relié aux invariants des noeuds de Vassiliev [Tou04].

Toujours dans le cas d'une propérade de Koszul, la structure de propérade sur $\mathrm{Hom}(\mathcal{P}^{\text{i}}, \mathrm{End}_A)$ induit des opérations multilinéaires $\{f_1, \ldots, f_r\}\{g_1, \ldots, g_s\}$ appelées *opérations LR* pour "Left-Right" et pour Loday-Ronco [LR06] sur le complexe de déformation $\mathrm{Hom}_{\mathbb{S}}(\mathcal{P}^{\text{i}}, \mathrm{End}_A)$. Le premier produit $\{f\}\{g\}$ induit par anti-symétrisation le crochet de Lie précédent.

Proposition 34. *Les opérations LR vérifient les relation d'une "algèbre* B_∞ *non-différentielle", à savoir, pour tout* $f_1, \ldots, f_r, g_1, \ldots, g_s, h_1, \ldots, h_t$ *dans* $\mathcal{P}$.

$$\sum_{\Theta} \varepsilon\big\{\{f_1, \ldots, f_{i_1}\}\{g_1, \ldots, g_{j_1}\}, \ldots, \{f_{i_1+\cdots+i_{a-1}+1}, \ldots, f_r\}\{g_{j_1+\cdots+j_{a-1}+1}, \ldots, g_r\}\big\}\big\{h_1, \ldots, h_t\big\}$$

$$= \sum_{\Theta'} \varepsilon' \big\{f_1, \ldots, f_s\big\}\big\{\{g_1, \ldots, g_{k_1}\}\{h_1, \ldots, h_{l_1}\}, \ldots, \{g_{k_1+\cdots+k_{b-1}+1}, \ldots g_s\}\{h_{l_1+\cdots+l_{b-1}+1}, \ldots, h_t\}\big\},$$

où Θ porte sur $1 \leqslant a \leqslant Max(r,s)$, $i_1, \ldots, i_a \geqslant 0$ tels que $i_1 + \cdots + i_a = r$, $j_1, \ldots, j_a \geqslant 0$ tels que $j_1 + \cdots + j_a = s$ et où Θ' porte sur $1 \leqslant b \leqslant Max(s,t)$, $k_1, \ldots, k_b \geqslant 0$ tels que $k_1 + \cdots + k_b = s$, $l_1, \ldots, l_b \geqslant 0$ tels que $l_1 + \cdots + l_b = t$. Le signe ε vient de la permutation des f et des g et le signe ε' vient de la permutation des g et des h.

Dans les cas des opérades, ces opérations sont appelées les *opérations braces symétriques*. Lorsque l'on travaille avec des opérades non-symétriques, ces *opérations braces non-symétriques* jouent un rôle crucial dans la résolution de la conjecture de Deligne, voir 6.4.

Théorème 35. *Pour toute bigèbre associative A et pour tout modèle minimal $\Omega\mathcal{C}$ de la propérade BiAs, le complexe de chaînes sous-jacent à la L_∞-algèbre de convolution* $\mathrm{Hom}_{\mathbb{S}}^{\alpha}(\Omega\mathcal{C}, \mathrm{End}_A)$ *est isomorphe au complexe de Gertenhaber-Schack* [GS90].

Ceci donne la première démonstration complète de l'existence d'une structure de L_∞-algèbre sur le complexe de Gertenhaber-Schack qui code les déformations des bigèbres.

Si on démarre avec une résolution quasi-libre cofibrante $\Omega\mathcal{C}$ de $\mathcal{P}$ à la place de $\mathcal{P}$, alors le complexe de déformation définit la *cohomologie des $\mathcal{P}$-gèbres à homotopie près*. Encore une fois, ce complexe de chaînes est une L_∞-algèbre tordue.

5. Partitions opéradiques

Les articles [4] et [5] font le lien entre la théorie des ensembles partiellement ordonnés et celle des opérades.

L'article [4] fournit une construction d'ensembles partiellement ordonnés à partir d'une opérade ensembliste. Le théorème principal affirme que l'opérade est de Koszul si et seulement si les ensembles partiellement ordonnés sont de Cohen-Macaulay. Ce résultat admet les deux applications suivantes. Comme il existe des critères combinatoires simples pour montrer qu'un ensemble partiellement ordonné est de Cohen-Macaulay, cela donne une méthode pratique pour montrer qu'une opérade est de Koszul. Réciproquement, l'homologie des ensembles partiellement ordonnés venant d'une opérade sont des $\mathbb{S}$-modules. Lorsqu'ils sont de Cohen-Macaulay, ces groupes d'homologie sont concentrés en dimension maximale. Ces derniers sont en fait isomorphes à la duale de Koszul de l'opérade de départ, ce qui permet de les calculer complètement.

Dans l'article [5], écrit en collaboration avec Frédéric Chapoton, nous introduisons et étudions les variations suivantes du treillis des partition : *ensembles partiellement ordonnés de partition pointés et multi-pointés de type A et B*, dans la classification des groupes de Coxeter. Nous calculons leurs polynômes caractéristiques, leurs algèbres de Hopf d'incidence et leurs groupes d'homologie. Comme corollaire, cela permet de montrer que certaines opérades sont de Koszul sur $\mathbb{Z}$, par la méthode précédente.

5.1. **Treillis des partitions et homologie des ensembles partiellement ordonnés.** Un *ensemble partiellement ordonné* $(\Pi, \leqslant)$ est un ensemble Π muni d'un ordre partiel $\leqslant$. Nous renvoyons au chapitre 3 de [Sta97], pour les détails de cette notion. Un exemple fondamental est donné par le *treillis des partitions* Π_n, pour tout entier n : ses éléments sont les partitions de l'ensemble $[n] := \{1, \ldots, n\}$ et l'ordre partiel est défini par le raffinement des partitions. Le groupe symétrique agit sur les partitions en permutant les éléments de chaque bloc. Cette action est compatible avec la relation d'ordre.

Une *chaîne* d'un ensemble partiellement ordonné Π est un sous-ensemble fini, complétement ordonné $\lambda_0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_l$. On considère l'ensemble $\Delta(\Pi)$ des chaînes où le premier élément est minimal et le dernier maximal. Sur cet ensemble, on définit des opérateurs de face d_i qui suppriment le $i^{\text{ème}}$ élément d'une chaîne. L'homologie de cet ensemble présimplicial est *l'homologie de l'ensemble partiellement ordonné* Π. Le complexe de chaînes $\mathbb{K}[\Delta(\Pi)]$ calculant cette homologie sur l'anneau $\mathbb{K}$ est appelé le *complexe d'ordre. L'homologie réduite* est définie en prenant des chaînes quelconques. Lorsqu'un groupe G agit sur un ensemble partiellement ordonné de manière compatible avec l'ordre, ses groupes d'homologie et d'homologie réduite sont des G-modules sur $\mathbb{K}$.

Un ensemble partiellement ordonné est dit *gradué* s'il n'admet qu'un élément minimal et un maximal et si toutes les chaînes maximales entre deux éléments sont de même taille.

Définition (Cohen-Macaulay)**.** Un ensemble partiellement ordonné gradué est dit de *Cohen-Macaulay* sur $\mathbb{K}$ si l'homologie de tout intervalle est concentrée en dimension maximale.

Il existe beaucoup de critères combinatoires qui assurent qu'un ensemble partiellement ordonné est de Cohen-Macaulay : modulaire, distributif, "shellable", par exemple. Sur ce sujet, nous renvoyons à A. Björner, A.M. Garsia and R.P. Stanley [BGS82] et à M. Wachs [Wac07].

Par exemple, A. Björner a montré dans [Bjö80] que le treillis des partitions était modulaire. Il restait à calculer ces groupes d'homologie maximale en tant que $\mathbb{S}$-modules. De nombreux auteurs ont travaillé sur le sujet pour montrer finalement que le groupe d'homologie réduite maximal de Π_n est isomorphe à $\mathcal{L}ie(n)^* \otimes \mathrm{sgn}_{\mathbb{S}_n}$, le dual linéaire du $\mathbb{S}$-module de l'opérade codant les algèbres de Lie tordu par la représentation signature de $\mathbb{S}_n$. On renvoie à l'introduction de [Fre04] pour les références bibliographiques complètes de ce résultat.

B. Fresse [Fre04] a donné une explication conceptuelle pour cette forme particulière de groupes d'homologie grâce à la dualité de Koszul entre les opérades $\mathcal{L}ie$ et $\mathcal{C}om$. C'est ce résultat que nous généralisons dans la suite.

5.2. **Ensemble partiellement ordonné des P-partitions.** Soit P une opérade ensembliste. Pour tout ensemble X à n éléments, on considère l'ensemble $\mathrm{Bij}([n], X)$ sur lequel $\mathbb{S}_n$ agit par permutation à la source des applications. Le foncteur suivant

$$\mathrm{P}(X) := \mathrm{P}(n) \times_{\mathbb{S}_n} \mathrm{Bij}([n], X),$$

est défini par les orbites sous l'action diagonale de $\mathbb{S}_n$. Un élément de $\mathrm{Bij}([n], X)$ peut être vu comme une manière d'ordonner les éléments de X. Une orbite peut donc être représentée par une opération de $\mathrm{P}(n)$ avec les entrées indicées avec les éléments de X.

Une P-*partition* de $[n]$ est un ensemble de blocs $\{B_1, \ldots, B_t\}$ tels que chaque B_j appartient à $\mathrm{P}(I_j)$, pour $\{I_1, \ldots, I_t\}$ une partition de $[n]$. Une P-partition de $[n]$ est donc une partition classique de $[n]$ enrichie par des opérations de P. L'opérade Com des algèbres commutatives est une opérade ensembliste dont les Com-partitions sont les partitions classiques.

On définit sur l'ensemble des P-partitions la relation d'ordre suivante : une P-partition π est plus petite qu'une P-partition τ si la partition sous-jacente de π raffine celle de τ et si les opérations de P qui indicent la partition de τ peuvent être obtenue à partir de celles de π par composition opéradique dans P. Cet *ensemble partiellement ordonné des* P*-partitions* est noté $\Pi_{\mathrm{P}}(n)$. Dans le cas P = Com. On retrouve $\Pi_{\mathrm{Com}}(n) = \Pi_n$, le treillis des partitions.

Des constructions proches étaient apparues dans le cadre de espèces de structures de A. Joyal dans [MY91], comme l'auteur l'a appris en 2007, après la publication de [4].

5.3. **Équivalence Koszul et Cohen-Macaulay.** Une opérade ensembliste (P, γ) est dite *basique* si pour tout $(\nu_1, \ldots, \nu_t)$ dans $\mathrm{P}(i_1) \times \cdots \times \mathrm{P}(i_t)$, la composition opéradique

$$\nu \in \mathrm{P}(t) \mapsto \gamma(\nu; \nu_1, \ldots, \nu_t) \in \mathrm{P}(i_1 + \cdots + i_t)$$

est injective. À toute opérade ensembliste, on associe l'opérade algébrique $\mathcal{P}(n) := \mathbb{K}[\mathrm{P}(n)]$.

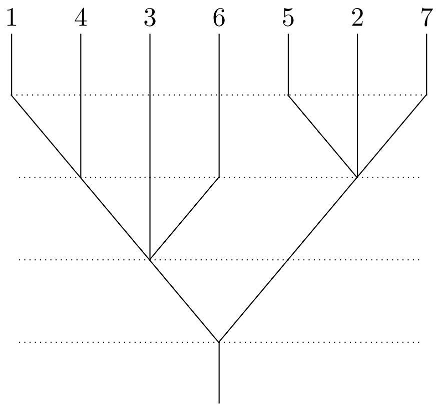
Le théorème principal de [4] est le suivant.

Théorème 36 (Équivalence Koszul-Cohen-Macaulay)**.** *Soit* P *une opérade ensembliste basique, quadratique et engendrée par* $\mathbb{S}$*-ensemble* V *concentré en arité* k *avec* $k \geq 2$.
L'opérade algébrique $\mathcal{P}$ *est de Koszul si et seulement si pour tout* $n \geq 1$ *et tout* $\omega \in \mathrm{Max}(\Pi_{\mathrm{P}}(n))$*, l'intervalle* $[\hat{0}, \omega]$ *est de Cohen-Macaulay.*
Dans ce cas, les groupes d'homologie de degré maximal sont égaux à

$$H_m(\Pi_{\mathrm{P}}(n)) \cong \mathcal{P}^{\mathrm{i}}(n), \text{ pour } n = m(k-1)+1 \text{ et } m \in \mathbb{N}.$$

La démonstration repose sur les trois points suivants :

(1) Lorsqu'une opérade ensembliste P est basique, le complexe d'ordre $\mathbb{K}[\Delta(\Pi)]$ est isomorphe à la bar construction simpliciale $\mathcal{N}(\mathrm{P})$ de P (Théorème 7 de [4]). La figure suivante donne l'idée de la preuve. La bar construction simpliciale est donnée par les arbres à niveau et à chaque arbre à niveau, on associe une chaîne de partitions.



