

Feuille de TD 1 : Rappels de calcul intégral

Exercice 1

Existe-t-il une fonction g intégrable sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $ne^{-n|x|} \leq g(x)$?

Exercice 2

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. On considère l'application

$$Tf : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \int_0^1 f(x-y)dy \end{array}.$$

1. Montrer que si f est continue à support compact, Tf est continue.
2. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues à support compact qui converge vers f dans $L^1(\mathbb{R})$. Montrer que $(Tf_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers Tf uniformément sur $\mathbb{R}$. En déduire que Tf est continue sur $\mathbb{R}$.
3. En déduire que le produit de convolution sur $L^1(\mathbb{R})$ n'admet pas d'élément unité.

Exercice 3

Soit $h \in \mathbb{R}^n$. On définit l'opérateur de translation par h , noté τ_h , agissant sur une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, par : $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $(\tau_h f)(x) = f(x-h)$.

Le but de cet exercice est de démontrer le résultat suivant.

Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ avec $1 \leq p < +\infty$, alors

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|\tau_h f - f\|_p = 0,$$

i.e. $\tau_h f$ tend vers f dans $L^p(\mathbb{R}^n)$ lorsque h tend vers 0.

Soit $1 \leq p < +\infty$.

1. Montrer que, si f est continue à support compact dans la boule $B(0, M)$ centrée en 0 et de rayon M , et si $|h| \leq 1$, alors

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, |f(x-h) - f(x)|^p \leq \mathbf{1}_{B(0, M+1)}(x) 2^p \|f\|_\infty^p,$$

où $B(0, M+1)$ est la boule centrée en 0 de rayon $M+1$.

2. En déduire que, pour f continue à support compact, on a

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|\tau_h f - f\|_p = 0.$$

3. Démontrer le résultat énoncé plus haut pour une fonction quelconque dans $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < +\infty$.
4. Que se passe-t-il pour $p = \infty$?

Exercice 4

Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f \in L^1_{\text{loc}}(I)$. On suppose que :

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(I), \int_I f(x)\varphi(x) dx = 0.$$

Soit $[a, b] \subset I$ un intervalle.

1. En utilisant un argument de densité, montrer que :

$$\forall g \in C_0(I), \text{ supp } g \subset [a, b], \int_{[a, b]} f(x)g(x) dx = 0.$$

2. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $h_\varepsilon \in C_0([a, b])$ telle que

$$\int_{[a, b]} |f(x) - h_\varepsilon(x)| dx \leq \varepsilon.$$

Montrer que :

$$\forall g \in C_0([a, b]), \left| \int_{[a, b]} h_\varepsilon(x)g(x) dx \right| \leq \varepsilon \|g\|_\infty.$$

3. En choisissant bien $g \in C_0([a, b])$, montrer que $\int_{[a, b]} |h_\varepsilon| dx \leq \varepsilon$.
4. En déduire que $f = 0$ presque partout sur I .

Exercice 5 - Autour du Dirac

Soit $\varepsilon > 0$. On considère la fonction ϕ_1^ε définie sur $\mathbb{R}$ par $\phi_1^\varepsilon(x) = 0$ pour $|x| \geq \varepsilon$, et $\phi_1^\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^2}(\varepsilon - |x|)$ pour $|x| \leq \varepsilon$.

1. Déterminer la limite simple lorsque ε tend vers 0 de $(\phi_1^\varepsilon)_\varepsilon$.
2. Calculer l'intégrale sur $\mathbb{R}$ de ϕ_1^ε .
3. On considère $\phi_2^\varepsilon(x) = \phi_1^\varepsilon(x - \varepsilon)$. Déterminer la limite simple lorsque ε tend vers 0 de ϕ_2^ε . Calculer son intégrale sur $\mathbb{R}$.

4. Soient a et b sont deux réels distincts. Déterminer, suivant la position relative de 0 par rapport à a et b , la valeur de la limite, lorsque ε tend vers 0, de l'intégrale $\int_a^b \phi_1^\varepsilon(x) dx$. On note cette limite $I_1(a, b)$. Que mesure cette limite ?

On définit

$$I_1^\varepsilon(\phi) = \int_{\mathbb{R}} \phi_1^\varepsilon(x) \phi(x) dx$$

où ϕ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et bornée.

5. Déterminer la limite lorsque ε tend vers 0 de $I_1^\varepsilon(\phi)$.

6. Vérifier qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall \varepsilon > 0, |I_1^\varepsilon(\phi)| \leq C \max_{x \in \mathbb{R}} |\phi(x)|.$$