UNIVERSITÉ PARIS-EST
École Doctorale Information, Communication,
Modélisation et Simulation

THÈSE
pour obtenir le grade de
DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PARIS-EST
Discipline : Mathématiques

Présentée par
Stéphane VENTO

Etude de quelques équations d'ondes en milieux dispersifs ou dispersifs-dissipatifs

---

Soutenue le 2 décembre 2008 devant le jury composé de :

Directeur de thèse :	Francis RIBAUD (Université Paris-Est)
Rapporteurs :	Olivier GOUBET (Université de Picardie Jules Verne) Nikolay TZVETKOV (Université de Lille)
Examinateurs :	Marco CANNONE (Université Paris-Est) Patrick GÉRARD (Université Paris-Sud) Luc MOLINET (Université de Tours) Fabrice PLANCHON (Université Paris 13)

À Graziella

Remerciements

Ces trois années de thèse furent une étape importante dans ma vie, tant sur le plan professionnel que personnel. Aussi, j'aimerais commencer ce mémoire en remerciant les personnes qui m'ont soutenu et accompagné tout au long de ce parcours.

Mes premières pensées s'adressent à Francis Ribaud qui aura été un prodigieux initiateur, présentant conjointement de nombreuses et rares qualités tant sur le plan humain que sur le plan professionnel. Il m'a témoigné une grande patience, m'a soutenu dans les moments difficiles et m'a guidé tout au long de ces années avec une réelle bienveillance. Sa créativité, sa rigueur scientifique, sa détermination et ses talents pédagogiques comptent sans aucun doute pour une grande part dans ma formation et dans mon goût pour la recherche.

Je souhaite remercier chaleureusement Marco Cannone, directeur du Laboratoire d'Analyse et de Mathématiques Appliquées, d'avoir accepté de participer au jury de soutenance. Il a également toujours été présent à mes côtés pour me guider et me soutenir pendant mes années d'étude à Marne-La-Vallée.

Olivier Goubet et Nikolay Tzvetkov m'ont fait l'immense honneur de rapporter ce mémoire. C'est avec grand plaisir que je leur adresse mes remerciements pour ce travail.

Je tiens également à exprimer toute ma reconnaissance à Patrick Gérard, Luc Molinet et Fabrice Planchon d'avoir accepté de faire partie de mon jury de thèse. Je remercie Fabrice pour le temps qu'il m'a accordé lors de conversations très enrichissantes, et pour avoir toujours porté un regard attentif sur mes travaux.

Je voudrais profiter de cette occasion pour remercier tous les membres du LAMA, que j'ai eu la chance de côtoyer durant toutes ces années, dans une atmosphère de travail stimulante et conviviale. En particulier, je suis redevable envers les secrétaires Mireille Morvan et Christiane Lafargue pour leur patience face à mon incompétence administrative ! Je garde aussi un agréable souvenir des moments passés avec les doctorants, Ahmad El Hajj, Filippo Morabito, Nicolas Prioux et les autres (désolé de ne pas pouvoir tous les citer).

Je souhaite exprimer toute ma gratitude à mes proches, en particulier à ma famille. Je remercie du fond du cœur mes parents pour tout l'amour qu'ils me portent et pour m'avoir permis de réaliser mes études dans les meilleures conditions possibles. Je souhaite remercier ma sœur Corinne et mon frère Sébastien pour m'avoir soutenu et fait confiance durant toutes ces années.

Mes plus tendres pensées s'adressent naturellement à Graziella qui est à mes côtés depuis plus de dix ans maintenant. Elle a eu la lourde tâche de me supporter durant mes études et particulièrement ces trois dernières années pendant lesquelles son amour a été une formidable source de motivation pour moi. Le pire est maintenant derrière nous, et le meilleur nous attend...

Résumé. Dans cette thèse nous nous intéressons aux propriétés qualitatives et quantitatives des solutions de quelques équations d'ondes en milieux dispersifs ou dispersifs-dissipatifs. Dans une première partie, nous étudions le problème de Cauchy associé aux équations de Benjamin-Ono généralisées. A l'aide de transformées de jauge, combinées avec des outils d'analyse harmonique, nous prouvons des résultats concernant le caractère localement bien posé pour des données initiales de régularité minimale dans l'échelle des espaces de Sobolev.
Dans une seconde partie, nous étudions le problème de Cauchy pour des versions dissipatives des équations de Benjamin-Ono et de Korteweg-de Vries. Nous mettons en évidence l'influence des effets dissipatifs sur ces équations en donnant des résultats optimaux sur leur caractère bien ou mal posé. Ceux-ci sont obtenus en travaillant dans des espaces de type Bourgain adaptés à la partie dispersive-dissipative.
Pour finir nous étudions le comportement asymptotique des solutions des équations de KdV dissipatives, lorsque celles-ci existent pour tout temps, en calculant explicitement les premiers termes du développement asymptotique dans de nombreux espaces de Sobolev.

Mots clés : Equations dispersives et dissipatives, existence locale et globale, comportement asymptotique, transformation de jauge, espaces de Bourgain

On some wave equations in dispersive or dispersive-dissipative media

Abstract. This thesis deals with the qualitative and quantitative properties of solutions to some wave equations in dispersive or dispersive-dissipative media. In the first part, we study the Cauchy problem for the generalized Benjamin-Ono equations. By means of gauge transforms combined with some harmonic analysis tools, we prove some local well-posedness results for initial data with minimal regularity in Sobolev spaces.
In the second part, we study the Cauchy problem for some dissipative versions of the Benjamin-Ono and Korteweg-de Vries equations. We show the influence of the dissipative effects and prove sharp well and ill-posedness results. This is obtained by working in suitable Bourgain's spaces, adapted to the dispersive-dissipative part of the equation.
Finally, we study the asymptotic behavior of solutions to the dissipative KdV equations. We explicitly compute the first terms of the asymptotic expansion in Sobolev spaces.

Keywords : Dispersive and dissipative equation, local and global existence, asymptotic behavior, gauge transform, Bourgain's spaces

Table des matières

I Introduction générale **1**

1 Equations d'ondes dans des milieux dispersifs **3**
1 Equations dispersives . . . 3
1.1 Généralités . . . 3
1.2 Symétries et lois de conservation . . . 6
1.3 Caractères bien et mal posés . . . 7
2 Etude de l'équation linéaire . . . 10
2.1 Solution libre . . . 10
2.2 Estimations linéaires . . . 11
2.2.1 Inégalités de Strichartz . . . 11
2.2.2 Effet régularisant de Kato . . . 12
2.2.3 Estimation maximale en temps . . . 13
2.2.4 Estimations linéaires pour les cas $k = 2, 3$ . . . 14
2.2.5 Estimations non-homogènes . . . 14
3 Les équations de Benjamin-Ono généralisées . . . 16
3.1 Généralités . . . 16
3.2 La transformation de jauge . . . 18
3.3 Etude dans les espaces critiques . . . 21

2 Equations d'ondes dans des milieux dispersifs et dissipatifs **25**
1 Présentation des modèles . . . 25
2 Les espaces de Bourgain . . . 28
2.1 Espaces de Bourgain pour les équations dispersives . . . 28
2.2 Adaptation aux équations dispersives-dissipatives . . . 30
2.3 Estimations bilinéaires . . . 32
3 Caractère bien posé . . . 35
3.1 Les équations de Benjamin-Ono dissipatives . . . 35
3.2 Les équations de Korteweg-de Vries dissipatives . . . 37
4 Etude asymptotique des équations de Korteweg-de Vries dissipatives . 39
4.1 Généralités . . . 39

4.2 Estimations de décroissance 41
4.3 Développement asymptotique 42

Perspectives de recherche **45**

II Etude des équations de Benjamin-Ono généralisées 49

3 Caractère bien posé des équations de Benjamin-Ono généralisées avec grande non-linéarité **51**
1 Introduction and statement of the results 52
1.1 Introduction 52
1.2 Main results 55
1.3 Notations 56
2 Linear estimates and technical lemmas 56
2.1 Linear estimates and resolution space 56
2.2 Technical lemmas 59
3 Nonlinear estimates 62
3.1 Gauge transformation 62
3.2 Estimate of $\|D_x^{s+1/2}w\|_{L_x^\infty L_T^2}$ 65
4 Proof of Theorem 3.1 70
5 Appendix 71

4 Sur les équations de Benjamin-Ono généralisées dans l'espace critique **75**
1 Introduction 76
2 Notations and main results 78
2.1 Notations 78
2.2 Main results 79
3 Linear estimates 81
3.1 Estimates for the linear BO equation 81
3.2 Linear estimates for equation (4.4) 83
4 Well-posedness for $k \geq 4$ 89
4.1 Nonlinear estimates 89
4.2 Existence in $\dot{H}^{s_k}(\mathbb{R})$ 90
4.3 Uniqueness in $\dot{Z}_T$ 91
4.4 Existence and uniqueness in $H^s(\mathbb{R})$, $s \geq s_k$ 93
5 Well-posedness for $k = 3$ 93

III Etude locale des équations de type KdV dissipatives 95

5 Caractères bien posé et mal posé des équations de Benjamin-Ono dissipatives 97

1 Introduction, main results and notations . . . 98
1.1 Introduction . . . 98
1.2 Main results . . . 100
1.3 Notations . . . 102
2 Linear estimates . . . 103
3 Bilinear estimates . . . 104
3.1 Dyadic blocks estimates . . . 104
3.2 Bilinear estimate . . . 108
4 Proof of Theorem 5.1 . . . 112
5 Ill-posedness results . . . 113
5.1 The case $0 \leq \alpha < 1$ . . . 114
5.2 The case $1 \leq \alpha \leq 2$ . . . 116
6 Appendix . . . 118

6 Caractère bien posé des équations de KdV dissipatives 123

1 Introduction . . . 124
1.1 Notations . . . 126
1.2 Main results . . . 127
2 Preliminaries . . . 129
2.1 Linear estimates . . . 129
2.2 Tao's $[k; Z]$-multipliers . . . 130
3 Bilinear estimate . . . 132
4 Proof of the main result . . . 139

IV Etude asymptotique des équations de KdV dissipatives 141

7 Comportement asymptotique des équations de Korteweg-de Vries dissipatives 143

1 Introduction . . . 144
2 Main results . . . 147
3 Linear estimates . . . 150
4 Decay of solutions to (dKdV) . . . 154
5 Asymptotic expansion . . . 157
5.1 First order . . . 157
5.2 Higher orders . . . 158
5.2.1 The case $0 < \alpha < 1$ . . . 158
5.2.2 The case $\alpha = 1$ . . . 162

5.2.3 The case $1 < \alpha < 2$ 163
6 Appendix 168

Bibliographie **181**

Première partie

Introduction générale

Chapitre 1

Equations d'ondes dans des milieux dispersifs

1 Equations dispersives

1.1 Généralités

De nombreux phénomènes de la physique relatifs à la propagation d'ondes dans des milieux non-linéaires dispersifs peuvent être modélisés par des équations aux dérivées partielles d'évolution. L'étude mathématique de ces équations a fait l'objet de recherches intensives ces vingt dernières années et ceci a conduit à l'introduction de nouveaux outils afin de mieux comprendre le comportement local et global de leurs solutions. Nous nous proposons ici, à travers l'étude des équations de Benjamin-Ono généralisées (gBO) et de KdV généralisées, de présenter quelques aspects de cette théorie, et de donner des résultats optimaux sur le caractère bien posé pour des données initiales de régularité minimale.

Nous nous intéressons donc à ces équations dont la forme générale est

$$\partial_t u = Lu + f(u), \tag{1.1}$$

où u est une fonction de l'espace-temps $(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, L est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre $k \geq 1$, auto-adjoint à coefficients constants s'écrivant

$$Lu(x) = \sum_{|\alpha| \leq k} c_\alpha \partial_x^\alpha u(x)$$

avec c_α un endomorphisme de $\mathbb{K}$. Enfin $f(u)$ est un terme non-linéaire, pouvant éventuellement contenir des dérivées d'ordre strictement inférieur à k (on dit alors que l'équation (1.1) est semi-linéaire).