0 $\longleftrightarrow$ $\lambda_0 = \{\{1\},\{4\},\{3\},\{6\},\{5\},\{2\},\{7\}\}$

1 $\longleftrightarrow$ $\lambda_1 = \{\{1,4\},\{3\},\{6\},\{2,5,7\}\}$

2 $\longleftrightarrow$ $\lambda_2 = \{\{1,3,4,6\},\{2,5,7\}\}$

3 $\longleftrightarrow$ $\lambda_3 = \{\{1,2,3,4,5,6,7\}\}$

FIGURE 5. Exemple dans le cas P $=$ *Com*.

(2) La bar construction simpliciale $\mathcal{N}(\mathcal{P})$ d'une opérade est quasi-isomorphe à la bar construction $B\mathcal{P}$, cf. [SVO99, Fre04].

(3) Une opérade $\mathcal{P}$ est de Koszul si et seulement si l'homologie de sa bar construction est concentrée en dimension maximale.

5.4. **Applications.** Dans [4], nous avons étudié les opérades ensemblistes Com et Perm des algèbres commutatives et permutatives [Cha01] et nous avons introduit l'opérade ComTrias qui code les algèbres munies d'un produit commutatif $\bullet$ et d'un produit permutatif $*$ tels que

$$x * (y \bullet z) = x * (y * z) \text{ et } (x \bullet y) * z = x \bullet (y * z).$$

Les P-partitions associées sont respectivement les partitions classiques, les *partitions pointées* où un élément de chaque bloc est pointé et les *partitions multipointées* où plusieurs éléments de chaque bloc peuvent être pointés. Dans les cas pointés, une P-partition π est plus petite qu'une autre τ si ses éléments pointés de π contiennent ceux de τ, cf. les figures 6 et 7.

Nous avons aussi considéré les analogues non commutatifs de ces trois opérades que sont les opérades As, Dias et Trias des algèbres associatives, des digèbres associatives [Lod01] et des trigèbres associatives [LR04]. Les P-partitions associées sont les partitions classiques, pointées et multipointées respectivement et ordonnées, c'est-à-dire avec un ordre à l'intérieur de chaque bloc.

B. Fresse [Fre04] a étendu la dualité de Koszul des opérades sur un anneau de Dedekind et le théorème 36 est valable sur un anneau de Dedekind. Il implique aussi que les duales de Koszul sont des opérades de Koszul. Si une opérade n'est pas ensembliste, il arrive souvent que sa duale de Koszul le soit et donc on peut appliquer cette méthode pratique.

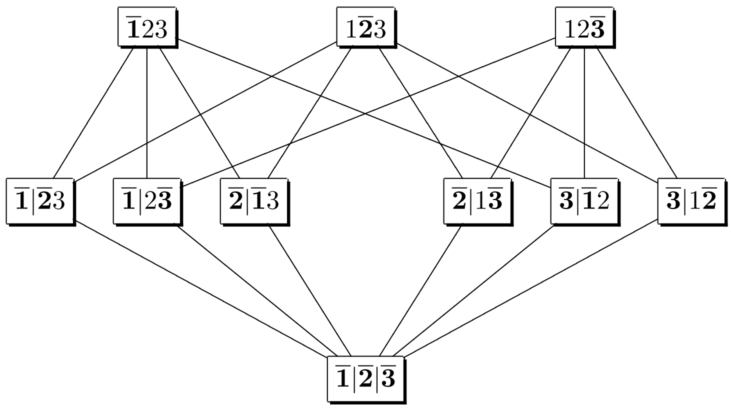


FIGURE 6. Diagramme de Hasse de $\Pi_{\mathrm{Perm}}(3)$

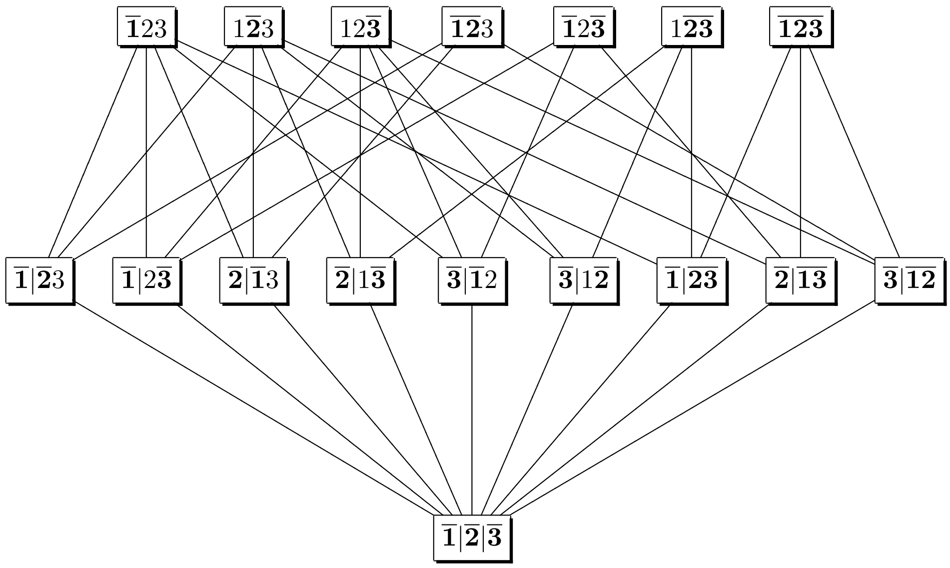


FIGURE 7. Diagramme de Hasse de $\Pi_{\mathrm{ComTrias}}(3)$

Théorème 37. *Toutes les opérades Com, Perm, ComTrias, As, Dias, Trias sont de Koszul sur $\mathbb{Z}$ et sur tout corps. Leurs opérades duales Lie, PreLie, PostLie, Dend, TriDend sont de Koszul sur $\mathbb{Z}$ et sur tout corps.*

Pour cela, nous avons montré que les premières opérades sont basiques et que les intervalles maximaux des ensembles partiellement ordonnés de partitions associés sont de Cohen-Macaulay. Pour ce dernier point, nous avons utilisé le critère pratique suivant.

Un ensemble partiellement ordonné pur est *semi-modulaire* si pour tout triplet x, y et t tel que x et y recouvrent t, il existe un élément z qui recouvre x et y. Enfin, un ensemble partiellement ordonné semi-modulaire est de Cohen-Macaulay [Bac76, Far79]. Dans les six cas précédents, chaque intervalle de $\Pi_{\mathrm{P}}(n)$ est semi-modulaire (Lemme 1.10, Théorème 1.11 et Lemme 2.6, Théorème 2.7).

En pratique, il est assez simple de montrer que les ensembles partiellement ordonnés de partition de type opéradique sont semi-modulaire. Cela fournit donc une méthode concrète pour démontrer qu'une opérade est de Koszul sur $\mathbb{Z}$ et donc sur tout anneau de Dedekind.

En calculant la duale de Koszul de ces opérades, nous avons complétement explicité les groupes d'homologie non triviaux de ces ensembles partiellement ordonnés de partitions. Le résultat est résumé dans le tableau suivant :

Ensemble partiellement ordonné $\mathbf{\Pi}_{\mathrm{P}}$	**Opérade $\mathcal{P}$**	$\mathcal{P}^!$	$\mathbf{H_{n-1}(\Pi_{\mathrm{P}}(n))} \cong \mathcal{P}^{\mathrm{i}}(\mathbf{n})$
partitions Π	$\mathcal{C}om$	$\mathcal{L}ie$	$\mathcal{L}ie^*(n) \otimes sgn_{\mathbb{S}_n}$
partitions pointées Π_{Perm}	$\mathcal{P}erm$	$\mathcal{P}relie$	$\mathcal{RT}^*(n) \otimes sgn_{\mathbb{S}_n}$
partitions multipointées Π_{ComTrias}	$\mathcal{C}om\mathcal{T}rias$	$\mathcal{P}ost\mathcal{L}ie$	$(\mathcal{L}ie \circ \mathcal{M}ag)^*(n) \otimes sgn_{\mathbb{S}_n}$
partitions ordonnées Π_{As}	$\mathcal{A}s$	$\mathcal{A}s$	$k[\mathbb{S}_n]$
partitions pointées ordonnées Π_{Dias}	$\mathcal{D}ias$	$\mathcal{D}end$	$k[Y_n] \otimes k[\mathbb{S}_n]$
partitions multipointées ordonnées Π_{Trias}	$\mathcal{T}rias$	$\mathcal{T}ri\mathcal{D}end$	$k[T_n] \otimes k[\mathbb{S}_n]$

où $\mathcal{RT}$ est l'espace vectoriel engendré par les arbres enracinés [CL01], $\mathcal{M}ag$ est l'opérade des algèbres magmatiques, Y_n est l'ensemble des arbres binaires planaires à n sommets et T_n est l'ensemble des arbres planaires à n feuilles.

Ce résultat est à mettre en perspective avec la difficulté de calculer les groupes d'homologie du treillis des partitions avant l'utilisation des opérades.

5.5. **Ensembles partiellement ordonnés de partition pointés et multi-pointés de type A et B.** Pour tout groupe de Weyl W, il existe un ensemble partiellement ordonné de partitions défini par des arrangements d'hyperplans de type W, cf. [BW06]. Le cas A_{n-1} donne le treillis des partitions Π_n. Motivés par l'idée qu'il doit exister des ensembles partiellement ordonnés de partitions pointées et multipointées pour tout groupe de Weyl, nous avons introduit dans [5] un *ensemble partiellement ordonné de partitions pointées du type B*, l'ensemble partiellement ordonné de partitions pointées Π_{Perm} étant vu comme le type A. Cet ensemble partiellement ordonné $\Pi^B_{\mathrm{Perm}}(n)$ est formé des partitions pointées de $\{1,\ldots,n\} \cup \{-1,\ldots,-n\}$ avec le même type d'ordre que précédemment, cf. figure 8.

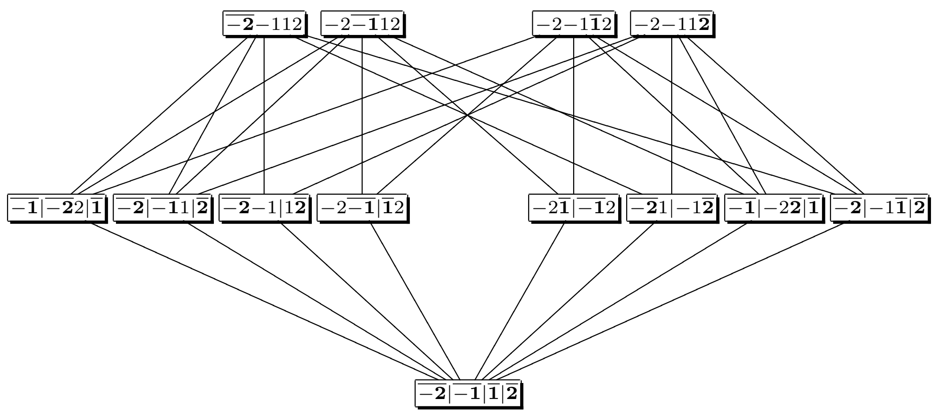


FIGURE 8. Diagramme de Hasse de $\Pi^B_{\mathrm{Perm}}(2)$

Ces généralisations devraient avoir les mêmes propriétés que le cas A : si h est le nombre de Coxeter et n le rang du groupe de Weyl, alors le polynôme caractéristique devrait être égal à $(x-h)^n$ et le nombre d'éléments maximaux devrait être égal à h, avec une action transitive du groupe de Weyl dessus. Nous avons démontré ces propriétés dans les cas A et B.

Théorème 38. *Le polynôme caractéristique de $\Pi_{\mathrm{Perm}}(n)$ est égal à $(x-n)^{n-1}$, celui de $\Pi^B_{\mathrm{Perm}}(n)$ est égal à $(x-2n)^n$ et celui de $\Pi_{\mathrm{ComTrias}}(n)$ est égal à $\prod_{j=n+1}^{2n-1}(x-j)$.*

Pour d'autres formules plus précises, nous renvoyons aux théorèmes 1.3, 1.6, 1.9 et 2.2 de [5]. Tous les intervalles maximaux de $\Pi_{\mathrm{Perm}}(n)$ sont isomorphes, on note cet ensemble partiellement ordonné $\bar{\Pi}_{\mathrm{Perm}}(n)$. Le théorème précédent repose sur la propriété cruciale suivante : tout intervalle de $\Pi_{\mathrm{Perm}}(n)$ est isomorphe à un produit $\bar{\Pi}_{\mathrm{Perm}}(i_1) \times \cdots \times \bar{\Pi}_{\mathrm{Perm}}(i_k)$, avec $i_1 + \cdots + i_k \leq n$ (Proposition 1.1 de [5]).

Cette propriété montre que l'ensemble $\mathcal{F}$ formé des classes d'isomorphismes de tous les intervalles des $\Pi_{\mathrm{Perm}}(n)$, pour $n \geq 1$, est stable par produit et sous-intervalles. Une telle famille est appelée *héréditaire* dans [Sch94] et permet de construire une algèbre de Hopf d'incidence sur le module engendré par $\mathcal{F}$.

