

Feuille d'exercices 4

Applications linéaires continues

Exercice 1

Soit $E = \mathcal{C}([0, 1])$ muni de la norme de la convergence uniforme. Montrer que l'application $T : E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $T(f) = \int_0^1 f(t)dt$ est une application linéaire continue. Calculer sa norme.

Exercice 2

On considère l'espace $E = \mathcal{C}([0, 1]; \mathbb{R})$ et on définit l'application $u : E \rightarrow \mathbb{R}$ par $u(f) = f(1)$.

1- On munit E de la norme $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|dx$. Montrer que u n'est pas continue sur E dans $\mathbb{R}$ (on pourra utiliser la suite (f_n) définie par $f_n(x) = \sqrt{n}x^n$).

2- On munit maintenant E de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|$. L'application u est-elle continue de E dans $\mathbb{R}$?

Exercice 3

Soit E l'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ des polynômes à coefficients complexes muni de la norme définie par : $\|P\| =$

$\sup_{0 \leq k \leq p} |a_k|$, pour $P = \sum_{k=0}^p a_k X^k$. Soit f l'application de E

dans E définie par $f(P) = P'$. Montrer que f n'est pas continue.

Exercice 4

Soit $E = \mathcal{C}([0, 1])$, c'est un espace de Banach pour la norme $\|f\|_\infty = \sup_{0 \leq x \leq 1} |f(x)|$.

Soit A l'opérateur linéaire de E défini par

$$Af(x) = \int_0^x tf(t)dt + x \int_x^1 f(t)dt.$$

Vérifier que A est continu, calculer sa norme.

L'équation $Af = f$ a-t-elle des solutions non nulles dans E ?

Exercice 5

Soit $E = \mathcal{C}([a, b])$. Soit $p(x)$ une fonction continue sur

$[a, b]$. Pour $f \in E$, on pose :

$$[\Phi(f)](x) = \int_a^x f(t)p(t)dt, \quad \text{pour tout } a \leq x \leq b.$$

0- Quelle est la norme sur E pour laquelle E est un espace de Banach ?

1- Montrer que si f est continue, alors $\Phi(f)$ est continue.

2- Montrer que l'application Φ qui à f associe $\Phi(f)$ est un endomorphisme continu de E . Montrer que $\|\Phi\|_{\mathcal{L}(E)} \leq$

$$\int_a^b |p(t)|dt.$$

3- On suppose que $p \geq 0$. Par un choix simple de f , montrer que $\|\Phi\|_{\mathcal{L}(E)} = \int_a^b |p(t)|dt$.

4- (Dans cette question, on ne suppose pas que $p \geq 0$). On pose $f_n(t) = \frac{np(t)}{\sqrt{1 + n^2(p(t))^2}}$. Montrer que $f_n \in E$. Cal-

culer $\|\Phi(f_n)\|$. En déduire que $\|\Phi\|_{\mathcal{L}(E)} = \int_a^b |p(t)|dt$.

Exercice 6

Soit l^∞ l'espace vectoriel des suites réelles bornées $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ muni de la norme $\|u\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$, et f l'ap-

plication de l^∞ dans lui-même définie par $f(u) = v$ où $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $v_n = u_{n+1} - u_n$.

Montrer que f est une application linéaire continue et calculer sa norme.

Exercice 7

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé complet et A une application linéaire continue de E dans lui-même, de norme strictement inférieure à 1. Montrer que $I + A$ est inversible et

$$(I + A)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n A^n$$

et de plus on a

$$\|(I + A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}.$$

Exercice 8

Soit E l'espace des fonctions continues sur $[0, 1]$ muni de

la topologie de la convergence uniforme, $K \in \mathcal{C}([0, 1]^2)$ vérifiant $|K| \leq a < 1$ et l'application de E dans E qui à f associe Kf , définie par

$$(Kf)(x) = \int_0^1 K(x, y)f(y)dy.$$

1) Montrer que pour tout $g \in E$, il existe une unique $f_g \in E$ vérifiant l'équation

$$f_g + Kf_g = g.$$

(On pourra montrer que l'application $T : E \rightarrow E$, $T(f) = g - Kf$, admet un point fixe).

2) Montrer que la solution f_g est donnée par

$$f_g = \sum_{n \geq 0} (-1)^n K^n g.$$

Exercice 9

Soit $X = \mathcal{C}([0, 1])$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Soit K l'opérateur de X dans X défini par :

$$\forall f \in X, (Kf)(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

1- Montrer que K est une application linéaire et continue de X dans X .

2- On pose $K^n = K \circ \dots \circ K$ composé n fois de K avec lui-même. Montrer par récurrence que K^n est l'application de X dans X qui à f associe la fonction :

$$(K^n f)(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)dt.$$

3- Montrer que $\|K^n\|_{\mathcal{L}(X)} = \frac{1}{n!}$.

4- Montrer qu'il existe une application linéaire continue de X dans lui-même notée B telle que $B(I - K) = (I - K)B = I$.

Exercice 10

Soit $\mathcal{C}(\Delta)$ l'espace des fonctions réelles continues sur un intervalle fermé borné $\Delta = [a, b]$, muni de la distance d de la convergence uniforme ($d(f, g) = \max_{t \in \Delta} |f(t) - g(t)|$). Soit

$K : \Delta \times \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue. Soit $\varphi \in \mathcal{C}(\Delta)$, et λ une constante réelle.

1- On considère l'équation fonctionnelle, d'inconnue $f \in \mathcal{C}(\Delta)$,

$$f(x) = \lambda \int_a^b K(x, t)f(t)dt + \varphi(x), \quad a \leq x \leq b.$$

Montrer que si λ est assez petit (et préciser ce qu'il faut entendre par cela), cette équation admet une solution unique dans $\mathcal{C}(\Delta)$.

2- On considère l'équation fonctionnelle d'inconnue $f \in \mathcal{C}(\Delta)$,

$$f(x) = \lambda \int_a^x K(x, t)f(t)dt + \varphi(x), \quad a \leq x \leq b.$$

Montrer que pour toute valeur de λ , cette équation admet une solution unique dans $\mathcal{C}(\Delta)$.

Exercice 11

On veut résoudre l'équation différentielle $y' - y = f$ où f est une fonction de $\mathcal{C}([0, 1]; \mathbb{C})$ donnée. On cherche une solution sous la forme suivante, où k est une fonction $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1] \times [0, 1]$,

$$\phi(x) = \int_0^x k(x, y)f(y)dy.$$

1) Calculer $\phi'(x)$.

2) Donner des conditions sur k qui suffisent pour que ϕ soit solution de l'équation.

3) Résoudre l'équation.