Le cas le plus simple de (1.1) est l'équation linéaire associée à (1.1)

$$\partial_t u = Lu, \tag{1.2}$$

appelée aussi équation libre ; elle sera étudiée plus en détail à la Section 2.

Notons que L s'écrit également $L = ih(D_x)$ où D_x est l'opérateur dont le symbole en Fourier est $|\xi|$, et h est le polynôme

$$h(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \sum_{|\alpha| \le k} i^{|\alpha|-1} c_\alpha \xi_1^{\alpha_1} \ldots \xi_n^{\alpha_n}.$$

L'égalité $h = h(\xi)$ est souvent appelée la relation de dispersion de l'équation (1.2). Elle caractérise complètement le caractère dispersif de l'équation. Intuitivement, nous dirons que l'équation (1.2) est dispersive lorsque les solutions tendent à "s'étaler" dans tout l'espace au cours du temps, particulièrement pour des grands temps, et ce, quelque soit le profil de la donnée initiale. D'autre part, il est facile de vérifier que pour chaque $\xi \in \mathbb{R}^n$ fixé, l'onde plane $(t, x) \mapsto e^{i(x\xi + th(\xi))}$ est solution de (1.2). Par le principe de superposition des solutions, on voit alors qu'une combinaison linéaire de telles ondes est encore solution. Cela indique que des modes de Fourier différents voyagent à des vitesses différentes, et que donc des paquets d'ondes auront tendance à se disperser. Ceci constitue une importante différence avec les équations de transport pour lesquelles toutes les fréquences voyagent à la même vitesse, ou encore avec les équations dissipatives (telles que l'équation de la chaleur) où cette fois-ci les fréquences ont tendance à s'atténuer vers zéro.

A contrario dans le cas des équations non-linéaires, nous observerons deux types de comportements très distincts : soit la non-linéarité est "plus faible" que la dispersion et alors on s'attendra à ce que la solution évolue de façon linéaire ; c'est le cas le plus favorable d'un point de vue mathématique. Si par contre la non-linéarité et la dispersion se compensent, une partie des fréquences évoluera de façon hautement non-linéaire, rendant l'étude plus délicate ; ce sera le cas des équations de Benjamin-Ono généralisées.

Nous présentons maintenant quelques exemples typiques d'équations dispersives non-linéaires.

Equations de type KdV : Ces équations prennent la forme

$$\partial_t u + \partial_x M u + \partial_x f(u) = 0$$

où $x \in \mathbb{R}$ (ou bien $x \in \mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ dans le cas périodique) et u est à valeurs réelles. Le terme $f(u)$ est non-linéaire et M est un opérateur pseudo-différentiel défini à l'aide de la transformée de Fourier par $\widehat{Mu}(\xi) = m(\xi)\hat{u}(\xi)$ avec m à valeurs réelles.

- L'exemple le plus simple en est l'équation de Korteweg-de Vries :

  $$\partial_t u + \partial_x^3 u + u \partial_x u = 0 \tag{KdV}$$

  dont la relation de dispersion est $h(\xi) = \xi^3$. L'équation (KdV) a été introduite par Korteweg et de Vries [KdV] afin de modéliser la propagation d'ondes en eaux peu profondes.

- Les équations de Benjamin-Ono généralisées
$$\partial_t u - \partial_x D_x u \pm u^k \partial_x u = 0, \tag{gBO}$$
$k \geq 1$, appartiennent également à cette famille d'équations. Celles-ci peuvent aussi s'écrire
$$\partial_t u + \mathcal{H}\partial_x^2 u \pm u^k \partial_x u = 0$$
où $\mathcal{H}$ est la transformée de Hilbert définie par
$$\mathcal{H}f(x) = \frac{1}{\pi}\,\mathrm{vp}\Big(\frac{1}{x} * f\Big)(x) = \mathcal{F}^{-1}\big(-i\,\mathrm{sgn}(\xi)\hat{f}(\xi)\big)(x). \tag{1.3}$$
Lorsque $k = 1$, (gBO) est l'équation de Benjamin-Ono dérivée par Benjamin [Ben67] puis par Ono [Ono75] comme un modèle pour les ondes unidirectionnelles en eaux profondes. Ici, la relation de dispersion est $h(\xi) = \xi|\xi|$, ce qui indique que la dispersion (et donc l'effet régularisant) est plus faible que dans l'équation (KdV).
- On peut aussi citer les équations bi-dimensionnelles de Kadomtsev-Petviashvili :
$$\partial_x(\partial_t u + \partial_x^3 u + u\partial_x u) \pm \partial_y^2 u = 0 \tag{KP}$$
qui interviennent lorsque les effets transversaux sont faibles. Il s'agit d'une extension naturelle en dimension 2 de l'équation (KdV).

Equations de type Schrödinger : La forme la plus répandue de ces équations est
$$i\partial_t u + \Delta u \pm |u|^{p-1}u = 0 \tag{NLS}$$
avec $p > 1$ et $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$. Elles apparaissent en optique non-linéaire pour décrire la propagation d'un faisceau lumineux intense dans un milieu dont l'indice de réfraction dépend de l'intensité du faisceau. Ces équations interviennent également en physique nucléaire dans la description des collisions d'ions lourds, ainsi qu'en théorie des plasmas. L'équation libre associée (lorsque $n = 1$) est très proche de celle de Benjamin-Ono puisque (1.3) montre que la transformée de Hilbert n'est autre que $-i$ sur les modes de Fourier positifs et $+i$ sur les modes de Fourier négatifs. En revanche, la principale différence entre (gBO) et (NLS) porte sur la non-linéarité ; alors que (NLS) est dépourvue de dérivée sur le terme non-linéaire, la présence de l'opérateur ∂_x dans (gBO) rend l'étude locale bien plus difficile, comme nous le verrons dans la Section 3.

D'un point de vue historique, les équations de type Schrödinger ont fait l'objet de nombreuses recherches dans les années 80 et le problème local pour (NLS) était bien appréhendé dès le début des années 90, avec entre autres les travaux de Ginibre - Velo [GV85a] et de Cazenave - Weissler [CW90]. En ce qui concerne les équations de type KdV, il a fallu attendre les travaux de Bourgain [Bou93b] puis de Kenig, Ponce et Vega [KPV96] pour voir se développer de nouveaux outils permettant d'obtenir une théorie locale optimale pour ces équations.

1.2 Symétries et lois de conservation

Les résultats énoncés dans ce chapitre concerneront maintenant les équations de Benjamin-Ono généralisées, mais certains peuvent s'adapter facilement à d'autres modèles présentés précédemment.

Avant de commencer l'étude analytique de (gBO), nous faisons quelques remarques sur la structure algébrique de ces équations. Ces équations possèdent un certain nombre de symétries. Tout d'abord elles sont invariantes par translations temporelles :

$$u(t,x) \mapsto u(t+t_0,x), \quad t_0 \in \mathbb{R},$$

ce qui permet, dans l'étude du problème de Cauchy associé, de ramener l'instant initial à $t=0$. On dispose également d'une invariance par translations spatiales

$$u(t,x) \mapsto u(t,x+x_0), \quad x_0 \in \mathbb{R}$$

ainsi que d'une réversibilité en temps

$$u(t,x) \mapsto u(-t,x).$$

Cette dernière peut être mise à profit pour restreindre l'étude locale sur $[-T,+T]$ à un intervalle de temps $[0,T]$.

Une autre symétrie tout à fait remarquable est l'invariance par changement d'échelle

$$u(t,x) \mapsto u_\lambda(t,x) = \lambda^{1/k} u(\lambda^2 t, \lambda x), \quad \lambda > 0.$$

Le calcul de la norme $\dot{H}^s$ de $u_\lambda(0)$ fournit

$$\|u_\lambda(\cdot,0)\|_{\dot{H}^s} = \lambda^{s+\frac{1}{k}-\frac{1}{2}} \|u(\cdot,0)\|_{\dot{H}^s}.$$

Ainsi, la norme $\dot{H}^s$ est invariante si et seulement si $s = s_k := 1/2 - 1/k$. Dans l'échelle des espaces de Sobolev $\dot{H}^s(\mathbb{R})$ (ou $H^s(\mathbb{R})$), on dira que l'on est critique, sous-critique et sur-critique si $s = s_k$, $s > s_k$ et $s < s_k$ respectivement. Heuristiquement, la notion de régularité critique permet de prédire le comportement (linéaire ou non-linéaire) des modes de Fourier des solutions, et donc d'adapter les outils à utiliser dans l'étude locale du caractère bien posé. En fait, nous pouvons nous attendre à un meilleur comportement des solutions dans $H^s(\mathbb{R})$ lorsque $s \geq s_k$, menant généralement à l'existence de solutions à ce niveau de régularité. Une partie des travaux de cette thèse consistera à montrer que les équations de Benjamin-Ono généralisées sont effectivement bien posées dans les espaces $\dot{H}^{s_k}(\mathbb{R})$ et $H^{s_k}(\mathbb{R})$ lorsque $k \geq 4$.

Une autre propriété intéressante des équations (gBO) est la conservation de certaines quantités au cours du temps. L'équation de Benjamin-Ono est complètement intégrable et possède par conséquent une infinité de lois de conservation.

Considérons une solution u de (gBO) suffisamment régulière. L'intégration sur $\mathbb{R}$ de (gBO) en espace donne directement

$$I(u) = \int_{\mathbb{R}} u(t,x)dx = I(u_0),$$

qui est la plus simple des lois de conservation pour notre équation. Il n'est pas difficile d'obtenir aussi que la masse et l'énergie du flot sont conservées :

$$M(u) = \int_{\mathbb{R}} u^2(t,x)dx = M(u_0), \tag{1.4}$$

$$E(u) = \int_{\mathbb{R}} \Big(\frac{1}{2}|D_x^{1/2}u(t,x)|^2 \mp \frac{1}{(k+1)(k+2)}u(t,x)^{k+2}\Big)dx = E(u_0). \tag{1.5}$$

Combinées avec l'injection de Sobolev $\dot{H}^{1/2-1/(k+2)}(\mathbb{R}) \hookrightarrow L^{k+2}(\mathbb{R})$, les lois (1.4)-(1.5) permettent d'obtenir l'estimation *a priori*

$$\|u(t)\|_{H^{1/2}} = O(\|u_0\|_{H^{1/2}}) \tag{1.6}$$

dans le cas défocalisant (signe moins dans (gBO)) et k pair. On dispose de même de lois de conservation à chaque niveau de régularité $s = j/2$ pour j entier ≥ 2, qui conduisent à autant d'estimations du type (1.6).

Ces estimations peuvent être utilisées afin d'obtenir l'existence de solutions pour des données initiales assez régulières. En outre, elles constituent le point clé dans le processus de globalisation des solutions locales. Elles ont par exemple été utilisées avec succès dans [MR04a] pour établir l'existence de solutions globales dans l'espace d'énergie $H^{1/2}(\mathbb{R})$ ($k \geq 6$ pair) et dans [Tao04] pour $H^1(\mathbb{R})$ (et $k = 1$).

1.3 Caractères bien et mal posés

Nous voulons maintenant préciser les notions de solutions et de problèmes bien ou mal posés que nous utiliserons dans la suite.

Pour un élément u_0 dans un espace fonctionnel X (typiquement $X = H^s(\mathbb{R})$), considérons le problème de Cauchy associé à (gBO) :

$$\begin{cases} \partial_t u + \mathcal{H}\partial_x^2 u \pm u^k \partial_x u = 0, \quad x,t \in \mathbb{R}, \\ u(0,x) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{1.7}$$

Soit $V(t) = e^{it\mathcal{H}\partial_x^2}$ le groupe unitaire à un paramètre associé à l'équation libre, c'est-à-dire

$$V(t)\varphi = \int_{\mathbb{R}} e^{i(x\xi + t\xi|\xi|)}\widehat{\varphi}(\xi)d\xi.$$

Par la méthode de la variation de la constante, on trouve, formellement au moins, que (1.7) est équivalent à sa formulation intégrale (ou : formulation de Duhamel) :

$$u(t) = V(t)u_0 \mp \int_0^t V(t-t')(u^k(t')\partial_x u(t'))dt'. \tag{1.8}$$

L'une des caractéristiques de cette dernière écriture est qu'elle ne fait pas intervenir les différentes dérivées apparaissant dans la partie linéaire de (gBO) (i.e. les dérivées d'ordre élevé). Elle est ainsi mieux adaptée pour définir des solutions de faible régularité. Plus précisément, nous dirons que u est une solution (forte) de (1.7) si $u \in \mathcal{C}([0,T],X)$ et si u vérifie (1.8) au sens des distributions.