Théorème 39. *Si on pose a_n la classe d'isomorphisme associée à $\bar{\Pi}_{\mathrm{Perm}}(n)$ pour $n \geq 2$. L'algèbre de Hopf d'incidence est l'algèbre symétrique sur les a_n avec pour coproduit, le dual de la composition des séries formelles de la forme*

$$x + \sum_{n \geq 2} a_n \frac{x^n}{(n-1)!}.$$

5.6. **Pour aller plus loin.** Inspiré par une équation entre deux crochets de Lie compatibles, apparaissant dans les systèmes intégrables Hamiltoniens, V.V. Dotsenko et A.S. Khoroshkin ont défini dans [DK07] deux opérades, Lie^2 et ${}^2\mathrm{Com}$, duales de Koszul l'une de l'autre. La première code des algèbres munies de deux crochets de Lie linéairement compatibles et la seconde code des algèbres munies de deux produits commutatifs totalement compatibles. H. Strohmayer [Str08] a montré que l'ensemble partiellement ordonné de partitions associé à l'opérade ${}^2\mathrm{Com}$ n'est pas semi-modulaire mais CL-shellable (Proposition 3.9 de [Str08]), ce qui est suffisant pour montrer qu'il est de Cohen-Macaulay. Il en conclut que ces deux opérades sont de Koszul sur $\mathbb{Z}$ par la méthode précédente.
Dans [Liv06], M. Livernet a introduit l'opérade NAP des algèbres permutatives non-associatives qui sont des algèbres munies d'un produit binaire $\triangleleft$ vérifiant $(a \triangleleft b) \triangleleft c = (a \triangleleft c) \triangleleft b$. Cette opérade est ensembliste et basique. Les ensembles partiellement ordonnés de partitions associés ont été décrits par F. Chapoton en M. Livernet dans [CL07] en terme de forêts d'arbres enracinés. Ils sont EL-shellables (Proposition 6.2 de [CL07]) donc de Cohen-Macaulay, ce qui prouve que l'opérade NAP est de Koszul sur $\mathbb{Z}$.

La construction d'une algèbre de Hopf d'incidence associée à une opérade ensembliste basique par les ensembles partiellement ordonnés de partition se généralise de la même manière au delà du cas P = Perm (Proposition 3.1 de [CL07] et section 3.4 de [MY91]). Dans le cas de l'opérade NAP, ces auteurs ont montré que l'algèbre de Hopf ainsi obtenue n'est autre que l'algèbre de Hopf que A. Connes et D. Kreimer ont introduit dans la théorie de renormalisation en physique [CK98] (Théorème 6.11 de [CL07]).

F. Chapoton a montré dans [Cha07] que l'ensemble partiellement ordonné des partitions pointées Π_{Perm} partageait des propriétés communes avec un ensemble partiellement ordonné d'arbres enracinés introduit par J. Pitman [Pit99] en probabilités. Par exemple, ces deux ensembles partiellement ordonnés sont homotopiquement équivalents (Théorème 6.1 de [Cha07]).

Le treillis des partitions joue un rôle important en théorie de l'homotopie [AM99] ; il permet de décrire la tour de Goodwillie du foncteur identité des espaces topologiques [Chi05]. Il reste à étudier dans le contexte du calcul de Goodwillie ce que donne la construction générale d'ensembles partiellement ordonnés de partitions opéradiques.

Pour poursuivre la généralisation donnée dans [5] à tout groupe de Weyl, une idée serait d'utiliser l'article de P. Salvatore et N. Wahl [SW03] : considérer des opérades sur d'autres groupes que $\mathbb{S}_n$ et généraliser, dans ce cadre général, la construction d'ensembles partiellement ordonnés de partitions opéradiques.

6. Produits de Manin, Dualité de Koszul, algèbres de Loday et conjecture de Deligne

Le but principal de [6] est d'utiliser les produits de Manin pour démontrer la conjecture de Deligne pour les algèbres de Loday codées par une opérade de Koszul.

Dans ses travaux sur les groupes quantiques et la géométrie non-commutative, Yuri I. Manin a introduit deux produits, appelés *blanc* et *noir*, dans la catégorie des algèbres associatives quadratiques [Man87, Man88]. Ces produits s'échangent par dualité de Koszul : toute paire d'algèbres quadratiques A et B de type fini, c'est-à-dire engendrées par des espaces de dimension finie, vérifie $(A \circ B)^! = A^! \bullet B^!$. La propriété essentielle de ces produits est l'adjonction suivante dans la catégorie des algèbres quadratiques de type fini

$$\mathrm{Hom}_{Quad.\,Alg}(A \bullet B^!,\, C) \cong \mathrm{Hom}_{Quad.\,Alg}(A,\, B \circ C).$$

En utilisant la notion de cohomomorphisme interne, Yu. I. Manin a démontré que $A \bullet A^!$ est une algèbre de Hopf et a ainsi pu réaliser certains groupes quantiques.

V. Ginzburg and M.M. Kapranov [GK94, GK95] ont étendu les produits blanc et noir de Manin aux opérades binaires quadratiques. Ces derniers s'échangent aussi par dualité de Koszul et ils vérifient la même adjonction. Par contre, leur définition

$$\begin{aligned} \mathcal{P} \bullet \mathcal{Q} &:= \mathcal{F}(V \otimes W)/\big(\Psi(R \otimes S)\big), \\ \mathcal{P} \circ \mathcal{Q} &:= \mathcal{F}(V \otimes W)/\big(\Phi^{-1}(R \otimes W^{\otimes 2} + V^{\otimes 2} \otimes S)\big). \end{aligned}$$

pour deux opérades $\mathcal{P} = \mathcal{F}(V)/(R)$ et $\mathcal{Q} = \mathcal{F}(W)/(S)$ est moins immédiate et repose sur deux foncteurs Φ et Ψ définis à la main.

Pour comprendre conceptuellement ces deux foncteurs et étendre la construction des produits de Manin nous avons introduit dans [6] la notion de *catégorie 2-monoïdale* qui est une catégorie munie de 2 produits monoïdaux compatibles. Dans ce cadre, les foncteurs Φ et Ψ sont définis par des propriétés universelles. Cela permet de définir le produit blanc pour toute paire de monoïdes présentés par générateurs et relations et le produit noir pour toute paire de comonoïdes présentés par (co)générateurs et (co)relations. Cette approche inclut les cas des algèbres associatives, des opérades non-symétriques, des opérades, des opérades colorées et des propérades.

Nous étudions en détails les produits blanc et noir pour les opérades binaires quadratiques. L'adjonction entre produit blanc et noir au niveau des opérades permet des définir des opérations naturelles sur les théories cohomologiques de déformation des algèbres. Grâce à cela, nous avons montré que la conjecture de Deligne n'est pas seulement vraie pour les algèbres associatives mais pour tous les types d'algèbres codées par des opérades non-symétriques binaires de Koszul de type fini. Enfin nous avons fourni quatre familles infinies d'exemples.

6.1. **Catégorie 2-monoïdale.** Rappelons qu'un *foncteur monoïdal faible* est un foncteur $F : (\mathcal{A}, \boxtimes_{\mathcal{A}}, I_{\mathcal{A}}) \to (\mathcal{B}, \boxtimes_{\mathcal{B}}, I_{\mathcal{B}})$ entre deux catégories monoïdales muni d'un morphisme $\iota : I_{\mathcal{B}} \to F(I_{\mathcal{A}})$ et de transformations naturelles

$$\varphi_{A,\,A'} \ :\ F(A) \boxtimes_{\mathcal{B}} F(A') \to F(A \boxtimes_{\mathcal{A}} A'),$$

pour tout A, A' dans $\mathcal{A}$, qui vérifient des conditions d'associativité et d'unitarité. L'intérêt de cette notion est qu'elle préserve les monoïdes [Bén63].

Définition (Catégorie 2-monoïdale faible)**.** Une *catégorie* 2*-monoïdale faible* est une catégorie $(\mathcal{A},\, \boxtimes,\, I,\, \otimes,\, K)$ telle que $(\mathcal{A},\, \boxtimes,\, I)$ et $(\mathcal{A},\, \otimes,\, K)$ soient des catégories monoïdales et telle que le bifoncteur $\otimes : (\mathcal{A} \times \mathcal{A},\, \boxtimes^2) \to (\mathcal{A},\, \boxtimes)$ soit un foncteur monoïdal faible.

Cette dernière condition stipule que les deux structures monoïdales sont reliées par des transformations naturelles, appelées *lois d'échange*,

$$(A \otimes A') \boxtimes (B \otimes B') \xrightarrow{\varphi_{A,A',B,B'}} (A \boxtimes B) \otimes (A' \boxtimes B'),$$

pour tout A, A', B et B' dans $\mathcal{A}$, qui vérifient une certaine condition d'associativité (Proposition 2 de [6]). Le but de cette définition est que le produit monoïdal $M \otimes N$ de deux $\boxtimes$-monoïdes M et N est encore un $\boxtimes$-monoïde.

Cette définition est plus générale que celle donnée par A. Joyal et R. Street [JS93] dans le cadre des catégories tensorielles tressées. Dans leur cas, les lois d'échange sont supposées être des isomorphismes naturels et les deux produits monoïdaux sont isomorphes. Elle est aussi plus générale que celle donnée par C. Balteanu, Z. Fiedorowicz, R.Schwänzl et R. Vogt [BFSV03] dans le cadre des catégories monoïdales itérées et des espaces de lacets itérés. Dans ces dernières, les deux structures monoïdales doivent être strictes et les unités égales. La définition de catégorie 2-monoïdale faible est motivée par les exemples, traités ci-dessous, qui n'entrent pas, dans le cadre des définitions précédentes.

En travaillant dans la catégorie duale, on définit les notions de *comonoïde* et de *foncteur comonoïdal faible.*

Définition (Catégorie 2-monoïdale)**.** Une *catégorie* 2*-monoïdale* est une catégorie 2-monoïdale faible où le bifoncteur $\otimes\,:\,(\mathcal{A}\times\mathcal{A},\,\boxtimes^2)\to(\mathcal{A},\,\boxtimes)$ est aussi un foncteur comonoïdal faible.

On définit le *produit de Hadamard* de deux $\mathbb{S}$-modules par $(V\otimes_H W)(n) := V(n)\otimes_{\mathbb{K}} W(n)$ et de deux $\mathbb{S}$-bimodules par $(V\otimes_H W)(m,\,n) := V(m,\,n)\otimes_{\mathbb{K}} W(m,\,n)$. Ce produit est bilinéaire et symétrique. L'unité est donnée par $K(m,\,n) := \mathbb{K}$, avec action triviale de $\mathbb{S}_n$ et de $\mathbb{S}_m$, pour tout n et m, (respectivement $K(n) = \mathbb{K}$ pour les $\mathbb{S}$-modules).

Proposition 40. *Les catégories*

$$(\mathbb{K}\text{-}\mathit{Mod},\,\otimes_{\mathbb{K}},\,\mathbb{K},\,\otimes_{\mathbb{K}},\,\mathbb{K})\subset(\mathbb{S}\text{-}\mathit{Mod},\circ,\,I,\,\otimes_H,\,K)\subset(\mathbb{S}\text{-}\mathit{biMod},\,\boxtimes,\,I,\,\otimes_H,\,K)$$

sont des catégories 2*-monoïdales, qui sont des sous-catégories* 2*-monoïdales pleines les unes dans les autres.*

Pour toute catégorie 2-monoïdale faible $(\mathcal{A},\,\boxtimes,\,I,\,\otimes,\,K)$, la catégorie des monoïdes pour le produit $\boxtimes$ est une catégorie monoïdale pour le produit $\otimes_H$. On définit alors la notion de *bimonoïde* comme un comonoïde dans cette catégorie. Dans les deux premiers cas précédents, on retrouve les notions de bigèbres et d'opérades de Hopf. Le dernier cas fournit une définition de *propérade de Hopf.*

6.2. **Produits blanc et noir de Manin : Définition générale.** Soit une catégorie 2-monoïdale faible $(\mathcal{A},\,\boxtimes,\,I,\,\otimes,\,K)$ dans laquelle le monoïde libre $\mathcal{F}(V)$ pour le produit $\boxtimes$ existe. Par la propriété universelle du monoïde libre, il existe un unique morphisme de $\boxtimes$-monoïdes $\Phi\,:\,\mathcal{F}(V\otimes W)\to\mathcal{F}(V)\otimes\mathcal{F}(W)$ qui factorise $V\otimes W\to\mathcal{F}(V)\otimes\mathcal{F}(W)$.

Nous expliquons ici la construction du produit blanc uniquement pour les propérades afin d'alléger la rédaction. Ce cas inclut celui des algèbres associatives et celui des opérades. Néanmoins, cette construction est valable dans toute catégorie 2-monoïdale faible avec des monoïdes libres pour $\boxtimes$. Soient $\mathcal{P}=\mathcal{F}(V)/(R)$ et $\mathcal{Q}=\mathcal{F}(W)/(S)$ deux propérades et soient $\pi_{\mathcal{P}}\,:\,\mathcal{F}(V)\twoheadrightarrow\mathcal{P}$ et $\pi_{\mathcal{Q}}\,:\,\mathcal{F}(W)\twoheadrightarrow\mathcal{Q}$ les projections canoniques respectives. La composée

$$\pi_{\mathcal{P}}\otimes_H\pi_{\mathcal{Q}}\,\circ\,\Phi\,:\,\mathcal{F}(V\otimes_H W)\rightarrowtail\mathcal{F}(V)\otimes_H\mathcal{F}(W)\twoheadrightarrow\mathcal{P}\otimes_H\mathcal{Q}$$

est un morphisme de propérades dont le noyau est l'idéal engendré par $\Phi^{-1}(R\otimes_H\mathcal{F}(W)+\mathcal{F}(V)\otimes_H S)$ dans $\mathcal{F}(V\otimes_H W)$.

Définition (Produit blanc)**.** Le *produit blanc* de $\mathcal{P}=\mathcal{F}(V)/(R)$ et $\mathcal{Q}=\mathcal{F}(W)/(S)$ est défini par la propérade quotient

$$\mathcal{P}\circ\mathcal{Q}:=\mathcal{F}(V\otimes_H W)/\big(\Phi^{-1}(R\otimes_H\mathcal{F}(W)+\mathcal{F}(V)\otimes_H S)\big).$$

Cette définition induit l'existence d'un monomorphisme de propérades $\mathcal{P}\circ\mathcal{Q}\rightarrowtail\mathcal{P}\otimes_H\mathcal{Q}$.

Dans le cas des algèbres associatives quadratiques, on retrouve la construction de Yu. I. Manin [Man87, Man88]. Dans le cas des algèbres associatives N-homogènes, on retrouve la construction de R. Berger, M. Dubois-Violette et M. Wambst [BDVW03]. Notons que dans ces deux cas, le monomorphisme précédent est un isomorphisme et donc que le produit blanc est isomorphe au produit de Segre (ou de Hadamard), i.e. produit poids par poids. Cette définition inclut le cas des algèbres hétérogènes, il serait par exemple intéressant de calculer le produit blanc pour les algèbres d'Artin-Shelter [AS87, LPWZ07] qui apparaissent en géométrie projective non-commutative et en physique mathématique. Dans le cas des opérades binaires quadratiques, on retrouve la construction de V. Ginzburg et M.M. Kapranov [GK94, GK95].

Le *produit noir* est défini dualement pour les coprопérades, cf 3.3 de [6]. Et nous avons montré que ces deux produits s'échangent par dualité de Koszul (Théorème 14 de [6]).

6.3. **Produits blanc et noir de Manin : le cas des opérades.** Nous avons commencé par donner un critère, portant sur la composition d'une opérade binaire quadratique $\mathcal{P}$, qui assure que le produit blanc avec toute opérade binaire quadratique $\mathcal{Q}$ est égal au produit de Hadamard $\mathcal{P} \circ \mathcal{Q} = \mathcal{P} \otimes_H \mathcal{Q}$. Les opérades Com, Perm, ComTrias entrent dans ce cadre.

Proposition 41. *Pour toute opérade binaire quadratique $\mathcal{Q}$, on a* $\mathrm{Com} \circ \mathcal{Q} \cong \mathrm{Com} \otimes_H \mathcal{Q} \cong \mathcal{Q}$, $\mathrm{Perm} \circ \mathcal{Q} \cong \mathrm{Perm} \otimes_H \mathcal{Q}$ *et* $\mathrm{ComTrias} \circ \mathcal{Q} \cong \mathrm{ComTrias} \otimes_H \mathcal{Q}$.

En introduisant des bases bien choisies et en dualisant linéairement la définition du produit noir des coopérades, nous avons retrouvé et explicité le produit noir des opérades binaires quadratiques de type fini de [GK94, GK95] : $\mathcal{P} \bullet \mathcal{Q} := \mathcal{F}(V \otimes_H W \otimes_H \mathbb{K}.\mathrm{sgn}_{\mathbb{S}_2})/\big(\Psi(R \otimes S)\big)$. Remarquons que la gestion des signes, par exemple, est non-triviale. L'opérade Lie de algèbres de Lie est le neutre pour le produit noir. Grâce à cette formule explicite, nous avons effectué les calculs suivants.

Théorème 42. *Les opérades suivantes sont isomorphes* $\mathrm{PreLie} \bullet \mathrm{Com} = \mathrm{Zinb}$ *et* $\mathrm{PreLie} \bullet \mathrm{As} = \mathrm{Dend}$*, et par dualité de Koszul* $\mathrm{Perm} \circ \mathrm{Lie} = \mathrm{Leib}$ *et* $\mathrm{Perm} \circ \mathrm{As} = \mathrm{Dias}$.

Rappelons que J.-L. Loday [LFCG01] a introduit l'opérade Dend des algèbres dendriformes qui sont des algèbres munies de deux produits dont la somme est un produit associatif. De la même manière, l'opérade Zinb code les algèbres Zinbiel (symétrie miroir de Leibniz) qui sont des algèbres munies d'un produit binaire $*$ dont la symétrisation $a * b + b * a$ est un produit associatif. Un tel procédé est appelé *scindage d'associativité*. Le théorème précédent montre que ce scindage d'associativité est obtenu en faisant le produit noir avec l'opérade PreLie. En effet, l'espace générateur de l'opérade PreLie est dimension deux et faire le produit noir avec PreLie double le nombre de produits définissant un type d'algèbres. Comme les algèbres permutatives se situent entre les algèbres associatives et les algèbres commutatives, $\mathrm{As} \to \mathrm{Perm} \to \mathrm{Com}$, nous avons explicité $\mathrm{PreLie} \bullet \mathrm{Perm}$, explicitant ainsi un scindage de l'associativité du produit des algèbres permutatives (Théorème 21 de [6]). Dans une récente prépublication, K. Uchino [Uch09] a montré que le produit noir avec l'opérade Perm créait des "produits dérivés" comme les crochets dérivés qui apparaissent en géométrie de Poisson, cf Y. Kosmann-Schwarzbach [KS96, KS04].

Comme l'application Φ est un isomorphisme dans le cas des algèbres associatives, le produit blanc est égal au produit de Hadamard (dit aussi produit de Segre dans ce cas). Cette relation particulière a permis à J. Backelin et R. Fröberg [BF85] de montrer que le produit blanc et noir de deux algèbres de Koszul est encore une algèbre de Koszul. Cette propriété n'étant plus vérifiée au niveau des opérades, son corollaire ne l'est pas non plus. Si on considère le produit noir $\mathrm{PreLie} \bullet \mathrm{Nil}$ de l'opérade PreLie avec l'opérade des algèbres nilpotentes, cette opérade n'est pas de Koszul (Théorème 24). La question en suspens est donc de trouver pour quelle classe d'opérades, les produits de Manin préservent le fait d'être Koszul.

On peut dépasser le cas binaire de la manière suivante. Pour tout $k \geq 2$, on considère la catégorie des opérades quadratiques k-aires de type fini, qui sont des opérades engendrées par un $\mathbb{S}$-module de dimension finie concentré en arité k. Considérons l'opérade $\mathrm{Lie}^{<k>}$ des algèbres de Lie k-aires qui sont des algèbres munies d'une crochet de Lie k-aire vérifiant une identité de Jacobi généralisée [Gne97]. Dualement, il existe une opérade $\mathrm{Com}^{<k>}$ codant les algèbres commutatives k-aires.

Théorème 43. *Les produits blanc et noir munissent la catégorie des opérades quadratiques k-aires de type fini de structures de catégories monoïdales symétriques dont* $\mathrm{Com}^{<k>}$ *est le neutre pour le produit blanc et* $\mathrm{Lie}^{<k>}$ *le neutre pour le produit noir. On a l'adjonction suivante*

$$\mathrm{Hom}_{k.\,Quad.\,Op.}(\mathcal{P} \bullet \mathcal{Q}^!,\ \mathcal{R}) \cong \mathrm{Hom}_{k.\,Quad.\,Op.}(\mathcal{P},\ \mathcal{Q} \circ \mathcal{R})$$

Ceci muni la catégorie des opérades quadratiques k-aires de type fini avec le produit blanc d'un cohomomorphisme interne $cohom(\mathcal{P},\ \mathcal{Q}) := \mathcal{P} \bullet \mathcal{Q}^!$. Ce résultat admet le corollaire suivant.

Théorème 44. *Pour toute opérade quadratiques k-aires de type fini $\mathcal{P}$, l'opérade $\mathcal{P} \bullet \mathcal{P}^!$ est une opérade de Hopf.*

C'est ce résultat au niveau des algèbres associatives qui a permis a Yu.I. Manin de réaliser certains groupes quantiques [Man87, Man87]. Les opérades de Hopf jouent un rôle important notamment en théorie de l'homotopie, cf. [Fre07]. Par exemple, le cas $\mathcal{P} = \mathrm{PreLie}$ et $\mathrm{PreLie} \bullet \mathrm{Perm}$ a été explicité plus haut. Nous espérons voir ce type d'exemple utilisé dans l'avenir. Pour un autre point de vue sur cette adjonction et les cohomomorphismes internes, nous renvoyons le lecteur à D. Borisov et Yu.I. Manin [BM08].

La proposition suivante est un corollaire immédiat du Théorème 43.

Proposition 45. *Pour tout opérade quadratique k-aire de type fini $\mathcal{P}$, il existe les morphismes naturels d'opérades suivants*

$$\mathrm{Lie}^{<k>} \to \mathcal{P}^! \circ \mathcal{P} \to \mathcal{P}^! \otimes_H \mathcal{P}.$$

6.4. **Complexe de déformation.** Soit $\mathcal{P}$ une opérade de Koszul, on considère le complexe de déformation

$$C_{\mathcal{P}}(A) := \mathrm{Der}_I\,(\Omega \mathcal{P}^{¡},\ \mathrm{End}_A) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{S}}(\overline{\mathcal{P}}^{¡}, \mathrm{End}_A) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\overline{\mathcal{P}}^{¡}(A), A),$$

défini à la section 4.

Le troisième module permet de munir le complexe de déformation d'opérations supplémentaires. À suspension près, le module $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{P}^{¡}(A), A) \cong (\mathcal{P}^{¡}(A))^* \otimes A$ est une algèbre sur $\mathcal{P}^! \otimes_H \mathcal{P}$. La proposition 45 permet de raffiner ce résulat.

Proposition 46. *Le complexe de déformation $C_{\mathcal{P}}(A)$ est un algèbre de Lie k-aire qui provient d'une algèbre sur $\mathcal{P}^! \circ \mathcal{P}$.*

Par contre, cette structure d'algèbre de Lie k-aire s'annule en homologie (Lemme 31 de [6]). Ce résultat s'explique de la manière suivante. Le produit preLie et le crochet intrinsèque viennent de la composition partielle de l'opérade de convolution, alors que la structure d'algèbre de Lie k-aire vient de la composition totale via les opérations *braces symétriques*. Or, la composition partielle engendre la composition totale et le produit preLie engendre les braces symétriques [OG08, LM05]. Comme la différentielle du complexe de déformation s'exprime à l'aide du crochet intrinsèque, les autres opérations sont homologiquement nulles. Il serait intéressant de raffiner, au cas par cas, cette approche par l'étude des opérations données par $\mathcal{P}^! \circ \mathcal{P}$, qui ne s'annulent a priori pas en homologie.

6.5. **Conjecture de Deligne généralisée.** La paragraphe précédent montre que pour obtenir des opérations (co)homologiques non triviales, il faut "briser" la symétrie. Les théorèmes 43, 44 et la proposition 45 sont vraies mutatis mutandis dans la catégorie des opérades non-symétriques k-aires quadratiques de type fini. Concentrons nous sur le cas binaire. Il faut alors considérer l'opérade non-symétrique As à la place de Com et Lie comme neutre pour les produits blanc et noir des opérades non-symétriques binaires quadratiques.

Comme il n'y a plus d'action du groupe symétrique, le complexe de déformation $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{P}^{¡}, \mathrm{End}_A)$ est une opérade non-symétrique, structure qui induit les fameuses opérations multilinéaire *braces (non-symétriques)* [Ger63, GV95]. Pour toute opérade non-symétrique binaire quadratique de type fini $\mathcal{P}$ et toute algèbre A dessus, l'analogue non-symétrique de la proposition 45 donne le morphisme d'opérades non-symétriques suivant

$$\mathrm{As} \to \mathcal{P}^! \otimes_H \mathcal{P} \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{P}^{\text{!`}}, \mathcal{P}) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathcal{P}^{\text{!`}}, \mathrm{End}_A).$$

Ce résultat donne le *produit cup* de la cohomologie de Hochschild, par exemple. Une telle opérade non-symétrique munie d'un morphisme de source As est appelée une *opérade multiplicative.*

Proposition 47. *Pour toute opérade non-symétrique binaire de Koszul et de type fini $\mathcal{P}$ et toute algèbre A dessus, le complexe de déformation $C_{\mathcal{P}}(A)$ est une opérade mulitplicative.*

À toute opérade multiplicative, on associe une structure cosimpliciale. La différentielle de ce complexe cosimplicial est égale à la différentielle du complexe de déformation (Lemme 43 de [6]), ce qui donne la proposition suivante.