Nous utiliserons aussi la définition suivante de problème bien posé.

Définition 1.1. *Nous dirons que le problème (1.7) est localement bien posé dans X si pour toute donnée $u_0^* \in X$, il existe un $T > 0$, une boule ouverte B de X contenant u_0^*, et un sous-espace Y de $\mathcal{C}([0,T],X)$ tels que pour chaque $u_0 \in B$, il existe une unique solution forte $u \in Y$ de l'équation intégrale (1.8), et si de plus le flot $u_0 \mapsto u$ est continu de B dans Y. Si de plus on peut choisir T arbitrairement grand, nous dirons que (1.7) est globalement bien posé.*

Cette définition correspond à celle de problème bien posé au sens de Hadamard. Nous discuterons dans la Section 3 des bons espaces dans lesquels le problème de Cauchy associé à (gBO) est bien posé.

A l'inverse, nous dirons bien sûr que (1.7) est mal posé s'il n'est pas bien posé. Cette situation se produit généralement lorsqu'on demande une très faible régularité à la solution, par exemple d'appartenir à $H^s(\mathbb{R})$ avec s trop petit. Il existe de nombreuses méthodes permettant de contredire le caractère bien posé d'un problème, dépendant de la nature de l'équation et du type d'espace dans lequel on travaille. Une situation critique arrive lorsque la solution explose en temps fini, c'est-à-dire lorsque la norme $\|u(t)\|_X$ va tendre vers l'infini quand t croît vers un temps $T^* < \infty$. Dans un tel cas de figure, aucune définition raisonnable du caractère bien posé ne peut être donnée. On peut aussi dans certains cas contredire l'unicité de la solution, ou encore la continuité du flot.

D'un autre côté, il arrive qu'un problème puisse être bien posé au sens de Hadamard mais que la solution, ou le flot solution présente des instabilités. Nous verrons à la Section 3 que le problème (1.7) peut dans certains cas se résoudre à l'aide du théorème du point fixe, ou de méthodes de compacité, donnant lieu en fait à un flot $u_0 \mapsto u$ uniformément continu, localement Lipschitz, de classe $\mathcal{C}^\infty$, ou même analytique.

Dans la suite, nous aurons besoin de la notion suivante : nous dirons que le problème est faiblement mal posé si un de ces critères n'est pas satisfait, et qu'il est $\mathcal{C}^k$-mal posé si le flot (s'il existe) n'est pas de classe $\mathcal{C}^k$ (de X dans $\mathcal{C}([0,T],X)$).

Pour les équations de Benjamin-Ono généralisées, nous disposons par exemple du théorème suivant :

Théorème 1.1 ([MR04b, Ven07b])**.** *Soit $k \geq 2$ et $s < s_c$ avec*

$$s_c = \begin{cases} 1/k & \text{si } k = 2,3, \\ 1/2 - 1/k & \text{si } k \geq 4. \end{cases}$$

Alors (1.7) est $\mathcal{C}^{k+1}$-mal posé dans $H^s(\mathbb{R})$.

Eléments de preuve. Le principe de la démonstration, dû à Bourgain [Bou97], est maintenant classique, et s'applique dans de nombreuses situations. Supposons que le flot $u_0 \mapsto u$ soit de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ de $H^s(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{C}([0,T], H^s(\mathbb{R}))$ pour un $s < s_c$. La solution u peut alors être vue comme fonction de trois variables $u = u(t, x, u_0)$ satisfaisant

$$F(u, \varphi) := u(t, \varphi) - V(t)\varphi \pm \frac{1}{k+1} \int_0^t V(t-t')\partial_x(u^{k+1}(t', \varphi))dt' \equiv 0.$$

Le théorème des fonctions implicites donne alors que les différentielles partielles

$$u_j(h) = \frac{\partial^j u}{\partial \varphi^j}(t, x, 0)[h, \dots, h]$$

vérifient

$$u_{k+1}(h) = (k+1)! \int_0^t V(t-t')\partial_x(V(t')h)^{k+1} dt'.$$

Puisque le flot est $\mathcal{C}^{k+1}$, on doit avoir

$$\sup_{[0,T]} \|u_{k+1}(t, h)\|_{H^s} \lesssim \|h\|_{H^s}^{k+1}, \quad \forall h \in H^s(\mathbb{R}), \tag{1.9}$$

où nous écrivons $A \lesssim B$ pour exprimer qu'il existe $C > 0$ ne dépendant pas de $A, B > 0$ telle que $A \leq CB$.

La stratégie va maintenant consister à contredire (1.9) en exhibant une suite convenable $\{h_N\} \subset H^s(\mathbb{R})$ telle que

$$\|h_N\|_{H^s} \lesssim 1 \tag{1.10}$$

et

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{[0,T]} \left\| \int_0^t V(t-t')\partial_x((V(t')h_N)^{k+1})dt' \right\|_{H^s} = +\infty. \tag{1.11}$$

Lorsque $k \geq 4$, on pourra définir h_N par sa transformée de Fourier par

$$\widehat{h}_N(\xi) = N^{-s-1/2}(\psi_+(\xi/N) + \psi_-(\xi/N))$$

où ψ_+ est une fonction régulière, positive, supportée dans un intervalle adéquat $[A, B]$ $(A > 0)$ et $\psi_-(\xi) = \psi_+(-\xi)$. Pour $k = 2, 3$, il conviendra de définir la suite

$$\widehat{h}_N(\xi) = \alpha^{-1/2} N^{-s}(\chi_1(\xi) + \chi_2(\xi)),$$

où $\chi_1 = \chi_{[N,N+\alpha]}$, $\chi_2(\xi) = \chi_1(-\xi)$ pour $\alpha = N^{-\theta}$, $\theta > 0$ à choisir convenablement. Il est clair que dans chaque cas, l'estimation (1.10) est vérifiée. Calculant la transformée de Fourier de $u_{k+1}(h_N)$, on trouve une somme de $k+2$ termes tous localisés. On conclut alors (1.11) en choisissant le terme contenant les hautes interactions, c'est-à-dire le terme correspondant aux fréquences positives de h_N. $\square$

2 Etude de l'équation linéaire

Dans l'étude des équations non-linéaires, la méthode perturbatrice, qui consiste à considérer l'équation comme une perturbation de l'équation linéaire associée, s'avère généralement efficace. Intuitivement, si u est une petite solution de (gBO), le terme $u^k\partial_x u$ sera d'autant plus petit, et il semble raisonnable de vouloir approcher u par la solution du problème libre. Lorsque la donnée est de taille quelconque, cet argument est encore valide si nous nous restreignons à un petit intervalle de temps. Il est ainsi essentiel pour nous d'avoir une théorie linéaire satisfaisante avant de procéder à l'analyse du problème non-linéaire.

2.1 Solution libre

Nous nous intéressons dans cette section au problème linéaire

$$\begin{cases} \partial_t u + \mathcal{H}\partial_x^2 u = 0, & x,t\in\mathbb{R}, \\ u(0,x) = u_0(x), & x\in\mathbb{R}, \end{cases} \tag{1.12}$$

dont la solution est donnée par

$$u(t,x) = V(t)u_0(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{i(x\xi+t\xi|\xi|)}\widehat{u_0}(\xi)d\xi. \tag{1.13}$$

L'opérateur $V(t)$ est défini sur la classe de Schwartz mais peut s'étendre par densité à d'autres espaces comme $H^s(\mathbb{R})$. Il est clair que par Plancherel, $V(t)$ est un groupe unitaire sur $L^2(\mathbb{R})$, et même sur $H^s(\mathbb{R})$, dans le sens où

$$\forall t\in\mathbb{R},\quad \|V(t)\varphi\|_{H^s} = \|\varphi\|_{H^s}. \tag{1.14}$$

Une autre conséquence de (1.13) est la présence d'effets régularisants locaux, c'est-à-dire qu'à l'instant $t>0$, la solution est localement en espace plus régulière qu'elle ne l'est à l'instant initial ; on parle aussi de vitesse infinie de propagation. Ces effets ne peuvent pas être globaux à cause de (1.14) ; de plus, l'équation est réversible en temps.

Soit $S(t) = e^{it\partial_x^2}$ le groupe unitaire à un paramètre associé à l'équation libre de Schrödinger. Un calcul simple montre que

$$S(t)\varphi = \frac{1}{(4i\pi t)^{1/2}}e^{ix^2/4t} * \varphi = \frac{1}{(4i\pi t)^{1/2}}\int_{\mathbb{R}} e^{i(x-y)^2/4t}\varphi(y)dy. \tag{1.15}$$

Il existe un lien étroit entre les opérateurs $V(t)$ et $S(t)$. En effet, définissons P_+ et P_- les projecteurs de Riesz par

$$\widehat{P_+f}(\xi) = \chi_{[0,\infty[}(\xi)\widehat{f}(\xi),\quad \widehat{P_-f}(\xi) = \chi_{]-\infty,0]}(\xi)\widehat{f}(\xi). \tag{1.16}$$

Alors il vient de (1.13) que $P_+(V(t)\varphi) = S(t)(P_+\varphi)$, cette égalité peut aussi se lire directement sur (1.12) à l'aide de l'identité

$$i\mathcal{H} = P_+ - P_-.$$

En outre, puisque la solution $V(t)u_0$ est réelle, on a $|P_+V(t)u_0| = |P_-V(t)u_0|$ et donc $|V(t)u_0| \leq 2|S(t)P_+u_0|$. De nombreux résultats concernant $S(t)$ pourront ainsi s'appliquer directement à $V(t)$. Par exemple, il vient de (1.15) que pour $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$, on a l'inégalité de dispersion

$$\|S(t)\varphi\|_{L^\infty} \lesssim |t|^{-1/2}\|\varphi\|_{L^1}.$$

Revenant à $V(t)$, il s'ensuit que pour toute φ à fréquences positives, on a

$$\|V(t)\varphi\|_{L^\infty} \lesssim |t|^{-1/2}\|\varphi\|_{L^1}, \tag{1.17}$$

(rappelons que les opérateurs P_+ et P_- ne sont continus que sur L^p, $1 < p < \infty$). Nous pouvons en fait démontrer [KPV89]-[PV90] que cette inégalité a lieu quelque soit $\varphi \in L^1$.

Nous allons maintenant énoncer des estimations non-triviales de la solution de (1.12) dans des espaces de Lebesgue $L^p_xL^q_t$ et $L^q_tL^p_x$.

2.2 Estimations linéaires

2.2.1 Inégalités de Strichartz

Les inégalités de Strichartz sont apparues pour la première fois dans le cadre de l'équation des ondes dans [Str77]. Elles ont ensuite été étendues à l'équation de Schrödinger dans [GV85b]. L'adaptation aux équations de type KdV est due à Kenig, Ponce et Vega [KPV91b, KPV89].

Des inégalités (1.14) et (1.17) on déduit par interpolation l'estimation

$$\|V(t)\varphi\|_{L^{p'}} \lesssim |t|^{1/2-1/p}\|\varphi\|_{L^p} \tag{1.18}$$

pour tout $1 \leq p \leq 2$, où p' est le conjugué de p. Le membre de droite dans (1.18) n'est clairement dans aucun espace L^q_t, et nous ne pouvons obtenir d'estimation en espace-temps directement à partir de (1.18). Nous avons besoin de la notion de couple admissible. Nous dirons que (p, q) est admissible si $2 \leq p, q \leq \infty$ et si $\dfrac{2}{p} + \dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{2}$. Nous avons alors le résultat suivant.