Proposition 48. *Pour toute opérade non-symétrique binaire de Koszul et de type fini $\mathcal{P}$ et toute algèbre A dessus, le complexe de déformation $C_{\mathcal{P}}(A)$ est une* G-algèbre homotopique [GV95] *et son homologie $H_{\mathcal{P}}(A)$ est une algèbre de Gerstenhaber* [Ger63].

L'opérade des petits disques $\mathcal{D}_2$ est une opérade topolgique définie par les configurations de petits disques dans le disque unité. Cette opérade est une des premières introduites, son action permet de détecter les espaces de lacets deux fois itérés [BV73, May72]. En 1976, F. Cohen a montré que l'homologie de cette opérade était égale à l'opérade des algèbres de Gerstenhaber. Cela a conduit P. Deligne à la question suivante : "I would like the complex computing Hochschild cohomology to be an algebra over [the singular chain operad of the little disks] or a suitable version of it". Par cela, il entend une opérade homotopiquement équivalente à $\mathcal{D}_2$. Cette conjecture revient à relever la structure d'algèbre de Gerstenhaber de la (co)homologie au complexe de chaînes. Cette conjecture a été démontrée par différents auteurs [Tam98, Vor00, KS00, MS02, BF04, Kau07]. Toutes ces démonstrations reposent sur le fait que le complexe de Hoschschild d'une algèbre associative est une *G-algèbre homotopique.*

Nous ne prétendons pas ici donner une autre démonstration de cette conjecture. Notre approche est transverse : en utilisant les démonstrations du cas classique, nous montrons que ce résultat est vraie pour une large classe d'algèbres.

Théorème 49. *Pour toute opérade non-symétrique binaire de Koszul et de type fini $\mathcal{P}$ et toute algèbre A dessus, le complexe de déformation $C_{\mathcal{P}}(A)$ est une algèbre sur une opérade équivalente a l'opérade des chaînes singulières de l'opérade des petits disques.*

La seule difficulté pour démontrer ce théorème a été de construire suffisament d'opérations sur le complexe de déformation $C_{\mathcal{P}}(A)$. Le traitement fait est uniforme et utilise la propriété d'adjonction des produits de Manin. Au cas par cas, on doit pouvoir encore affiner la structure algébrique du complexe de déformation en considérant la structure d'algèbre sur $\mathcal{P}^! \circ \mathcal{P}$ à la place de As.

Comme les opérades Dias, TriAs, Dend et TriDend sont des opérades non-symétriques binaires de type fini. On peut considérer leurs produits blanc et noir dans la catégorie des opérades non-symétriques : $\mathrm{Dias}^{\circ n}$, $\mathrm{TriAs}^{\circ n}$, $\mathrm{Dend}^{\bullet n}$ et $\mathrm{TriDend}^{\bullet n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Les deux premières sont ensemblistes et sont les duales de Koszul des deux dernières. L'ensemble partiellement ordonné de partitions associé à $\mathrm{Dias}^{\circ n}$ est formé de partitions ordonnées avec n pointages différents, et celui associé à $\mathrm{TriAs}^{\circ n}$ est formé de partitions ordonnées avec n multipointages différents. Leurs intervalles maximaux sont semi-modulaires. La méthode de [4] s'applique donc pour donner le théorème suivant.

Théorème 50. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les opérades* $\mathrm{Dias}^{\circ n}$, $\mathrm{TriAs}^{\circ n}$, $\mathrm{Dend}^{\bullet n}$ *et* $\mathrm{TriDend}^{\bullet n}$ *sont des opérades de Koszul sur $\mathbb{Z}$. Dans chacun de ces cas, le complexe de déformation $C_{\mathcal{P}}(A)$ est une algèbre sur une opérade équivalente a l'opérade des chaînes singulières de l'opérade des petits disques.*

Ceci fournit quatre familles infinies d'exemple d'opérades pour lesquelles la conjecture de Deligne généralisée est vraie.

7. Algèbres de Batalin-Vilkovisky à homotopie près, Théorie topologique des champs conformes, algèbres vertex d'opérateurs et conjecture de Deligne cyclique

Dans l'article [9], coécrit avec Imma Gálvez-Carillo et Andy Tonks, nous avons développé la dualité de Koszul hétérogène, voir 3.4, pour expliciter la notion d'algèbre de Batalin-Vilkovisky à homotopie près. Au lieu de proposer une nouvelle définition à la main, nous fournissons un remplacement cofibrant explicit de l'opérade BV qui code les algèbres de Batalin-Vilkovisky. La notion d'algèbre de Batalin-Vilkovisky est reliée à la théorie topologique des champs conformes, aux algèbres vertex et à la conjecture de Deligne cyclique. Comme toute catégorie d'algèbres sur une opérade cofibrante possède de bonnes propriétés homotopiques, nous en déduisons des résultats dans ces différents domaines.

7.1. **Algèbres de Batalin-Vilkovisky à homotopie près.**

Définition (Algèbre de Batalin-Vilkovisky)**.** Une *algèbre de Batalin-Vilkovisky* est un module différentiel gradué (A, d) muni de

- ▷ un produit binaire symétrique $\bullet$ de degré 0,
- ▷ d'un crochet symétrique $\langle\ ,\ \rangle$ de degré $+1$,
- ▷ d'un opérateur unaire Δ de degré $+1$,

tels que d soit une dérivation par rapport à chacun d'entre eux et tels que

- ▷ le produit $\bullet$ soit associatif,
- ▷ le crochet vérifie la relation de Jacobi
$$\langle\langle\ ,\ \rangle,\ \rangle + \langle\langle\ ,\ \rangle,\ \rangle.(123) + \langle\langle\ ,\ \rangle,\ \rangle.(321) = 0,$$
- ▷ le produit $\bullet$ et le crochet $\langle\ ,\ \rangle$ vérifient la relation de Leibniz
$$\langle\text{-},\text{-}\bullet\text{-}\rangle \ = \ (\langle\text{-},\text{-}\rangle\bullet\text{-}) \ + \ (\text{-}\bullet\langle\text{-},\text{-}\rangle).(12),$$
- ▷ l'opération Δ est de carré nul $\Delta^2 = 0$,
- ▷ le crochet mesure l'obstruction à ce que Δ soit une dérivation par rapport à $\bullet$
$$\langle\text{-},\text{-}\rangle \ = \ \Delta\circ(\text{-}\bullet\text{-}) \ - \ (\Delta(\text{-})\bullet\text{-}) \ - \ (\text{-}\bullet\Delta(\text{-})),$$
- ▷ l'opérateur Δ est une dérivation graduée par rapport au crochet
$$-\Delta(\langle\text{-},\text{-}\rangle) \ = \langle\Delta(\text{-}),\text{-}\rangle \ + \ \langle\text{-},\Delta(\text{-})\rangle.$$

Toutes les relations sont quadratiques sauf l'avant-dernière qui est de poids 1 et 2. On applique la dualité de Koszul hétérogène de la section 3.4. La duale de Koszul de BV est égale, à suspension près, à $\mathrm{qBV}^{\text{!`}} \cong (\mathbb{K}[\delta])^* \otimes \mathcal{C}om^* \circ (\mathcal{L}ie^1)^*$, où $\mathbb{K}[\delta]$ est l'algèbre polynomiale à un générateur. La différentielle interne d_φ est relié à la différentielle de Chevalley-Eilenberg d'une algèbre de Lie libre, voir le lemme 5 de [9] pour la formule exacte.

Théorème 51. *Une algèbre de Batalin-Vilkovisky à homotopie près est un module différentiel gradué A muni d'opérations*
$$m^d_{p_1,\ldots,p_n} : \overline{(sA)^{\otimes p_1}} \wedge \cdots \wedge \overline{(sA)^{\otimes p_n}} \longrightarrow sA, \qquad \textit{pour } n,\ p_1, \ldots, p_n \geq 1,\ d \geq 0,$$
de degré $2d + n - 2$, où $\overline{(sA)^{\otimes p}}$ est le quotient de $(sA)^{\otimes p}$ par l'image des battages (shuffles) non-triviaux. Ces opérations vérifient les relations
$$\sum_{r=1}^{n} \sum_{\substack{d'+d''=d\\ I\sqcup J=\{1,\ldots,n\}}} (-1)^{\varepsilon+\varepsilon'+\varepsilon''}\, m^{d'}_{t,p_{j_1},\ldots,p_{j_{n-r}}}\Big(\sum_{q_1,\ldots,q_r\geq 1} m^{p_{i_1},\ldots,p_{i_r};d''}_{q_1,\ldots,q_r}(a_{i_1}\wedge\cdots\wedge a_{i_r})\wedge a_{j_1}\wedge\cdots\wedge a_{j_{n-r}}\Big)$$
$$+\sum_{r=1}^{n}\sum_{p'_r+p''_r=p_r}(-1)^{\varepsilon'''}\, m^{d-1}_{p_1,\ldots,p_{r-1},p'_r,p''_r,p_{r+1},\ldots,p_n}(a_1\wedge\cdots\wedge\overline{v^r_{[1,p'_r]}}\wedge\overline{v^r_{[p'_r+1,p_r]}}\wedge\cdots\wedge a_n) = 0$$

avec $I = \{i_1 < \cdots < i_r\}$*,* $J = \{j_1 < \cdots < j_{n-r}\}$*,* $t = 1 + \sum p_{i_k} - q_k$*, et où* $m^{p_1,\ldots,p_r;d'}_{q_1,\ldots,q_r}$ *est l'extension par battage de* $m^{d'}_{q_1,\ldots,q_r}$ *à* $\overline{(sA)^{\otimes p_1}} \wedge \cdots \wedge \overline{(sA)^{\otimes p_r}}$*. Le signe* $(-1)^{\varepsilon+\varepsilon'}$ *vient de la règle de Koszul du réarrangement des* a_k*,* $\varepsilon'' = r(n-r)$ *et* $\varepsilon''' = |a_1| + \cdots + |a_{r-1}|$*.*

- ◇ Les opérations $m^0_{p_1,\ldots,p_n}$ munissent A d'une structure de G_∞-algèbre.
- ◇ Les opérations $m^0_{1,\ldots,1}$ munissent sA d'une structure de L_∞-algèbre.
- ◇ Les opérations m^0_p munissent A d'une structure de Com_∞-algèbre.

E. Getzler a donné une définition équivalente d'algèbre de Batalin-Vilkovisky en terme d'opérateur différentiel d'ordre ≤ 2, cf. [Get94, Proposition 1.2]. O. Kravchenko [Kra00] a utilisé cette définition pour proposer une définition d'une algèbre de Batalin-Vilkovosky à homotopie près, appelée *algèbre de Batalin-Vilkovosky commutative à homotopie près.*

Proposition 52. *Une algèbre de Batalin-Vilkovisky commutative à homotopie près est une algèbre de Batalin-Vilkovisky à homotopie près où toutes les opérations soient nulles sauf éventuellement* m^0_2 *et les* $m^d_{1,\ldots,1}$*.*

D. Tamarkin et B. Tsygan ont proposé une définition plus générale dans [TT00]. Ils considèrent l'algèbre de Gerstenhaber libre $\mathrm{G}(A^*)$ sur la duale de A. Une structure de G_∞-algèbre est équivalente à la donnée d'une dérivation de carré nul Δ_{-1}. Ils définissent une algèbre de Batalin-Vilkovisky à homotopie près par un opérateur de carré nul

$$\Delta \quad = \quad \Delta_{-1} + \Delta_1 + \Delta_{\mathrm{Lie}} + \Delta_3 + \Delta_5 + \ldots$$

où Δ_{2d-1} est de degré $2d-1$ et d'ordre $\leq d+1$, et où Δ_{Lie} est le dual de d_φ. Cette définition est simple à énoncer. Par contre, il est très difficile de l'expliciter complètement en terme d'opérations génératrices et de relations.

Proposition 53. *Une algèbre de Batalin-Vilkovisky à homotopie près est équivalente à la donnée précédente où on suppose en outre que chaque* Δ_{2d-1} *soit d'ordre* 1 *et qu'il soit une dérivation par rapport à la structure d'algèbre de Lie de* $\mathrm{G}(A^*)$ *.*

7.2. **Théorie topologique des champs conformes et espaces de lacets doubles.** E. Getzler a introduit dans [Get94] l'*opérade des petits disques à bord* fD, voir aussi [SW03]. Elle est définie par les configurations de disques, avec un point marqué sur le bord, dans le disque unité. Il a montré que l'homologie de l'opérade des petits disques à bord est égale à l'opérade BV : $H_\bullet(\mathrm{fD}) \cong \mathrm{BV}$. Donc l'opérade des petits disques à bord fournit un modèle topologique pour la notion d'algèbre de Batalin-Vilokoviky à homotopie près. La relation exacte avec la notion d'algèbre de Batalin-Vilkovisky à homotopie près est la suivante.

Proposition 54. *Il existe un quasi-isomorphisme d'opérades* $\mathrm{BV}_\infty \xrightarrow{\sim} C_\bullet(\mathrm{fD})$ *qui relève la résolution* $\mathrm{BV}_\infty \xrightarrow{\sim} \mathrm{BV}$*.*

Ce résultat se démontre grâce à la formalité de l'opérade fD, voir [GS08, Sev09] et le fait que BV_∞ soit cofibrante dans la catégorie de modèles des opérades (section 4.1).

Comme l'opérade topologique fD des petits disques à bord agit sur l'espace de lacets doubles de tout espace topologique muni d'une action du cercle, on en déduit le théorème suivant.

Corollaire 55. *Pour tout espace topologique* X *muni d'une action du cercle* S^1*, le complexe des chaînes singulières* $C^{sing}_\bullet(X)$ *possède une structure d'algèbre de Batalin-Vilkovisky à homotopie près qui induit le produit de Pontryagin et le crochet de Browder en homologie.*

G. Segal [Seg04] a introduit le *prop des surfaces de Riemann* qui est défini par les classes d'isomorphismes de surfaces de Riemann de genre quelconque avec des applications biholomorphes depuis l'union disjointes de $n+m$ disques. Il s'agit en fait d'un prop librement engendré par la propérade $\mathcal{R}$ des surface de Riemann connexes. L'image des n premiers disques forment les entrées et l'image des m disques suivants forment les sorties. La composition de cette propérade est définie en recollant les surfaces selon ces disques. Un espace topologique avec une structure de gèbre sur

$\mathcal{R}$ est appelé une *théorie de champs conformes* et un module différentiel gradué avec une structure de gèbre sur la propérade $C_\bullet(\mathcal{R})$ des chaînes de $\mathcal{R}$ est appelé une *théorie topologique de champs conformes* ou *TCFT* pour l'abréviation anglo-saxone.

Si on ne considère que les sphères de Riemann, surface de genre 0, avec une seule sortie, on obtient une opérade R dont fD est un retract par déformation.

Théorème 56. *Il existe un quasi-isomorphisme d'opérades* $\mathrm{BV}_\infty \xrightarrow{\sim} C_\bullet(\mathrm{R})$ *tel que le diagramme suivant soit un diagramme commutatif de quasi-isomorphismes.*

$$\begin{tikzcd}
C_\bullet(\mathrm{R}) \arrow[r, shift right, two heads] & C_\bullet(\mathrm{fD}) \arrow[l, shift right, tail] \arrow[d, <->, dotted] \\
\mathrm{BV}_\infty \arrow[u] \arrow[ur] \arrow[r] & \mathrm{BV} \cong H_\bullet(\mathrm{fD}).
\end{tikzcd}$$

Corollaire 57. *Toute théorie topologique de champs conformes est munie d'une structure d'algèbre de Batalin-Vilkovisky à homotopie près qui relève la structure d'algèbre de Batalin-Vilkovisky sur son homologie définie par Getzler* [Get94].

Donc une importante part de la structure de TCFT est codée dans la notion d'algèbre de Batalin-Vilkovisky à homotopie près.

7.3. **Conjecture de Deligne cyclique.** La résultat de la section précédente permet de démontrer la conjecture de Deligne cyclique avec l'opérade BV_∞.

Si on considère une algèbre de Calabi-Yau [Gin06] ou une algèbre de Frobenius [Tra02, Men07], alors on peut transférer le bord de Connes de l'homologie de Hochschild à la cohomologie de Hochschild. Ceci définit un opérateur Δ sur la cohomologie de Hochschild qui en fait une algèbre de Batalin-Vilkovisky. La conjecture de Deligne cyclique consiste à relever de manière cohérente cette structure à homotopie près sur le complexe de cochaînes.

Théorème 58 (Conjecture de Deligne cyclique)**.** *Soit A une algèbre de Calabi-Yau ou une algèbre de Frobenius. Il existe une structure d'algèbre de Batalin-Vilkovisky à homotopie près sur le complexe des cochaînes de Hochschild de A qui relève la structure d'algèbre de Batalin-Vilkovisky sur la cohomologie, telle que*

$$\mathrm{BV}_\infty \xrightarrow{\sim} C_\bullet(\mathrm{fD}) \to \mathrm{End}_{CH^\bullet(A)}$$

Pour le démontrer, dans le cas Calabi-Yau, on utilise [Cos07] où il est montré que l'opérade R agit sur $CH^\bullet(A)$ et dans le cas des algèbres de Frobenius, on utilise [Kau04], où il est montré que l'opérade fD agit sur $CH^\bullet(A)$.

La conjecture de Deligne cyclique a été démontrée par [Kau04, TZ06, Cos07, KS06] pour différents modèles topologiques de l'opérade BV. À notre connaissance, aucun de ces modèles n'est cofibrant. La solution proposée ici donne donc un modèle canonique pour cette conjecture. Pour aller plus loin, nous voudrions conjecturer, comme [TT00] que cette structure d'algèbre de Batalin-Vilkovisky à homotopie près est formelle.

7.4. **Théorie de la déformation et de l'obstruction appliquée aux algèbres vertex d'opérateurs.** Pour démontrer le même type de résultat que précédement sur les TCFT au niveau des algèbres vertex d'opérateurs, nous avons besoin de développer la théorie de la déformation et d'obstruction des gèbres sur une propérade.

Y.-Z. Huang a montré dans [Hua97] qu'une algèbre vertex d'opérateurs est une d'algèbre d'un certain type sur l'opérade R des sphères de Riemann. Lian-Zuckerman ont muni la cohomologie d'une algèbre vertex d'opérateurs d'une structure d'algèbre de Batalin-Vilkovisky. Ils en ont conjectué que cette structure se relevait de manière cohérente sur l'algèbre elle-même en une structure à homotopie près [LZ93]. Le modèle pour la notion d'algèbre de Batalin-Vilkovisky à homotopie près donnée ici permet de résoudre cette conjecture.

Théorème 59. *Toute algèbre vertex d'opérateurs de poids conforme $\mathbb{N}$-gradué admet une structure explicite d'algèbre de Batalin-Vilkovisky à homotopie près qui étende les opéations définies par Lian-Zuckerman et qui relève la structure d'algèbre de Batalin-Vilkovisky de sa cohomologie.*

La démonstration de ce résultat repose sur la théorie de l'obstruction des structures de $\mathcal{P}_\infty$-gèbres sur une propérade de Koszul (Appendice B de [9]). La duale de Koszul de $\mathcal{P}$ est graduée par un poids, ce qui induit que l'algèbre de convolution $\mathfrak{g}_\mathcal{P} = \mathrm{Hom}_\mathbb{S}(\mathcal{P}^¡, \mathrm{End}_A)$ est graduée par un poids. Ici on a $\mathfrak{g}_{\mathrm{BV}} := \mathrm{Hom}_\mathbb{S}(\mathrm{BV}^¡, \mathrm{End}_A)$ et $\mathrm{BV}^¡ \cong (\mathrm{qBV})^¡ \cong \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} (\mathrm{qBV})^{¡(n)}$. On peut alors travailler par récurrence ; la possibilité d'itérer la construction d'un morphisme tordant dépend d'un certain groupe d'homologie qui est nul ici. De plus, la définition d'algèbre vertex forunit un homotopie explicite pour ces complexes de chaînes, ce qui permet de construire explicitement la structure d'algèbre de Batalin-Vilkovisky.

Plus précisément, on explicite l'algèbre de convolution de la manière suivante.

Proposition 60. *L'algèbre de Lie différentielle graduée de convolution $\mathfrak{g}_{\mathrm{BV}} := \mathrm{Hom}_\mathbb{S}(\mathrm{BV}^¡, \mathrm{End}_A)$ est isomorphe à $\mathfrak{g}_\mathrm{G}[[\hbar]] := \mathfrak{g}_\mathrm{G} \otimes \mathbb{K}[[\hbar]]$, où $\mathfrak{g}_\mathrm{G}$ est la dg algèbre de Lie de convolution $\mathrm{Hom}_\mathbb{S}(\mathrm{G}^¡, \mathrm{End}_A)$ associée à l'opérade de Gerstenhaber G. Le paramètre formel $\hbar$ est de degré -2. La différentielle ∂ de $\mathfrak{g}_\mathrm{G}[[\hbar]]$ est la somme de deux termes $\partial = \partial_0 + \partial_1$, où ∂_0 est la dérivation engendrée par celle de $\mathfrak{g}_\mathrm{G}$ et où ∂_1 augmente la puissance de $\hbar$ de 1.*

Soit $\alpha \in \mathrm{Tw}(\mathrm{BV}^¡, \mathrm{End}_A)$ une structure d'algèbre de Batalin-Vilkovisky à homotopie près, le complexe de déformation définissant la cohomologie de cette algèbre est donné par l'algèbre de Lie différentielle graduée tordue par α :

$$\mathfrak{g}_{\mathrm{BV}}^\alpha \cong \big(\mathfrak{g}_\mathrm{G}[[\hbar]],\, [\ ,\ ],\, \partial_0 + \partial_1 + [-, \alpha]\big).$$

Ainsi le complexe de chaînes définissant la cohomologie d'une algèbre de Batalin-Vilkovisky à homotopie près est une extension formelle de celui définissant la cohomologie d'une algèbre de Gerstenhaber à homotopie près. La forme particulière de l'opérade BV et de l'algèbre de Lie de convolution permet de définir une théorie de l'obstruction relative. Soit $\alpha_0 \in \mathrm{Tw}(\mathrm{G}^¡, \mathrm{End}_A)$ une structure d'algèbre de Gerstenhaber à homotopie près sur A.

Théorème 61. *Soit $\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_n \in \prod_{k=0}^n \mathfrak{g}^\mathrm{G} \otimes \hbar^k \mathbb{K}$ un élément qui vérifie l'équation de Maurer-Cartan jusqu'au poids n. On considère*

$$\widetilde{\alpha}_{n+1} := \partial_1(\alpha_n) + \frac{1}{2} \sum_{\substack{k+l=n+1\\ k,l\geq 1}} [\alpha_k, \alpha_l].$$

(1) *Dans $\mathfrak{g}_\mathrm{G} \otimes \hbar^{n+1}\mathbb{K}$, on a $\partial^{\alpha_0}(\widetilde{\alpha}_{n+1}) = 0$, c'est-à-dire $\widetilde{\alpha}_{n+1}$ est un cycle de degré -2.*

(2) *Il existe un élément $\alpha_{n+1} \in \mathfrak{g}^\mathrm{G}[\hbar^{n+1}]$ tel que $\alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_{n+1}$ vérifie l'équation de Maurer-Cartan en poids $n+1$ dans $(\mathfrak{g}_{\mathrm{BV}}, \partial)$ si et seulement si la classe de $\widetilde{\alpha}_{n+1}$ dans $\mathrm{H}_{-2}(\mathfrak{g}^\mathrm{G} \otimes \hbar^{n+1}\mathbb{K}, \partial^{\alpha_0})$ s'annule.*

On applique ce théorème de la manière suivante.

Théorème 62. *Soit α_0 une structure d'algèbre de Gerstenhaber à homotopie près sur un module différentiel gradué A. Si les groupes de cohomologie négatifs 2-périodiques de l'algèbre de Gerstenhaber à homotopie près A s'annulent, c'est-à-dire $\mathrm{H}_{-2n}((\mathrm{Hom}_\mathbb{S}(\mathrm{G}^¡, \mathrm{End}_A), \partial^{\alpha_0})) = 0$ pour $n \geq 2$, alors cette structure peut être étendue en une structure d'algèbre de Batalin-Vilkovisky à homotopie près.*

En d'autres termes, les groupes de cohomologie négatifs 2-périodiques d'une G_∞-algèbre mesurent les obstructions pour relever cette structure en une structure d'algèbre de Batalin-Vilkovisky à homotopie près.

Conclusion et ouverture

Les méthodes développées ici permettent aussi de faire du tranfert explicite de structures de $\mathcal{P}_\infty$-gèbres à travers des équivalences d'homotopie. La résolution propéradique bar-cobar appliquée aux chaînes de la propérade des surfaces de Riemann définit la notion de *TCFT à homotopie près*. Ceci est une autre histoire et sera détaillé ultérieurement.

Il existe des problèmes qui requièrent toujours l'utilisation des props : l'approche de S.A. Merkulov de la déformation par quantification [Mer04], la généralisation du théorème de Cartier-Milnor-Moore aux différents types de bigèbres par J.-L. Loday [Lod08] et le problème de la bar construction itérée, cf. B. Fresse [Fre07]. Il ne s'agit donc pas d'une fin mais d'un début. Nous espérons que certaines idées développées ici au niveau des propérades pourront en un sens être généralisées aux props.

Références

[Agu00] Marcelo Aguiar, *Infinitesimal Hopf algebras*, New trends in Hopf algebra theory (La Falda, 1999), Contemp. Math., vol. 267, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000, pp. 1–29.