Proposition 1.1. *[KPV91b] Pour toutes paires (p_1, q_1), (p_2, q_2) admissibles, on a l'estimation de Strichartz homogène*

$$\|V(t)\varphi\|_{L^{q_1}_tL^{p_1}_x} \lesssim \|\varphi\|_{L^2}, \tag{1.19}$$

ainsi que l'estimation de Strichartz non-homogène

$$\Big\| \int_0^t V(t-t')f(t')dt' \Big\|_{L_t^{q_1} L_x^{p_1}} \lesssim \|f\|_{L_t^{q_2'} L_x^{p_2'}}, \tag{1.20}$$

où p_2' et q_2' sont les exposants conjugués de p_2 et q_2 respectivement.

Démonstration. La preuve utilise un argument standard TT^* ainsi qu'un lemme de retardement de type Christ-Kiselev [CK01]. Appliquant l'inégalité de Minkowski, l'estimation (1.18) puis l'inégalité de Hardy-Littlewood-Sobolev, on conclut

$$\begin{aligned}
\Big\| \int_{\mathbb{R}} V(t-t')f(t')dt' \Big\|_{L_t^{q_1} L_x^{p_1}} &\lesssim \Big\| \int_{\mathbb{R}} \|V(t-t')f(t')\|_{L_x^{p_1}} dt' \Big\|_{L_t^{q_1}} \\
&\lesssim \big\| \|f\|_{L_x^{p_1'}} * |t|^{1/p_1 - 1/2} \big\|_{L_t^{q_1}} \\
&\lesssim \|f\|_{L_t^{q_1'} L_x^{p_1'}}.
\end{aligned}$$

Pour tout $f, g \in L_t^{q_1'} L_x^{p_1'}$, on a donc

$$\Big| \Big\langle \int_{\mathbb{R}} V(t-t')f(t',x)dt', g(t,x) \Big\rangle_{L_{tx}^2} \Big| \lesssim \|f\|_{L_t^{q_1'} L_x^{p_1'}} \|g\|_{L_t^{q_1'} L_x^{p_1'}}.$$

Ceci montre que

$$\Big\| \int_{\mathbb{R}} V(-t')f(t')dt' \Big\|_{L^2} \lesssim \|f\|_{L_t^{q_1'} L_x^{p_1'}},$$

ce qui est l'estimée duale de (1.19). On en déduit d'autre part que

$$\Big\| \int_{\mathbb{R}} V(t-t')f(t')dt' \Big\|_{L_t^{q_1} L_x^{p_1}} \lesssim \Big\| \int_{\mathbb{R}} V(-t')f(t')dt' \Big\|_{L_x^2} \lesssim \|f\|_{L_t^{q_2'} L_x^{p_2'}}.$$

Le lemme de Christ-Kiselev permet alors de conclure. □

Il est important de noter que les paires (p_1, q_1) et (p_2, q_2) sont complètement découplées, ce qui laisse une grande liberté lorsqu'on cherche des estimations de la solution. Les inégalités de Strichartz ont été appliquées avec succès à l'étude des équations de Schrödinger (NLS) car elles permettent de gagner de l'intégrabilité en espace sur la solution. Malheureusement, elles s'avèrent plutôt inefficaces dans le contexte des équations de type KdV, en particulier pour les équations (gBO), car elles ne permettent en aucun cas de récupérer la dérivée perdue dans le terme non-linéaire.

2.2.2 Effet régularisant de Kato

Dans le but de récupérer la dérivée consommée dans le terme non-linéaire, Kato [Kat83] prouva une estimation régularisante dans le contexte des équations de (KdV). La démonstration de ce résultat fut adaptée à un modèle plus général dans [KPV91a] et une preuve élémentaire utilisant la transformée de Fourier en espace-temps fut établie dans [KPV91b]. Le résultat précis est le suivant.

Proposition 1.2 ([KPV91b]). *Pour tout $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$, on a*

$$\|D_x^{1/2} V(t)\varphi\|_{L_x^\infty L_t^2} \lesssim \|\varphi\|_{L^2}. \tag{1.21}$$

Démonstration. On exprime $V(t)\varphi$ à l'aide de (1.13), on procède au changement de variable $\eta = \xi|\xi|$, on utilise le théorème de Plancherel en temps, puis on retourne à la variable initiale $\xi = \phi(\eta)$ pour obtenir que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\|D_x^{1/2} V(t)\varphi\|_{L_t^2}^2 &= \int_{\mathbb{R}} \Big| \int_{\mathbb{R}} e^{i(x\xi + t\xi|\xi|)} |\xi|^{1/2} \widehat{\varphi}(\xi) d\xi \Big|^2 dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} \Big| \int_{\mathbb{R}} e^{it\eta} e^{ix\phi(\eta)} |\phi(\eta)|^{1/2} \widehat{\varphi}(\phi(\eta)) \phi'(\eta) d\eta \Big|^2 dt \\
&= c \int_{\mathbb{R}} ||\phi(\eta)|^{1/2} \widehat{\varphi}(\phi(\eta)) \phi'(\eta)|^2 d\eta \\
&= c \int_{\mathbb{R}} |\widehat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi = c\|\varphi\|_{L^2}^2.
\end{aligned}$$

□

On note que, contrairement aux inégalités de Strichartz où on intègre d'abord en espace puis en temps, l'effet régularisant de Kato intègre d'abord en temps puis en espace. Dans l'étude locale du problème (1.12), il sera plus commode de travailler avec des normes locales en temps $L_x^p L_T^q = L_x^p(L^q([-T, +T]))$ pour un $T > 0$. On dispose alors de la version locale de (1.21), (voir [KPV91b]) :

$$\forall\, T \leq 1, \quad \|D_x^{1/2} V(t)\varphi\|_{L_x^\infty L_T^2} \lesssim \|\varphi\|_{L^2}. \tag{1.22}$$

Combinée avec un argument TT^* permettant de doubler la dérivée récupérée, l'estimation (1.22) récupère toute la dérivée perdue dans le terme non-linéaire.

2.2.3 Estimation maximale en temps

Pour obtenir un contrôle satisfaisant de la solution, nous aurons aussi besoin d'estimations linéaires avec une composante L_t^∞.

Proposition 1.3 ([KPV91a]). *Si $\varphi \in L^2$, alors*

$$\|D_x^{-1/4} V(t)\varphi\|_{L_x^4 L_t^\infty} \lesssim \|\varphi\|_{L^2}. \tag{1.23}$$

Cette estimation a été obtenue dans [KPV91a] en échangeant les rôles de t et x puis à l'aide des inégalités de Strichartz.

Appliquées à la formulation intégrale (1.8) de (gBO), les estimations (1.14), (1.21) et (1.23) devraient être suffisantes pour contrôler la solution dans l'espace critique $L_t^\infty \dot{H}_x^{s_k}$. Cependant, comme nous le verrons à la Section 3, les solutions de (gBO) n'ont un bon comportement dans $\dot{H}^{s_k}(\mathbb{R})$ que lorsque $k \geq 4$. En particulier pour $k = 2, 3$, les estimations qui vont suivre seront nécessaires.

2.2.4 Estimations linéaires pour les cas $k = 2, 3$

Nous allons avoir besoin au préalable de définir une décomposition de Littlewood-Paley. Soit $\eta \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$, $\eta \geq 0$, supp $\eta \subset \{1/2 \leq |\xi| \leq 2\}$ avec $\sum_{-\infty}^{\infty} \eta(2^{-j}\xi) = 1$ pour $\xi \neq 0$. On pose $p(\xi) = \sum_{j \leq -3} \eta(2^{-j}\xi)$ et on considère, pour $j \in \mathbb{Z}$, les opérateurs Q_j et P_j définis sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ respectivement par

$$Q_j(f) = \mathcal{F}^{-1}(\eta(2^{-j}\xi)\hat{f}(\xi)) \quad \text{et} \quad P_j(f) = \mathcal{F}^{-1}(p(2^{-j}\xi)\hat{f}(\xi)).$$

On a donc la décomposition classique

$$f = \sum_{j \in \mathbb{Z}} Q_j(f) = P_0(f) + \sum_{j \geq -2} Q_j(f).$$

Proposition 1.4 ([KPV91b]). *Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Alors pour tout $0 < T \leq 1$, on a*

$$\|V(t)Q_j\varphi\|_{L_x^2 L_T^\infty} \lesssim 2^{j/2}\|Q_j\varphi\|_{L^2}, \quad \forall\ j \geq 0, \tag{1.24}$$

$$\|P_0 V(t)\varphi\|_{L_x^2 L_T^\infty} \lesssim \|P_0\varphi\|_{L^2}. \tag{1.25}$$

Avec les inégalités de Minkowski et de Bernstein, on déduit facilement de (1.24) et (1.25) que pour tout $s > 1/2$,

$$\|V(t)\varphi\|_{L_x^2 L_T^\infty} \lesssim \|\varphi\|_{H^s}.$$

Par interpolation avec (1.23), il vient

$$\|V(t)\varphi\|_{L_x^3 L_T^\infty} \lesssim \|\varphi\|_{H^s} \tag{1.26}$$

pour tout $s > 1/3$.

2.2.5 Estimations non-homogènes

Avant d'énoncer le résultat principal concernant l'opérateur linéaire

$$f \mapsto \int_0^t V(t-t')f(t')dt',$$

nous résumons dans une unique proposition les estimations linéaires sur $V(t)$ obtenues aux Sections 2.2.2 et 2.2.3.

Définition 1.2. *Un triplet $(\alpha, p, q) \in \mathbb{R} \times [2, \infty]^2$ est dit 1-admissible si $(\alpha, p, q) = (1/2, \infty, 2)$ où*

$$4 \leq p < \infty, \quad 2 < q \leq \infty, \quad \frac{2}{p} + \frac{1}{q} \leq \frac{1}{2}, \quad \alpha = \frac{1}{p} + \frac{2}{q} - \frac{1}{2}. \tag{1.27}$$

On dispose alors du résultat suivant.

Proposition 1.5 ([MR04a]). *Si (α, p, q) est 1-admissible, alors pour tout φ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$,*

$$\|D_x^\alpha V(t)\varphi\|_{L_x^p L_T^q} \lesssim \|\varphi\|_{L^2}. \tag{1.28}$$

Démonstration. C'est une conséquence immédiate des inégalités de Sobolev, des estimations (1.21) et (1.23) et du théorème d'interpolation de Stein. □

Remarquons que puisque le triplet $(0, 6, 6)$ est 1-admissible, nous retrouvons l'inégalité de Strichartz

$$\|V(t)\varphi\|_{L_{xT}^6} \lesssim \|\varphi\|_{L^2}, \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

A partir des estimations linéaires homogènes, c'est-à-dire portant sur le terme $V(t)\varphi$, et du lemme de Christ-Kiselev, nous pouvons démontrer la proposition suivante.

Proposition 1.6 ([MR04a]). *Soit $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$, $(\nu_1, \nu_2) \in \mathbb{R}_+^2$, et $1 \leq p_1, q_1, p_2, q_2 \leq \infty$ tels que pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,*

$$\|D_x^{\alpha_1} V(t)\varphi\|_{L_x^{p_1} L_T^{q_1}} \lesssim T^{\nu_1} \|\varphi\|_{L^2},$$

$$\|D_x^{\alpha_2} V(t)\varphi\|_{L_x^{p_2} L_T^{q_2}} \lesssim T^{\nu_2} \|\varphi\|_{L^2}.$$

Alors pour tout $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$,

$$\left\| D_x^{\alpha_2} \int_0^t V(t-t') f(\tau) dt' \right\|_{L_T^\infty L_x^2} \lesssim T^{\nu_2} \|f\|_{L_x^{p_2'} L_T^{q_2'}}, \tag{1.29}$$

$$\left\| D_x^{\alpha_1+\alpha_2} \int_0^t V(t-t') f(t') dt' \right\|_{L_x^{p_1} L_T^{q_1}} \lesssim T^{\nu_1+\nu_2} \|f\|_{L_x^{p_2'} L_T^{q_2'}} \tag{1.30}$$

dès que $\min(p_1, q_1) > \max(p_2', q_2')$ ou ($q_1 = \infty$ et $p_2', q_2' < \infty$), avec p_2' et $q_2{}'$ définis par $1/p_2' = 1 - 1/p_2$ et $1/q_2' = 1 - 1/q_2$.

En particulier, nous voyons que l'estimation

$$\left\| D_x \int_0^t V(t-t') f(t') dt' \right\|_{L_x^\infty L_T^2} \lesssim \|f\|_{L_x^1 L_T^2}$$

obtenue avec le triplet 1-admissible $(1/2, \infty, 2)$ permet de récupérer toute la dérivée du terme non-linéaire dans (gBO).

3 Les équations de Benjamin-Ono généralisées

3.1 Généralités

Nous revenons maintenant au problème de Cauchy associé à l'équation non-linéaire (gBO). Dans cette section nous allons résumer les principaux résultats déjà connus concernant le caractère bien posé des équations de Benjamin-Ono généralisées.

Lorsque $k = 1$, (gBO) est l'équation de Benjamin-Ono qui a fait l'objet de nombreuses recherches ces dernières années. L'existence de solutions faibles dans l'espace $L^2(\mathbb{R})$ a été établie par Ginibre et Velo dans [GV91]. Le premier résultat concernant le caractère bien posé a été prouvé par Saut [Sau79]. Il démontra que (gBO) est bien posé dans les espaces de Sobolev $H^s(\mathbb{R})$, $s \geq 3$, puis ce résultat fut étendu aux espaces $H^s(\mathbb{R})$, $s \geq 3/2$ dans [Pon91]. En 2004, une avancée majeure a été faite par Tao [Tao04]. Il introduit une transformation de jauge, sorte de transformation de Cole-Hopf adaptée à Benjamin-Ono, qui a pour effet "d'adoucir" le terme non-linéaire, menant au caractère bien posé dans $H^1(\mathbb{R})$. Ce résultat se globalise immédiatement grâce aux lois de conservation (cf. Section 1.2). Plus récemment, combinant une transformée de jauge avec une méthode de Bourgain, Burq et Planchon [BP08] ont obtenu le caractère bien posé dans $H^s(\mathbb{R})$, $s > 1/4$. Par des techniques similaires, Ionescu et Kenig [IK07] ont finalement montré que l'on pouvait descendre jusqu'à $L^2(\mathbb{R})$, et ce dernier résultat semble être optimal malgré le fait que $L^2(\mathbb{R})$ soit sous-critique par rapport au scaling $s_1 = -1/2$.

Il est intéressant de noter que tous ces résultats ont été obtenus grâce à des méthodes de compacité. En fait, Molinet, Saut et Tzvetkov [MST01] ont pu prouver (à l'aide de méthodes similaires à la preuve du Théorème 1.1) que pour tout $s \in \mathbb{R}$, le flot solution $u_0 \mapsto u$ n'est jamais de classe $\mathcal{C}^2$ de $H^s(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{C}([0,T], H^s(\mathbb{R}))$. En outre, il a été établi [KT05] que ce flot n'est même pas uniformément continu sur les parties bornées de $H^s(\mathbb{R})$ $s > 0$. Ceci semble principalement dû à de mauvaises interactions entre les hautes et les basses fréquences du terme non-linéaire. Tout cela explique pourquoi un schéma d'itération de Picard sur la formulation intégrale de (gBO) (avec $k = 1$) ne peut être exploité pour résoudre l'équation dans $H^s(\mathbb{R})$.

Pour $k \geq 2$, la situation est radicalement différente. Il s'avère qu'il est possible de résoudre (gBO) par une méthode de contraction, mais pour des petites données initiales seulement. Dans [MR04b], Molinet et Ribaud ont montré que (gBO) avec petites données est bien posé dans $H^s(\mathbb{R})$ dès que $s > s_c$ avec

$$s_c = \begin{cases} 1/k & \text{si } k = 2, 3, \\ s_k & \text{si } k \geq 4. \end{cases}, \tag{1.31}$$

(on rappelle que $s_k = 1/2 - 1/k$ correspond à l'espace invariant par changement d'échelle). La restriction sur la taille des données est notamment due au fait que les propriétés régularisantes du groupe $V(\cdot)$ sont justes suffisantes pour récupérer la dérivée perdue dans le terme non-linéaire.

Dans le cas $k = 2$ (équation de Benjamin-Ono modifiée), Molinet et Ribaud ont obtenu dans [MR04a] le caractère bien posé dans $H^s(\mathbb{R})$, $s > 1/2$. Récemment Kenig et Takaoka [KT06] ont atteint l'espace d'énergie $H^{1/2}(\mathbb{R})$. Ceci a été prouvé grâce à une transformation de jauge localisée combinée avec une estimation L^2_{xT} de la solution. Ici encore, ce résultat est éloigné de celui donné heuristiquement par un argument de changement d'échelle ($s_2 = 0$), mais est connu pour être optimal, dans le sens où le problème est $\mathcal{C}^3$-mal posé dans $H^s(\mathbb{R})$ dès que $s < 1/2$.

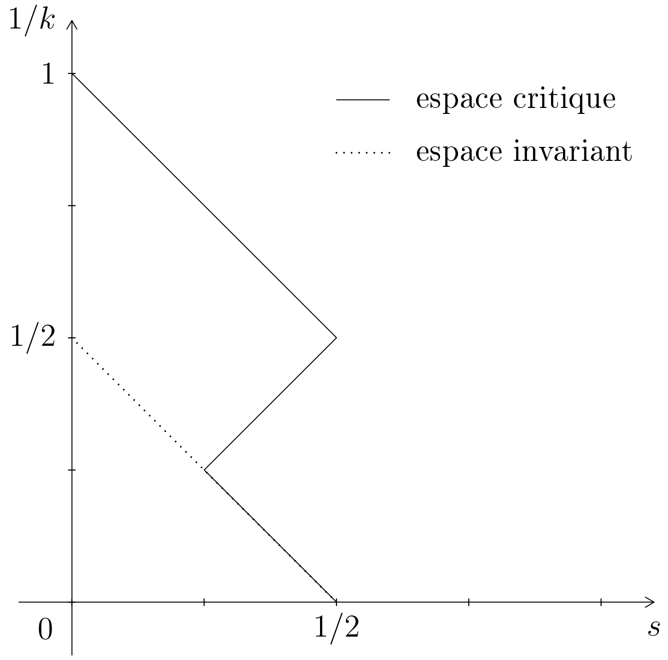
Dans le cas $k = 3$, une adaptation de la transformation de jauge de Tao a permis de montrer [MR04a] que (gBO) est bien posé dans les espaces $H^s(\mathbb{R})$, $s > 3/4$, quel que soit la taille de la donnée initiale. Nous montrons [Ven08c] qu'en fait, (gBO) est bien posé dans $H^s(\mathbb{R})$, $s > 1/3$ et que ce résultat est optimal [Ven07b] dans le sens où le problème est $\mathcal{C}^4$-mal posé dans $H^s(\mathbb{R})$ pour $s < 1/3$.

Concernant le cas $k \geq 4$, le caractère globalement bien posé de (gBO) a été obtenu dans $H^{s_k}(\mathbb{R})$ par Molinet et Ribaud [MR04b], mais pour des petites données initiales seulement. Plus tard, les mêmes auteurs ont pu obtenir des résultats pour données arbitrairement grandes dans $H^{1/2}(\mathbb{R})$, quelque soit la valeur de k. Dans le cas particulier $k = 4$, Burq et Planchon [BP06] ont pu atteindre l'espace homogène critique $\dot{H}^{1/4}(\mathbb{R})$. Concernant le caractère mal posé lorsque $k \geq 4$, on sait [MR04b] que (gBO) est $\mathcal{C}^{k+1}$-mal posé dans $H^s(\mathbb{R})$ dès que $s < s_k$. Ce manque de régularité a également été décrit par Biagioni et Linares dans [BL01] où ils ont établi, à l'aide d'ondes solitaires, que le flot solution n'est pas uniformément continu dans $\dot{H}^{s_k}(\mathbb{R})$, pour tout $k \geq 2$.

On se propose ici d'améliorer ces résultats en montrant que (gBO) est bien posé dans $H^s(\mathbb{R})$, avec

$$\begin{cases} s > 1/3 & \text{si } k = 3, \\ s \geq s_k & \text{si } k \geq 4. \end{cases} \tag{1.32}$$

Graphiquement, nous pouvons résumer la situation comme suit :



Nous donnerons deux démonstrations de ces résultats. La première, basée sur une transformation de jauge, permet de montrer que (gBO) est bien posé dans $H^s(\mathbb{R})$, $s > s_k$ pour des grandes valeurs de k ; elle sera discutée à la Section 3.2. La seconde, qui permet d'atteindre complètement (1.32), est une adaptation de [BP06] ; elle sera traitée à la Section 3.3.

3.2 La transformation de jauge

Nous présentons ici les principaux arguments intervenant dans la preuve du théorème suivant.

Théorème 1.2 ([Ven07b]). *Soit $k \geq 12$ et $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$ avec $s > 1/2 - 1/k$. Alors il existe $T = T(s, k, \|u_0\|_{H^s}) > 0$ et une unique solution $u \in \mathcal{C}([0,T]; H^s(\mathbb{R}))$ de (gBO) telle que*

$$\begin{aligned}
&\|D_x^{s+1/2}u\|_{L_x^\infty L_T^2} < \infty,\\
&\|D_x^{s-1/4}u\|_{L_x^4 L_T^\infty} < \infty,\\
&\|P_0 u\|_{L_x^2 L_T^\infty} < \infty.
\end{aligned}$$

De plus, le flot solution $u_0 \mapsto u$ est Lipschitz sur les parties bornées de $H^s(\mathbb{R})$.

Considérons pour le moment l'équation de Schrödinger avec dérivée :

$$\partial_t u - i\partial_x^2 u = u\partial_x u \tag{1.33}$$

où u est cette fois à valeurs complexes. Cette équation est très proche de (gBO), la transformée de Hilbert étant ici remplacée par $-i$. Cette équation peut être résolue algébriquement, formellement au moins, grâce à la transformation de Cole-Hopf. Si l'on pose $F(t,x) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{x} u(t,y)dy$, alors F vérifie

$$\partial_t F - i\partial_x^2 F = (\partial_x F)^2.$$

Il vient alors, en posant $w = e^{-iF}$, que w est solution de l'équation libre de Schrödinger

$$\partial_t w - i\partial_x^2 w = 0.$$

Cette dernière équation peut être résolue explicitement avec (1.15) et on récupère la solution de (1.33) avec la formule $u = 2i\partial_x w e^{iF}$.

Inspiré par cette technique, Tao [Tao04] a introduit, dans le contexte de l'équation de Benjamin-Ono, la transformation de jauge

$$w = \tilde{P}_+(e^{-iF}), \quad F(t,x) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{x} u(t,y)dy,$$

où $\tilde{P}_+$ est une version régularisée à l'origine du projecteur de Riesz (1.16). Il existe maintenant de multiples versions de cette transformation. L'une d'entre elles a été utilisée dans [MR04a] pour l'étude locale de (gBO) avec $k \geq 3$:

$$w = P_+(e^{-iF}u), \quad F(t,x) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{x} u^k(t,y)dy. \tag{1.34}$$

Nous allons voir que (1.34) combinée avec les estimations linéaires de la Section 2 permettent de démontrer le Théorème 1.2.