[AM99] Greg Arone and Mark Mahowald, *The Goodwillie tower of the identity functor and the unstable periodic homotopy of spheres*, Invent. Math. **135** (1999), no. 3, 743–788.

[And67] Michel André, *Méthode simpliciale en algèbre homologique et algèbre commutative*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 32, Springer-Verlag, Berlin, 1967.

[AS87] Michael Artin and William F. Schelter, *Graded algebras of global dimension* 3, Adv. in Math. **66** (1987), no. 2, 171–216.

[Bac76] K. Baclawski, *Homology and combinatorics of ordered sets*, Ph.D. thesis, Harvard Univ., Cambridge, Mass., 1976.

[Bar70] Michael Barr, *Coequalizers and free triples*, Math. Z. **116** (1970), 307–322.

[BD04] Alexander Beilinson and Vladimir Drinfeld, *Chiral algebras*, American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 51, American Mathematical Society, Providence, RI, 2004.

[BDVW03] Roland Berger, Michel Dubois-Violette, and Marc Wambst, *Homogeneous algebras*, J. Algebra **261** (2003), no. 1, 172–185.

[Bén63] Jean Bénabou, *Catégories avec multiplication*, C. R. Acad. Sci. Paris **256** (1963), 1887–1890.

[BF85] Jörgen Backelin and Ralf Fröberg, *Koszul algebras, Veronese subrings and rings with linear resolutions*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. **30** (1985), no. 2, 85–97.

[BF04] Clemens Berger and Benoit Fresse, *Combinatorial operad actions on cochains*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **137** (2004), no. 1, 135–174.

[BFSV03] C. Balteanu, Z. Fiedorowicz, R. Schwänzl, and R. Vogt, *Iterated monoidal categories*, Adv. Math. **176** (2003), no. 2, 277–349.

[BGS82] A. Björner, A. M. Garsia, and R. P. Stanley, *An introduction to Cohen-Macaulay partially ordered sets*, Ordered sets (Banff, Alta., 1981), NATO Adv. Study Inst. Ser. C : Math. Phys. Sci., vol. 83, 1982, pp. 583–615.

[Bjö80] Anders Björner, *Shellable and Cohen-Macaulay partially ordered sets*, Trans. Amer. Math. Soc. **260** (1980), no. 1, 159–183.

[BJT97] Hans-Joachim Baues, Mamuka Jibladze, and Andy Tonks, *Cohomology of monoids in monoidal categories*, Operads : Proceedings of Renaissance Conferences (Hartford, CT/Luminy, 1995) (Providence, RI), Contemp. Math., vol. 202, Amer. Math. Soc., 1997, pp. 137–165.

[BM03] C. Berger and I. Moerdijk, *Axiomatic homotopy theory for operads*, Comment. Math. Helv. **78** (2003), no. 4, 805–831.

[BM06] Clemens Berger and Ieke Moerdijk, *The Boardman-Vogt resolution of operads in monoidal model categories*, Topology **45** (2006), no. 5, 807–849.

[BM08] Dennis V. Borisov and Yuri I. Manin, *Generalized operads and their inner cohomomorphisms*, Geometry and dynamics of groups and spaces, Progr. Math., vol. 265, Birkhäuser, Basel, 2008, pp. 247–308.

[Bor86] Richard E. Borcherds, *Vertex algebras, Kac-Moody algebras, and the Monster*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **83** (1986), no. 10, 3068–3071.

[Bro59] Edgar H. Brown, Jr., *Twisted tensor products. I*, Ann. of Math. (2) **69** (1959), 223–246.

[BV73] J. M. Boardman and R. M. Vogt, *Homotopy invariant algebraic structures on topological spaces*, Springer-Verlag, Berlin, 1973, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 347.

[BW06] Anders Björner and Michelle L. Wachs, *Geometrically constructed bases for homology of partition lattices of type A, B and D*, Electron. J. Combin. **11** (2004/06), no. 2, Research Paper 3, 26 pp. (electronic).

[Car55] H. Cartan, *Dga-modules (suite), notion de construction*, Séminaire Henri Cartan (7) **2** (1954-55), Exposé No. 3.

[CFL08] A. Cieliebak, K. Fukaya, and J. Latschev, *prépublication*.

[Cha01] Frédéric Chapoton, *Un endofoncteur de la catégorie des opérades*, Dialgebras and related operads, Lecture Notes in Math., vol. 1763, Springer, Berlin, 2001, pp. 105–110.

[Cha04] Moira Chas, *Combinatorial Lie bialgebras of curves on surfaces*, Topology **43** (2004), no. 3, 543–568.

[Cha07] F. Chapoton, *Hyperarbres, arbres enracinés et partitions pointées*, Homology, Homotopy Appl. **9** (2007), no. 1, 193–212 (electronic).

[Chi05] Michael Ching, *Bar constructions for topological operads and the Goodwillie derivatives of the identity*, Geom. Topol. **9** (2005), 833–933 (electronic).

[CK98] Alain Connes and Dirk Kreimer, *Hopf algebras, renormalization and noncommutative geometry*, Comm. Math. Phys. **199** (1998), no. 1, 203–242.

[CL01] Frédéric Chapoton and Muriel Livernet, *Pre-Lie algebras and the rooted trees operad*, Internat. Math. Res. Notices (2001), no. 8, 395–408.

[CL07] F. Chapoton and M. Livernet, *Relating two Hopf algebras built from an operad.*, Internat. Math. Res. Notices, no.24, 27p. (2007).

[Con85] Alain Connes, *Noncommutative differential geometry*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1985), no. 62, 257–360.

[Cos07] Kevin Costello, *Topological conformal field theories and Calabi-Yau categories*, Adv. Math. **210** (2007), no. 1, 165–214.

[Cra95] S. E. Crans, *Quillen closed model structures for sheaves*, J. Pure Appl. Algebra **101** (1995).

[CS99] M. Chas and D. Sullivan, *String topology*, `http ://arxiv.org/abs/math/9911159` (à paraître dans Annals of Math.) (99).

[Cur06] P.-L. Curien, *Operads, clones, and distributive laws*, `http ://www.pps.jussieu.fr/∼curien/Operads--Strasbourg.ps` (soumis) (2006).

[DCTT08] Gabriel C. Drummond-Cole, John Terilla, and Thomas Tradler, *Algebras over cobar(cofrob)*, `arXiv.org :0807.1241` (2008).

[DK07] V.V. Dotsenko and A.S. Khoroshkin, *Character formulas for the operad of two compatible brackets and for the bi-Hamiltonian operad.*, Funct. Anal. Appl. **41** (2007), no. 1, 1–17.

[Dol07] Vasiliy A. Dolgushev, *Erratum to : "a proof of tsygan's formality conjecture for an arbitrary smooth manifold"*, `arXiv.org :math/0703113` (2007).

[Dri87] V. G. Drinfel′d, *Quantum groups*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Berkeley, Calif., 1986) (Providence, RI), Amer. Math. Soc., 1987, pp. 798–820.

[DS95] W. G. Dwyer and J. Spaliński, *Homotopy theories and model categories*, Handbook of algebraic topology, North-Holland, Amsterdam, 1995, pp. 73–126.

[Dub74] Eduardo J. Dubuc, *Free monoids*, J. Algebra **29** (1974), 208–228.

[EH08] B. Enriquez and G. Halbout, *Quantization of coboundary lie bialgebras*, to appear in Annals of Math. (2008).

[Eis05] David Eisenbud, *The geometry of syzygies*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 229, Springer-Verlag, New York, 2005, A second course in commutative algebra and algebraic geometry.

[Far79] F.D. Farmer, *Cellular homology for posets*, Math. Japon. **23** (1978/79), no. 6, 607–613.

[FHT01] Yves Félix, Stephen Halperin, and Jean-Claude Thomas, *Rational homotopy theory*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 205, Springer-Verlag, New York, 2001.

[Fre04] Benoit Fresse, *Koszul duality of operads and homology of partition posets*, Homotopy theory : relations with algebraic geometry, group cohomology, and algebraic K-theory, Contemp. Math., vol. 346, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004, pp. 115–215.

[Fre07] Benoit Fresse, *The universal hopf operads of the bar construction*, `arXiv.org :math/0701245` (2007).

[Gan03] Wee Liang Gan, *Koszul duality for dioperads*, Math. Res. Lett. **10** (2003), no. 1, 109–124.

[Ger63] M. Gerstenhaber, *The cohomology structure of an associative ring*, Ann. of Math. (2) **78** (1963), 267–288.

[Get94] E. Getzler, *Batalin-Vilkovisky algebras and two-dimensional topological field theories*, Comm. Math. Phys. **159** (1994), no. 2, 265–285.

[Gin06] V. Ginzburg, *Calabi-Yau algebras*, `arXiv.org :math/0612139` (2006).

[GJ94] Ezra Getzler and J. D. S. Jones, *Operads, homotopy algebra and iterated integrals for double loop spaces*, `hep-th/9403055` (1994).

[GK94] Victor Ginzburg and Mikhail Kapranov, *Koszul duality for operads*, Duke Math. J. **76** (1994), no. 1, 203–272.

[GK95] V. Ginzburg and M. Kapranov, *Erratum to : "Koszul duality for operads" [Duke Math. J.* **76** *(1994), no. 1, 203–272; MR1301191 (96a :18004)]*, Duke Math. J. **80** (1995), no. 1, 293.

[Gne97] Allahtan Victor Gnedbaye, *Opérades des algèbres $(k+1)$-aires*, Operads : Proceedings of Renaissance Conferences (Hartford, CT/Luminy, 1995), Contemp. Math., vol. 202, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997, pp. 83–113. MR MR1436918 (98a :17003)

[Gra07] Johan Granåker, *Strong homotopy properads*, Int. Math. Res. Not. IMRN (2007), no. 14.

[GS86] V. K. A. M. Gugenheim and J. D. Stasheff, *On perturbations and A_∞-structures*, Bull. Soc. Math. Belg. Sér. A **38** (1986), 237–246 (1987).

[GS90] M. Gerstenhaber and S.D. Schack, *Bialgebra cohomology, deformations, and quantum groups*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **87** (1990), 478–481.

[GS07] Paul Goerss and Kristen Schemmerhorn, *Model categories and simplicial methods*, Interactions between homotopy theory and algebra, Contemp. Math., vol. 436, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007, pp. 3–49.

[GS08] J. Giansiracusa and P. Salvatore, *Formality of the chain operad of framed little disks*, preprint (2008).

[GV95] Murray Gerstenhaber and Alexander A. Voronov, *Homotopy G-algebras and moduli space operad*, Internat. Math. Res. Notices (1995), no. 3, 141–153 (electronic).

[HMS74] Dale Husemoller, John C. Moore, and James Stasheff, *Differential homological algebra and homogeneous spaces*, J. Pure Appl. Algebra **5** (1974), 113–185.

[Hov99] Mark Hovey, *Model categories*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 63, American Mathematical Society, Providence, RI, 1999.

[Hua97] Yi-Zhi Huang, *Two-dimensional conformal geometry and vertex operator algebras*, Progress in Mathematics, vol. 148, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1997.

[Ill71] Luc Illusie, *Complexe cotangent et déformations. I*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 239, Springer-Verlag, Berlin, 1971.

[Ill72] ———, *Complexe cotangent et déformations. II*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 283, Springer-Verlag, Berlin, 1972.

[Joh77] P. T. Johnstone, *Topos theory*, Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], London, 1977, London Mathematical Society Monographs, Vol. 10.

[JS93] André Joyal and Ross Street, *Braided tensor categories*, Adv. Math. **102** (1993), no. 1, 20–78.

[Kad82] T. V. Kadeishvili, *The algebraic structure in the homology of an $A(\infty)$-algebra*, Soobshch. Akad. Nauk Gruzin. SSR **108** (1982), no. 2, 249–252 (1983).

[Kar87] Max Karoubi, *Homologie cyclique et K-théorie*, Astérisque (1987), no. 149, 147.

[Kau04] R. M. Kaufmann, *A proof of a cyclic version of deligne's conjecture via cacti*, `arXiv :math/0403340` (2004).

[Kau07] Ralph M. Kaufmann, *On spineless cacti, Deligne's conjecture and Connes-Kreimer's Hopf algebra*, Topology **46** (2007), no. 1, 39–88.

[Kel80] G. M. Kelly, *A unified treatment of transfinite constructions for free algebras, free monoids, colimits, associated sheaves, and so on*, Bull. Austral. Math. Soc. **22** (1980).

[KM01] M. Kapranov and Yu. Manin, *Modules and Morita theorem for operads*, Amer. J. Math. **123** (2001), no. 5, 811–838.

[Koc04] Joachim Kock, *Frobenius algebras and 2D topological quantum field theories*, London Mathematical Society Student Texts, vol. 59, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.

[Kon03] Maxim Kontsevich, *Deformation quantization of Poisson manifolds*, Lett. Math. Phys. **66** (2003), no. 3, 157–216.

[Kos49] Jean-Louis Koszul, *Sur l'homologie et la cohomologie des algèbres de Lie*, C. R. Acad. Sci. Paris **228** (1949), 288–290.

[Kra00] Olga Kravchenko, *Deformations of Batalin-Vilkovisky algebras*, Poisson geometry (Warsaw, 1998), Banach Center Publ., vol. 51, Polish Acad. Sci., Warsaw, 2000, pp. 131–139.

[KS91] Yvette Kosmann-Schwarzbach, *Grand crochet, crochets de Schouten et cohomologies d'algèbres de Lie*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **312** (1991), no. 1, 123–126.

[KS96] ———, *From Poisson algebras to Gerstenhaber algebras*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **46** (1996), no. 5, 1243–1274.

[KS00] M. Kontsevich and Y. Soibelman, *Deformations of algebras over operads and the Deligne conjecture*, Conférence Moshé Flato 1999, Vol. I (Dijon), Math. Phys. Stud., vol. 21, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2000, pp. 255–307.

[KS04] Yvette Kosmann-Schwarzbach, *Derived brackets*, Lett. Math. Phys. **69** (2004), 61–87.

[KS06] M. Kontsevich and Y. Soibelman, *Notes on A-infinity algebras, A-infinity categories and non-commutative geometry. I*, `arXiv :math/0606241` (2006).

[Lac08] Stephen Lack, *Note on the construction of free monoids*, `arXiv.org :0802.1946` (2008).

[Law63] F. William Lawvere, *Functorial semantics of algebraic theories*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **50** (1963), 869–872.

[LFCG01] J.-L. Loday, A. Frabetti, F. Chapoton, and F. Goichot, *Dialgebras and related operads*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1763, Springer-Verlag, Berlin, 2001.

[Liv06] Muriel Livernet, *A rigidity theorem for pre-Lie algebras*, J. Pure Appl. Algebra **207** (2006), no. 1, 1–18.

[LM05] T. Lada and M. Markl, *Symmetric brace algebras*, Appl. Categ. Structures **13** (2005), no. 4, 351–370.

[Lod98] J.-L. Loday, *Cyclic homology*, second ed., Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 301, Springer-Verlag, Berlin, 1998, Appendix E by María O. Ronco, Chapter 13 by the author in collaboration with Teimuraz Priashvili.

[Lod01] Jean-Louis Loday, *Dialgebras*, Dialgebras and related operads, Lecture Notes in Math., vol. 1763, Springer, Berlin, 2001, pp. 7–66.

[Lod08] J.-L. Loday, *Generalized bialgebras and triples of operads*, Astérisque, vol. 320, 2008.

[LPWZ07] D.-M. Lu, J. H. Palmieri, Q.-S. Wu, and J. J. Zhang, *Regular algebras of dimension 4 and their A_∞-Ext-algebras*, Duke Math. J. **137** (2007), no. 3, 537–584. MR MR2309153 (2008d :16022)

[LR90] Pierre B. A. Lecomte and Claude Roger, *Modules et cohomologies des bigèbres de Lie*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **310** (1990), no. 6, 405–410.

[LR04] J.-L. Loday and M. Ronco, *Trialgebras and families of polytopes*, Homotopy theory : relations with algebraic geometry, group cohomology, and algebraic K-theory, Contemp. Math., vol. 346, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004, pp. 369–398.

[LR06] Jean-Louis Loday and Maria Ronco, *On the structure of cofree hopf algebras*, J. Reine Angew. Math. **592** (2006), 123.

[LZ93] Bong H. Lian and Gregg J. Zuckerman, *New perspectives on the BRST-algebraic structure of string theory*, Comm. Math. Phys. **154** (1993), no. 3, 613–646.

[Man87] Yu. I. Manin, *Some remarks on Koszul algebras and quantum groups*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **37** (1987), no. 4, 191–205.

[Man88] ———, *Quantum groups and noncommutative geometry*, Université de Montréal Centre de Recherches Mathématiques, Montreal, QC, 1988.

[Mar96] Martin Markl, *Models for operads*, Comm. Algebra **24** (1996), no. 4, 1471–1500.

[Mar04] ———, *Homotopy algebras are homotopy algebras*, Forum Math. **16** (2004), no. 1, 129–160.

[Mar06a] ———, *A resolution (minimal model) of the PROP for bialgebras*, J. Pure Appl. Algebra **205** (2006), no. 2, 341–374.

[Mar06b] ———, *Transferring A_∞ (strongly homotopy associative) structures*, Rend. Circ. Mat. Palermo (2) Suppl. (2006), no. 79, 139–151.

[May72] J. P. May, *The geometry of iterated loop spaces*, Springer-Verlag, Berlin, 1972, Lectures Notes in Mathematics, Vol. 271.

[Men07] L. Menichi, *Batalin-Vilkovisky algebra structures on Hochschild cohomology*, `arXiv :0711.1946` (2007).

[Mer99] S.A. Merkulov, *Strongly homotopy algebras of a Kähler manifold*, Internat. Math. Res. Notices, no.3, 153–164 (1999).

[Mer04] S. A. Merkulov, *Prop profile of deformation quantization and graph complexes with loops and wheels*, 2004.

[Mer05] S. A. Merkulov, *Nijenhuis infinity and contractible differential graded manifolds*, Compos. Math. **141** (2005), no. 5, 1238–1254.

[ML65] Saunders Mac Lane, *Categorical algebra*, Bull. Amer. Math. Soc. **71** (1965), 40–106.

[ML98] S. Mac Lane, *Categories for the working mathematician*, second ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 5, Springer-Verlag, New York, 1998.

[MS02] James E. McClure and Jeffrey H. Smith, *A solution of Deligne's Hochschild cohomology conjecture*, Recent progress in homotopy theory (Baltimore, MD, 2000), Contemp. Math., vol. 293, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002, pp. 153–193.

[MT08] Paul-André Melliès and Nicolas Tabareau, *Free models of T-algebraic theories computed as Kan extensions*, `http ://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00339331/fr/` (2008).

[MV03] Martin Markl and Alexander A. Voronov, *PROPped up graph cohomology*, `arXiv :math.QA/0307081` (2003).

[MY91] M. Méndez and J. Yang, *Möbius species*, Adv. Math. **85** (1991), no. 1, 83–128. MR MR1087798 (92j :05183)

[NR66] Albert Nijenhuis and R. W. Richardson, Jr., *Cohomology and deformations in graded Lie algebras*, Bull. Amer. Math. Soc. **72** (1966), 1–29.

[OG08] J.-M. Oudom and D. Guin, *On the Lie enveloping algebra of a pre-Lie algebra*, J. K-Theory **2** (2008), no. 1, 147–167.

[Pit99] Jim Pitman, *Coalescent random forests*, J. Combin. Theory Ser. A **85** (1999), no. 2, 165–193. MR MR1673928 (2000a :05064)

[PP05] Alexander Polishchuk and Leonid Positselski, *Quadratic algebras*, University Lecture Series, vol. 37, American Mathematical Society, Providence, RI, 2005.

[Pri70] Stewart B. Priddy, *Koszul resolutions*, Trans. Amer. Math. Soc. **152** (1970), 39–60.

[Qui67] Daniel G. Quillen, *Homotopical algebra*, Lecture Notes in Mathematics, No. 43, Springer-Verlag, Berlin, 1967.

[Qui69] Daniel Quillen, *Rational homotopy theory*, Ann. of Math. (2) **90** (1969), 205–295.

[Qui70] ———, *On the (co-) homology of commutative rings*, Applications of Categorical Algebra (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XVII, New York, 1968), Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1970, pp. 65–87.

[Rez96] C. Rezk, *Spaces of algebra structures and cohomology of operads*, MIT Ph.D. Thesis (1996).

[Sch94] William R. Schmitt, *Incidence Hopf algebras*, J. Pure Appl. Algebra **96** (1994), no. 3, 299–330.

[Seg04] G. Segal, *The definition of conformal field theory*, Topology, geometry and quantum field theory, London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 308, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2004, pp. 421–577.

[Ser93] Jean-Pierre Serre, *Gèbres*, Enseign. Math. (2) **39** (1993), no. 1-2, 33–85.

[Sev09] Pavol Severa, *Formality of the chain operad of framed little disks*, `arXiv.org :0902.3576` (2009).

[Sho03] Boris Shoikhet, *A concept of $\frac{2}{3}$PROP and deformation theory of (co)associative bialgebras*, `arXiv :math.QA/0311337` (2003).

[Sta63] James Dillon Stasheff, *Homotopy associativity of H-spaces. I, II*, Trans. Amer. Math. Soc. 108 (1963), 275-292 ; ibid. **108** (1963), 293–312.

[Sta93] Jim Stasheff, *The intrinsic bracket on the deformation complex of an associative algebra*, J. Pure Appl. Algebra **89** (1993), no. 1-2, 231–235.

[Sta97] Richard P. Stanley, *Enumerative combinatorics. Vol. 1*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 49, Cambridge University Press, Cambridge, 1997, With a foreword by Gian-Carlo Rota, Corrected reprint of the 1986 original.

[Ste62] N. E. Steenrod, *Cohomology operations*, Lectures by N. E. STeenrod written and revised by D. B. A. Epstein. Annals of Mathematics Studies, No. 50, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1962.

[Str08] H. Strohmayer, *Operads of compatible structures and weighted partitions.*, J. Pure Appl. Algebra **212** (2008), no. 11, 2522–2534.

[SU05] Samson Saneblidze and Ronald Umble, *The biderivative and A_∞-bialgebras*, Homology Homotopy Appl. **7** (2005), no. 2, 161–177 (electronic).

[Sul77] Dennis Sullivan, *Infinitesimal computations in topology*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1977), no. 47, 269–331 (1978).

[Sul08] Dennis Sullivan, *Homotopy theory of the master equation package applied to algebra and geometry : a sketch of two interlocking programs*, `arXiv.org :0803.0588` (2008).

[SVO99] Steve Shnider and Donovan H. Van Osdol, *Operads as abstract algebras, and the Koszul property*, J. Pure Appl. Algebra **143** (1999), no. 1-3, 381–407, Special volume on the occasion of the 60th birthday of Professor Michael Barr (Montreal, QC, 1997).

[SW03] Paolo Salvatore and Nathalie Wahl, *Framed discs operads and Batalin-Vilkovisky algebras*, Q. J. Math. **54** (2003), no. 2, 213–231.

[Tam98] Dmitry E. Tamarkin, *Another proof of M. Kontsevich formality theorem*, 1998.

[Tou04] V. Tourtchine, *On the other side of the bialgebra of chord diagrams*, `math.QA/0411436` (2004).

[Tra02] T. Tradler, *The BV algebra on Hochschild cohomology induced by infinity inner products*, `arXiv.org :math/0210150` (2002).

[TT00] D. Tamarkin and B. Tsygan, *Noncommutative differential calculus, homotopy BV algebras and formality conjectures*, Methods Funct. Anal. Topology **6** (2000), no. 2, 85–100.

[TZ06] T. Tradler and M. Zeinalian, *On the cyclic Deligne conjecture*, J. Pure Appl. Algebra **204** (2006), no. 2, 280–299.

[Uch09] K. Uchino, *Derived bracket construction and manin products*, `arXiv.org :0904.1961` (2009).

[VdL02] P. Van der Laan, *Operads up to Homotopy and Deformations of Operad Maps*, `arXiv :math.QA/0208041` (2002).

[VdL03] ———, *Coloured Koszul duality and strongly homotopy operads*, `arXiv :math.QA/0312147` (2003).

[Vor00] Alexander A. Voronov, *Homotopy Gerstenhaber algebras*, Conférence Moshé Flato 1999, Vol. II (Dijon), Math. Phys. Stud., vol. 22, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2000, pp. 307–331.

[Wac07] Michelle L. Wachs, *Poset topology : tools and applications*, Geometric combinatorics, IAS/Park City Math. Ser., vol. 13, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007, pp. 497–615.

Bruno Vallette

Laboratoire J.A. Dieudonné,

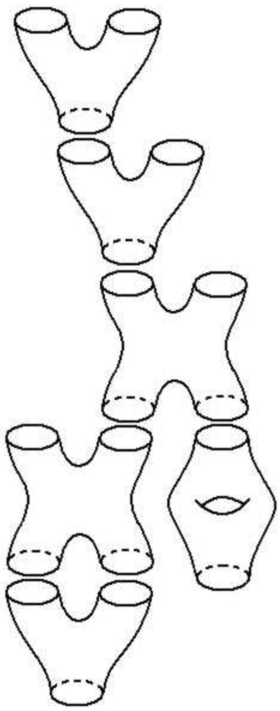
Université de Nice,

Parc Valrose, 06108 Nice Cedex 02, France

E-mail address : `brunov@math.unice.fr`

URL : `http ://math.unice.fr/~brunov`

Résumé : Une propérade est un objet mathématique qui sert à coder les opérations à plusieurs entrées et à plusieurs sorties, comme le produit d'une algèbre ou le coproduit d'une cogèbre. Le nom de "propérade" vient de la contraction de *produit*, *opération* et *monade*. Les propérades sont des objets universels qui se retrouvent dans de nombreux domaines des mathmatiques. Ce mémoire illustre des applications en algèbre, topologie, géométrie et physique mathématique.



Ceci est une propérade