Soit $k \geq 12$, $s_k < s < 1/2$ et $X_T^s = \{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2), \|u\|_{X_T^s} < \infty\}$ où $0 < T < 1$ et

$$\|u\|_{X_T^s} = \|u\|_{L_T^\infty H_x^s} + \|D_x^{s+1/2}u\|_{L_x^\infty L_T^2} + \|D_x^{s-1/4}u\|_{L_x^4 L_T^\infty} + \|P_0 u\|_{L_x^2 L_T^\infty}. \tag{1.35}$$

D'après (1.14), (1.22), (1.23) et (1.25), on a

$$\|V(t)\varphi\|_{X_T^s} \lesssim \|\varphi\|_{H^s}. \tag{1.36}$$

Si u est une solution de (gBO) suffisamment régulière, il n'est pas difficile de voir que w définie par (1.34) satisfait l'équation

$$\begin{aligned}\partial_t w + \mathcal{H}\partial_x^2 w = {} & P_+[2e^{-iF}(-ku^k P_-\partial_x u - iP_-\partial_x^2 u)] \\ & - ik(k-1)P_+\Big(e^{-iF}u\int_{-\infty}^{x} u^{k-2}\partial_x u\mathcal{H}\partial_x u\Big).\end{aligned} \tag{1.37}$$

L'intérêt majeur de la transformation de jauge est de faire apparaître dans l'équation (1.37) des termes de la forme $P_+(fP_-\partial_x g)$ pour lesquels il est possible de partager la dérivée sur g avec f *via* le lemme crucial suivant.

Lemme 1.1 ([MR04a]). *Si $\alpha > 0$, $\beta \geq 0$ et $1 < p, q < \infty$ alors*

$$\|D_x^\alpha P_+(fP_- D_x^\beta g)\|_{L_x^p L_T^q} \lesssim \|D_x^{\gamma_1} f\|_{L_x^{p_1} L_T^{q_1}} \|D_x^{\gamma_2} g\|_{L_x^{p_2} L_T^{q_2}}$$

où $1 < p_1, q_1, p_2, q_2 < \infty$, $1/p_1 + 1/p_2 = 1/p$, $1/q_1 + 1/q_2 = 1/q$ et $\gamma_1 \geq \alpha$, $\gamma_1 + \gamma_2 = \alpha + \beta$.

Travaillant dans le cas sous-critique $s > s_k$, nous serons alors capables de faire sortir une puissance de T dans nos estimations, permettant d'obtenir le résultat désiré par une méthode de compacité.

En utilisant la formulation intégrale de (1.37) ainsi que la Proposition 1.6 avec le triplet 1-admissible $(s, (\frac{1}{6} - \frac{s}{3})^{-1}, (\frac{1}{6} + \frac{2s}{3})^{-1})$, on déduit

$$\begin{aligned}\|D_x^{s+1/2} w\|_{L_x^\infty L_T^2} &\lesssim \|D_x^{s+1/2} V(t) w(0)\|_{L_x^\infty L_T^2} \\ &+ \|P_+[2e^{-iF}(-ku^k P_- \partial_x u - iP_- \partial_x^2 u)]\|_{L_x^{(\frac{5}{6}+\frac{s}{3})^{-1}} L_T^{(\frac{5}{6}-\frac{2s}{3})^{-1}}} \\ &+ \Big\| D_x^{s+1/2} \int_0^t V(t-t') P_+\Big(e^{-iF} u \int_{-\infty}^x u^{k-2} \partial_x u \mathcal{H} \partial_x u\Big) dt' \Big\|_{L_x^\infty L_T^2}.\end{aligned} \tag{1.38}$$

Le premier terme du membre de droite s'estime facilement par $c\|u_0\|_{H^s}(1 + \|u_0\|_{H^s}^k)$. Pour le second, on partage les dérivées à l'aide du Lemme 1.1 :

$$\begin{aligned}&\|P_+[2e^{-iF}(-ku^k P_- \partial_x u - iP_- \partial_x^2 u)]\|_{L_x^{(\frac{5}{6}+\frac{s}{3})^{-1}} L_T^{(\frac{5}{6}-\frac{2s}{3})^{-1}}} \\ &\lesssim \|D_x^{1/2}(e^{-iF} u^k)\|_{L_x^{6/5} L_T^3} \|D_x^{1/2} u\|_{L_x^{3/s} L_T^{(\frac{1}{2}-\frac{2s}{3})^{-1}}}.\end{aligned}$$

Le premier facteur dans cette estimation peut s'estimer avec une règle de Leibniz fractionnaire, le second est directement contrôlé par la norme de u dans X_T^s par interpolation. La structure particulière du dernier terme dans (1.38) nous amène à définir l'opérateur

$$G(f, g) = \mathcal{F}^{-1}\Big(\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \frac{\xi_1(\xi - \xi_1)}{i\xi} [\operatorname{sgn}(\xi_1) + \operatorname{sgn}(\xi - \xi_1)] \hat{f}(\xi_1) \hat{g}(\xi - \xi_1) d\xi_1\Big),$$

de sorte que

$$G(f, f) = \partial_x^{-1}(\partial_x f \mathcal{H} \partial_x f) = \partial_x^{-1}(-i(P_+ \partial_x f)^2 + i(P_- \partial_x f)^2)$$

et

$$G(f, g) = \partial_x^{-1}(-iP_+ \partial_x f P_+ \partial_x g + iP_- \partial_x f P_- \partial_x g).$$

Nous disposons alors du résultat suivant :

Lemme 1.2 ([MR04a]). *Si* $0 \leq \alpha \leq 1$ *et* $1 < p, q < \infty$ *alors*

$$\|D_x^\alpha G(f,g)\|_{L_x^p L_T^q} \lesssim \|D_x^{\gamma_1} f\|_{L_x^{p_1} L_T^{q_1}} \|D_x^{\gamma_2} g\|_{L_x^{p_2} L_T^{q_2}}$$

où $0 \leq \gamma_1, \gamma_2 \leq 1$, $\gamma_1 + \gamma_2 = \alpha + 1$, $1 < p_1, q_1, p_2, q_2 < \infty$, $1/p_1 + 1/p_2 = 1/p$ *et* $1/q_1 + 1/q_2 = 1/q$.

Les estimations sur ce terme sont plus techniques et nous renvoyons à [Ven07b] pour les détails. C'est en outre dans ces estimations que la restriction $k \geq 12$ apparaît. En fin de comptes on obtient une estimation de la forme

$$\|D_x^{s+1/2} w\|_{L_x^\infty L_T^2} \lesssim p_k(\|u_0\|_{H^s})\|u_0\|_{H^s} + T^\nu p_k(\|u\|_{X_T^s})\|u\|_{X_T^s} \tag{1.39}$$

où p_k est une fonction polynômiale positive croissante, et où $\nu > 0$.

Pour conclure, il reste à trouver une bonne majoration de $\|u\|_{X_T^s}$ en fonction de la transformée de jauge w. Malheureusement, contrairement à la transformation de Cole-Hopf, il n'est pas possible d'exprimer explicitement u en fonction de w, et nous devons procéder autrement. Les basses fréquences de la solution ne posent pas de problème puisqu'on peut gagner de la régularité grâce aux inégalités de Bernstein. Puisque u est réelle, on se ramène à évaluer la norme de $\tilde{P}_+ u$ dans X_T^s. Dans ce but, on note que $\tilde{P}_+ u$ satisfait l'équation

$$\partial_t(\tilde{P}_+ u) + \mathcal{H}\partial_x^2(\tilde{P}_+ u) = \tilde{P}_+(e^{iF} u^k \partial_x w) - \tilde{P}_+(e^{iF} u^k \partial_x P_-(e^{-iF} u)) + i\tilde{P}_+(u^{2k+1}).$$

Ecrivant la formulation intégrale associée à cette équation, et utilisant des estimations semblables à celles fournissant (1.39), nous aboutissons à

$$\begin{aligned}\|u\|_{X_T^s} &\lesssim \|u_0\|_{H^s} + T^\nu p_k(\|u\|_{X_T^s})\|u\|_{X_T^s} \\ &\quad + (\|u_0\|_{H^s}^k + T^\nu p_k(\|u\|_{X_T^s})\|u\|_{X_T^s})\|D_x^{s+1/2} w\|_{L_x^\infty L_T^2}.\end{aligned}$$

Combinée avec (1.39), nous concluons

$$\|u\|_{X_T^s} \lesssim p_k(\|u_0\|_{H^s})\|u_0\|_{H^s} + T^\nu p_k(\|u\|_{X_T^s})\|u\|_{X_T^s},$$

qui est le point clé dans la preuve du Théorème 1.2.

3.3 Etude dans les espaces critiques

Nous discutons dans cette section du résultat optimal suivant.

Théorème 1.3 ([Ven08c]). *Soit* $k \geq 3$ *et* $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$ *avec* s *satisfaisant (1.32). Il existe* $T = T(u_0) > 0$ *et une unique solution* u *de (gBO) tels que* $u \in Z_T$ *avec*

$$Z_T = \mathcal{C}([-T, +T], H^s(\mathbb{R})) \cap X^s \cap L_x^k L_T^\infty.$$

De plus, le flot solution $u_0 \mapsto u$ *est localement Lipschitz de* $H^s(\mathbb{R})$ *dans* Z_T. *Le résultat reste vrai lorsque* $k \geq 4$ *et si l'on remplace* $H^s(\mathbb{R})$ *par l'espace homogène* $\dot{H}^{s_k}(\mathbb{R})$.

Comme nous l'avons déjà précisé, l'une des caractéristiques intéressantes des équations (gBO) est qu'elles fournissent une balance parfaite entre les effets régularisants de la partie linéaire d'une part, et le terme non-linéaire d'autre part. Ceci constitue une obstruction majeure dans l'étude locale de l'équation dans les espaces critiques $\dot{H}^{s_k}(\mathbb{R})$, même lorsque l'on considère des k suffisamment grands.

Intuitivement, on voudrait appliquer les Propositions 1.5 et 1.6 avec les triplets 1-admissibles $(1/2,\infty,2)$ et $(-s_k,k,\infty)$ à la formulation intégrale (1.8) pour écrire

$$\begin{aligned}\|D_x^{s_k+1/2}u\|_{L_x^\infty L_T^2}+\|u\|_{L_x^k L_T^\infty} &\lesssim \|u_0\|_{\dot{H}^{s_k}}+\|D_x^{s_k-1/2}\partial_x(u^{k+1})\|_{L_x^1 L_T^2}\\ &\lesssim \|u_0\|_{\dot{H}^{s_k}}+\|D_x^{s_k+1/2}u\|_{L_x^\infty L_T^2}\|u\|_{L_x^k L_T^\infty}^k,\end{aligned}$$

puis utiliser une méthode de point fixe. Malheureusement, une telle procédure ne peut aboutir directement, et ce pour plusieurs raisons.

Tout d'abord, la validité de la deuxième inégalité n'est pas claire ; on a en effet utilisé la règle de Leibniz fractionnaire dans les cas limites L^p, $p=1,\infty$. Une façon de contourner cette difficulté est de travailler dans l'espace de Besov associé $\dot{\mathcal{B}}_\infty^{s_k+1/2,2}(L_T^2)\cap\dot{\mathcal{B}}_k^{0,2}(L_T^\infty)$. L'utilisation de ce type d'espaces a été mise à profit dans [MR04b] pour résoudre (gBO) avec petites données initiales. En fait, notre espace de résolution est défini par

$$\dot{X}^s=\dot{\mathcal{B}}_{\frac{4}{1-\varepsilon}}^{s+\frac{3\varepsilon-1}{4},2}(L_T^{\frac{2}{\varepsilon}})\cap\dot{\mathcal{B}}_1^{s-\frac{1}{2},2}(L_T^2)$$

pour $0<\varepsilon\ll 1$. Il est important de noter que $\dot{X}^s$ ne comporte pas de composante L_T^∞ et donc la norme d'un élément $u\in\dot{X}^s$ pourra être rendu aussi petite que l'on veut par le choix d'un $T=T(u)>0$ assez petit.

D'autre part le terme $\|V(t)u_0\|_{L_x^k L_T^\infty}$ ne sera petit que si $\|u_0\|_{\dot{H}^{s_k}}$ l'est aussi, même pour un T suffisamment petit. Néanmoins, comme remarqué dans [BP06], si nous considérons à la place la différence $V(t)u_0-u_0$, alors nous obtenons le résultat suivant, dont la démonstration est élémentaire.

Lemme 1.3. *Soit $k\geq 4$ et $u_0\in\dot{H}^{s_k}(\mathbb{R})$. Pour tout $\eta>0$, il existe $T=T(u_0)$ tel que*

$$\|V(t)u_0-u_0\|_{L_x^k L_T^\infty}<\eta.$$

Nous avons également besoin d'un meilleur partage de la dérivée dans le terme non-linéaire. Par une décomposition en paraproduit, on voit que la contribution la moins favorable dans le terme $\partial_x u^{k+1}$ est donnée par $\pi(u,u)$, où

$$\pi(f,g)=\sum_{j\in\mathbb{Z}}\partial_x Q_j((Q_{\ll j}f)^k Q_{\sim j}g).$$

L'idée consiste alors à injecter ce terme, ou plus précisément $\pi(u_0,u)$, dans la partie linéaire de l'équation pour obtenir

$$\partial_t u+\mathcal{H}\partial_x^2 u+\pi(u_0,u)=f \tag{1.40}$$

avec
$$f=\pi(u_0,u)-\pi(u,u)-\sum_j \partial_x Q_j\Big(\sum_{r\gtrsim j}(Q_{\sim r}u)^2(Q_{\lesssim r}u)^{k-1}\Big).$$

Cette écriture nous permet alors d'exécuter un argument de point fixe sur la formulation intégrale de (1.40) :

$$u(t)=U(t)u_0-\int_0^t U(t-t')f(t')dt',$$

où $U(t)\varphi$ est solution de

$$\partial_t u+\mathcal{H}\partial_x^2 u+\pi(u_0,u)=0,\quad u(0)=\varphi.$$

Pour ce faire, nous avons besoin d'estimations linéaires sur (1.40), ainsi que d'un contrôle convenable du nouveau terme non-linéaire f. Mais tout a été fait pour que ce dernier point soit réalisé : f contient les bonnes contributions de $\partial_x u^{k+1}$, et le terme $\pi(u_0,u)-\pi(u,u)$ sera petit grâce au Lemme 1.3. En ce qui concerne les estimations linéaires, nous appliquons à (1.40) un opérateur de localisation dyadique et nous nous plaçons sur les fréquences positives, pour obtenir la forme factorisée

$$i\partial_t v_j+(\partial_x+ib_{\ll j})^2 v_j=g_j,$$

où $v_j=P_+Q_ju$ et $b_{\ll j}=\frac{1}{2}(Q_{\ll j}u_0)^k$. Nous appliquons ensuite la transformation de jauge localisée
$$w_j=e^{\frac{i}{2}\int_{-\infty}^x(Q_{\ll j}u_0)^k}P_+Q_ju,\quad j\in\mathbb{Z}$$
pour obtenir
$$i\partial_t w_j+\partial_x^2 w_j=e^{i\int^x b_{\ll j}}g_j.$$

Un autre avantage de cette transformation est que nous pouvons directement récupérer la solution u *via* la relation suivante :

$$P_+u=\sum_j w_j e^{-\frac{i}{2}\int_{-\infty}^x(Q_{\ll j}u_0)^k}.$$

A partir des estimations linéaires connues sur l'équation de Schrödinger, et revenant à u, il n'est pas difficile de voir que la solution de (1.40) satisfait les mêmes estimations linéaires (homogènes et non-homogènes) que (gBO). En particulier

$$\|u\|_{\dot X^{s_k}}+\|u\|_{L_x^kL_T^\infty}\lesssim\|u_0\|_{\dot H^{s_k}}+\|f\|_{\dot{\mathcal{B}}_1^{-1/k,2}(L_T^2)},\tag{1.41}$$

où la constante implicite dans l'inégalité dépend de la donnée u_0. L'estimation du terme f fait appel à des calculs similaires à ceux effectués dans le cadre de (gBO) avec petites données [MR04b] et on obtient

$$\|f\|_{\dot{\mathcal{B}}_1^{-1/k,2}(L_T^2)}\lesssim\|u_0-u\|_{L_x^kL_T^\infty}(\|u_0\|_{L_x^kL_T^\infty}^{k-1}+\|u\|_{L_x^kL_T^\infty}^{k-1})\|u\|_{\dot X^{s_k}}+\|u\|_{L_x^kL_T^\infty}^{k-1}\|u\|_{\dot X^{s_k}}^2.$$

Combinée avec (1.41), cette estimation permet de procéder à un point fixe dans l'intersection des boules

$$B_M(u_0,T) = \{u \in \dot{X}^{s_k} \cap L^k_x L^\infty_T : \|u - u_0\|_{L^k_x L^\infty_T} \leq \delta\}$$

et

$$B_S(u_0,T) = \{u \in \dot{X}^{s_k} \cap L^k_x L^\infty_T : \|u\|_{\dot{X}^{s_k}} \leq \delta\}.$$

Ceci termine essentiellement la démonstration du Théorème 1.3 dans le cas homogène et avec $k \geq 4$. Dans le cas non-homogène, les mêmes arguments s'appliquent dans l'espace $X^s = \dot{X}^0 \cap \dot{X}^s$. Enfin le cas $k = 3$ s'obtient de la même manière en utilisant cette fois l'estimation linéaire (1.26).

Chapitre 2

Equations d'ondes dans des milieux dispersifs et dissipatifs

1 Présentation des modèles

Les équations dispersives introduites au Chapitre 1 s'avèrent être de bons modèles qui rendent compte de la propagation d'ondes dispersives non-linéaires. Cependant, ces ondes sont souvent soumises à des effets dissipatifs plus ou moins importants, particulièrement pour des ondes longues de petite amplitude, et il convient d'inclure cette dissipation en ajoutant un terme à notre équation. Nous nous proposons ici d'étudier le comportement local et global de quelques-uns de ces modèles. Nous étudierons d'abord le caractère globalement bien posé pour des données initiales de régularités minimales, puis nous déterminerons un développement asymptotique précis des solutions, lorsque celles-ci existent pour tout temps.

On s'intéressera dans ce chapitre aux équations

$$\partial_t u - \partial_x D_x^{1+a} u + D_x^\alpha u + u\partial_x u = 0 \tag{2.1}$$

avec $0 \leq a \leq 1$ et $\alpha > 0$. Ici, u est définie pour $(t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}$ et est à valeurs réelles. Les équations (2.1) peuvent être vues comme une combinaison des équations de type KdV

$$\partial_t u - \partial_x D_x^{1+a} u + u\partial_x u = 0, \tag{2.2}$$

et des équations purement dissipatives

$$\partial_t u + D_x^\alpha u + u\partial_x u = 0. \tag{2.3}$$

Les équations (2.2) fournissent un des modèles les plus simples d'équations dispersives non-linéaires. Lorsque $a = 1$, la dispersion est de type Korteweg-de Vries alors que pour $a = 0$, la dispersion est de type Benjamin-Ono.

Les équations de Burgers fractales (2.3) (ou : équations de Burgers à dissipation fractionnaire), ainsi que leurs versions multi-dimensionnelles

$$\partial_t u + (-\Delta)^{\alpha/2} u + \nabla u^2 = 0, \tag{2.4}$$

ont été utilisées pour modéliser de nombreux phénomènes physiques dans lesquels d'importantes créations de chocs interviennent. Lorsque $\alpha = 2$, (2.4) est l'équation classique de Burgers, intervenant dans des phénomènes variés tels que la croissance des interfaces moléculaires, le trafic routier, ou encore la distribution des masses dans l'univers (cf. [KPZ86], [GMS91], [MSW97]). L'étude des turbulences de Burgers, c'est-à-dire les propriétés statistiques des solutions de (2.4) avec données initiales aléatoires, a permis de mettre en évidence des liens étroits avec la théorie des probabilités, voir par exemple [JMW05]. L'étude des équations (2.4) pourrait aussi être intéressante (voir [BPFS79]) dans la compréhension du problème de Navier-Stokes

$$\begin{cases} \partial_t u + (-\Delta)^{\alpha/2} u + (u \cdot \nabla) u + \nabla p = 0, \\ \nabla \cdot u = 0. \end{cases}$$

Les équations (2.3) (et (2.4)) sont dissipatives dans le sens où les solutions ont tendance à se dissiper (s'atténuer) avec le temps. D'autre part, il est facile de vérifier (au moins pour $\alpha = 2$) que pour chaque $\xi \in \mathbb{R}$ fixé, l'onde $(t,x) \mapsto e^{ix\xi - t|\xi|^\alpha}$ est solution de l'équation libre associée à (2.3)

$$\partial_t u + D_x^\alpha u = 0.$$

Ceci indique alors que les modes de Fourier ne se propagent pas comme pour les équations dispersives, mais tendent vers zéro pour des grands temps. Une autre différence importante entre (2.3) et les équations dispersives du Chapitre 1 est la perte d'énergie des solutions. Alors que les équations de type KdV par exemple conservent la norme L^2 au cours du temps, on obtient en multipliant (2.3) par u puis en intégrant en espace sur $\mathbb{R}$:

$$\frac{1}{2} \partial_t \|u(t)\|_{L^2}^2 = -\|D_x^{\alpha/2} u(t)\|_{L^2}^2 \leq 0,$$

et donc la norme L^2 de la solution décroît.

Revenons aux équations mixtes (2.1). Ces équations mettent en jeu trois types d'effets : dispersifs, dissipatifs et non-linéaires. Il est alors important de comprendre les interactions existantes entre ces différents effets, ainsi que leurs conséquences sur le comportement local et l'asymptotique des solutions. Il existe au moins deux façons d'appréhender les équations (2.1). La première d'entre elles consiste à considérer (2.1) comme une version dissipative des équations (2.2) et à utiliser des outils issus de l'analyse des équations dispersives. Nous allons voir qu'une telle approche s'avère fructueuse dans l'étude du caractère localement bien posé pour (2.1), avec notamment l'utilisation des espaces de type Bourgain. D'un autre côté, il sera plus commode dans l'étude du comportement asymptotique de considérer (2.1) comme une perturbation dispersive des équations (2.3), en tirant avantage des méthodes issues de l'analyse des équations dissipatives. En particulier nous exploiterons les propriétés de décroissances du noyau de la chaleur.

Nous allons étudier quelques cas particuliers de (2.1), dans lesquelles la non-linéarité est déjà fixée comme étant quadratique. Nous avons décider de travailler sur deux modèles de dispersion ($a = 0$ et $a = 1$) puis de faire varier la dissipation α entre 0 et 2. Lorsque $\alpha = 0$, le changement d'inconnue $v = e^t u$ permet de voir que (2.1) et (2.2) jouissent des mêmes estimations linéaires, et des mêmes effets régularisants locaux, conduisant à des résultats identiques concernant le caractère localement bien posé dans $H^s(\mathbb{R})$. Concernant le comportement asymptotique des solutions, l'effet dissipatif devient au contraire très fort et on observe alors des décroissances exponentielles. Lorsque $\alpha = 2$, les effets dissipatifs s'ajouteront à la dispersion, menant au caractère bien posé à des niveaux de régularité très bas ; d'un autre côté, la décroissance asymptotique des solutions sera dans ce cas polynômiale.

Nous présentons brièvement les deux types de modèles qui seront étudiés dans ce chapitre.

Equations de KdV dissipatives : Ces équations correspondent au cas $a = 1$ dans (2.1) :

$$\partial_t u + \partial_x^3 u + D_x^\alpha u + u\partial_x u = 0, \tag{dKdV}$$

avec $0 \le \alpha \le 2$. Pour $\alpha = 2$, (dKdV) est la populaire équation de Korteweg-de Vries-Burgers (KdVB), utilisée comme un modèle mathématique pour la propagation d'ondes dans un tube élastique. En particulier, (KdVB) a été dérivée dans le cas d'ondes de chocs acoustiques ioniques en physique des plasmas. Plus récemment [Dut07], (KdVB) a été mise à profit dans la modélisation de la propagation des tsunamis. L'équation (dKdV) dans le cas $\alpha = 1/2$ a également été utilisée [OS70] pour modéliser la surface libre de vagues en eaux peu profondes amorties par la viscosité.

Equations de Benjamin-Ono dissipatives : Ces équations s'écrivent

$$\partial_t u + \mathcal{H}\partial_x^2 u + D_x^\alpha u + u\partial_x u = 0, \tag{dBO}$$

où $\mathcal{H}$ est la transformée de Hilbert et avec $0 \le \alpha \le 2$. Les effets dispersifs sont ici moins importants que dans les équations de KdV dissipatives. Lorsque $\alpha = 2$, (dBO) est l'équation de Benjamin-Ono-Burgers

$$\partial_t u + (\mathcal{H} - 1)\partial_x^2 u + u\partial_x u = 0. \tag{BOB}$$

Dans [ER86], Edwin et Robert ont dérivé (BOB) au moyen de développements asymptotiques formels dans le but de décrire les mouvements des ondes soumises à un champ magnétique intense dans l'atmosphère solaire. Dans ce contexte, les effets dissipatifs sont dus à la conduction de la chaleur.

La suite de ce chapitre est organisée de la façon suivante. Dans la Section 2, nous présentons des espaces fonctionnels introduits par Bourgain puis modifié par Molinet et Ribaud. Nous verrons dans les Sections 3.1 et 3.2 que ces espaces sont bien adaptés aux modèles (dKdV) et (dBO), et nous permettront d'obtenir des résultats optimaux sur le caractère bien posé. La Section 4 est consacrée à l'étude du comportement asymptotique des solutions de (dKdV).

2 Les espaces de Bourgain

2.1 Espaces de Bourgain pour les équations dispersives

Nous présentons et donnons quelques propriétés élémentaires des espaces fonctionnels introduits par Bourgain [Bou93a]-[Bou93b] dans le contexte des équations de Schrödinger et de KdV. Dans [Gin96], Ginibre fournit des explications éclairantes concernant ces espaces et leurs mises à profit dans l'étude locale du problème de Cauchy pour des équations dispersives.

Considérons l'équation de type KdV (2.2) et soit $h(\xi) = \xi|\xi|^{1+a}$ la relation de dispersion associée. Si u est solution de l'équation libre

$$\partial_t u - \partial_x D_x^{1+a} u = 0,$$

et si $\widetilde{u}$ désigne la transformée de Fourier en espace-temps de u, alors il vient

$$(\tau - h(\xi))\widetilde{u}(\tau, \xi) = 0.$$

Ainsi, $\widetilde{u}$ est supportée dans l'ensemble $\{(\tau, \xi) : \tau = h(\xi)\}$, appelé courbe caractéristique.

Par nature, l'utilisation de la transformée de Fourier impose que l'on travaille sur tout l'espace $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. D'un autre côté nous serons souvent amenés à chercher des solutions locales en temps. Afin de palier à ceci, nous pourrons par exemple multiplier la solution considérée par une fonction cutoff $\eta(t)$. Par suite, la transformée de Fourier $\widetilde{\eta u}$ sera localisée dans la région $\{(\tau, \xi) : |\tau - h(\xi)| \leq C\}$ avec $C = C(\eta) > 0$.

Considérant l'équation non-linéaire (2.2) comme une perturbation de l'équation libre associée, on peut s'attendre à ce que la transformée de Fourier de la solution non-linéaire $\widetilde{u}$ (ou $\widetilde{\eta u}$) se concentre encore près de la courbe caractéristique.

L'idée de Bourgain a consisté à prendre en compte cette localisation en définissant les espaces $X^{b,s}$ par leurs normes

$$\|u\|_{X^{b,s}} = \|\langle\xi\rangle^s \langle\tau - h(\xi)\rangle^b \widetilde{u}(\tau, \xi)\|_{L^2_{\tau\xi}}. \tag{2.5}$$

Par l'identité
$$\mathcal{F}_{xt}(W(-t)u)(\tau,\xi) = \widetilde{u}(\tau+h(\xi),\xi), \tag{2.6}$$
la norme $X^{b,s}$ s'écrit également
$$\|u\|_{X^{b,s}} = \|W(-t)u\|_{H^{b,s}}, \quad b,s\in\mathbb{R},$$
où $W(t)=e^{ith(\partial_x)}$ est le générateur de l'évolution libre et $H^{b,s}(\mathbb{R}^2)$ désigne l'espace de Sobolev anisotropique muni de la norme
$$\|u\|_{H^{b,s}} = \Big(\int_{\mathbb{R}^2} \langle\tau\rangle^{2b}\langle\xi\rangle^{2s}|\widetilde{u}(\tau,\xi)|^2 d\tau d\xi\Big)^{1/2},$$
avec $\langle\cdot\rangle = (1+|\cdot|^2)^{1/2}$.

Une conséquence immédiate de cette définition est que si $\varphi\in H^s(\mathbb{R})$, $s\in\mathbb{R}$, alors pour tout $b\in\mathbb{R}$, $X^{b,s}$ contient la solution libre localisée $\eta(t)W(t)\varphi$. De plus, nous pouvons montrer sans difficulté que lorsque $b>1/2$, les espaces $X^{b,s}$ vérifient l'estimation linéaire non-homogène
$$\Big\|\eta(t)\int_0^t W(t-t')f(t')dt'\Big\|_{X^{b,s}} \lesssim \|f\|_{X^{b-1,s}}$$
pour tout $s\in\mathbb{R}$. Ainsi, si u est solution de (2.2), alors
$$\|\eta(t)u\|_{X^{b,s}} \lesssim \|u_0\|_{H^s} + \|\partial_x u^2\|_{X^{b-1,s}}, \tag{2.7}$$
estimation qui sera le point de départ d'une méthode de point fixe, pourvu que nous puissions obtenir une bonne estimation (non-linéaire) du dernier terme dans le membre de droite. Ce dernier point sera étudié plus tard.

Les espaces $X^{b,s}$ sont stables par localisation temporelle. En effet, pour tout $b,s\in\mathbb{R}$,
$$\|\eta(t)u\|_{X^{b,s}} \lesssim \|u\|_{X^{b,s}}$$
où la constante implicite dépend de η. De plus, si $-1/2<b'<b<1/2$, alors pour tout $0<T<1$,
$$\|\eta(t/T)u\|_{X^{b,s}} \lesssim T^{b-b'}\|u\|_{X^{b',s}}.$$
Cette dernière inégalité peut s'avérer très utile pour obtenir un facteur de contraction avec des solutions définies sur un petit intervalle de temps $[-T,+T]$.

Une autre propriété essentielle des espaces de Bourgain est fournie par le lemme suivant.

Lemme 2.1. *Soit $s\in\mathbb{R}$, $b>1/2$ et Y un espace de Banach de fonctions sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ vérifiant*
$$\|e^{it\theta}W(t)\varphi\|_Y \lesssim \|\varphi\|_{H^s} \tag{2.8}$$
pour tout $\varphi\in H^s(\mathbb{R})$ et $\theta\in\mathbb{R}$. Alors nous avons l'estimation
$$\|u\|_Y \lesssim \|u\|_{X^{b,s}}$$

Eléments de preuve. Par le théorème d'inversion de Fourier, nous pouvons écrire

$$u(t,x) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\mathbb{R}^2} e^{i(t\tau+x\xi)}\widetilde{u}(\tau,\xi)d\tau d\xi.$$

Si nous définissons φ_θ par

$$\varphi_\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi}\widetilde{u}(\theta+h(\xi),\xi)d\xi,$$

il vient alors

$$u(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{it\theta}W(t)\varphi_\theta d\theta.$$

Utilisant (2.8) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous concluons

$$\|u\|_Y \lesssim \int_{\mathbb{R}} \|\varphi_\theta\|_{H^s}d\theta \lesssim \Big(\int_{\mathbb{R}} \langle\theta\rangle^{2b}\|\varphi_\theta\|^2_{H^s}d\theta\Big)^{1/2} \lesssim \|u\|_{X^{b,s}}.$$

□

Une conséquence du Lemme 2.1 que nous avons l'injection $X^{b,s} \hookrightarrow L^\infty_t H^s_x$ pour tout $s\in\mathbb{R}$ dès que $b>1/2$. Plus généralement, ce résultat montre que les espaces de Bourgain sont compatibles avec les inégalités de Strichartz ou de type Kato ; par exemple lorsque $a=0$, nous avons

$$\|D^\alpha_x u\|_{L^p_x L^q_t} \lesssim \|u\|_{X^{b,0}}$$

pour tout triplet (α,p,q) 1-admissible (au sens du Chapitre 1).

2.2 Adaptation aux équations dispersives-dissipatives

Les espaces $X^{b,s}$ permettent d'étudier le caractère bien posé des équations dispersives-dissipatives telles que (2.1) (voir [MR01]) mais ne donnent généralement pas de résultat optimal. Dans [MR02], Molinet et Ribaud ont inclus directement la partie dissipative de l'équation dans l'espace de résolution, et ont pu ainsi obtenir un meilleur contrôle des différentes interactions dans le terme non-linéaire.

Par analogie avec (2.5), nous définissons pour $\alpha\geq 0$ l'espace $X^{b,s}_\alpha$ muni de la norme

$$\|u\|_{X^{b,s}_\alpha} = \|\langle\xi\rangle^s\langle i(\tau-h(\xi))+|\xi|^\alpha\rangle^b\widetilde{u}(\tau,\xi)\|_{L^2_{\tau\xi}}.$$

Clairement, on a $X^{b,s}_\alpha \hookrightarrow X^{b,s}$, et plus précisément $X^{b,s}_\alpha = X^{b,s}\cap L^2_t H^{s+\alpha b}_x$ puisque d'après (2.6), nous pouvons réécrire la norme de $X^{b,s}_\alpha$ comme

$$\begin{aligned}\|u\|_{X^{b,s}_\alpha} &= \big\|\langle i\tau+|\xi|^\alpha\rangle^b\langle\xi\rangle^s\widetilde{u}(\tau+h(\xi),\xi)\big\|_{L^2_{\tau\xi}}\\ &= \big\|\langle i\tau+|\xi|^\alpha\rangle^b\langle\xi\rangle^s\mathcal{F}(W(-t)u)(\tau,\xi)\big\|_{L^2_{\tau\xi}}\\ &\sim \|W(-t)u\|_{H^{b,s}} + \|u\|_{L^2_t H^{s+\alpha b}_x}.\end{aligned}$$

Soit $W_\alpha(t)$, le semi-groupe générateur de l'évolution libre associée à (2.1), étendu à $\mathbb{R}$ tout entier "par symétrie miroir" en posant

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \mathcal{F}_x(W_\alpha(t)\varphi)(\xi) = \exp[ith(\xi) - |\xi|^\alpha |t|]\widehat{\varphi}(\xi),\ \varphi \in \mathcal{S}'. \tag{2.9}$$

Concernant (2.9), nous disposons du résultat suivant.

Lemme 2.2. *Pour tout $s \in \mathbb{R}$ et tout $\varphi \in H^s(\mathbb{R})$,*

$$\|\eta(t)W_\alpha(t)\varphi\|_{X_\alpha^{1/2,s}} \lesssim \|\varphi\|_{H^s}. \tag{2.10}$$

Il est important de noter que, contrairement au cas purement dispersif, cette estimation devient fausse si nous remplaçons $X_\alpha^{1/2,s}$ par $X_\alpha^{b,s}$ avec $b > 1/2$.

Démonstration. La preuve est une adaptation de [MR02], Proposition 2.1. Nous avons par définition de la norme

$$\begin{aligned}\|\eta(t)W_\alpha(t)\varphi\|_{X_\alpha^{1/2,s}} &= \big\|\langle\xi\rangle^s\widehat{\varphi}(\xi)\|\langle i\tau + |\xi|^\alpha\rangle^{1/2}\mathcal{F}_t(\eta(t)e^{-|t||\xi|^\alpha})(\tau)\|_{L^2_\tau}\big\|_{L^2_\xi} \\ &\lesssim \big\|\langle\xi\rangle^s\widehat{\varphi}(\xi)\|\langle\tau\rangle^{1/2}\mathcal{F}_t(\eta(t)e^{-|t||\xi|^\alpha})(\tau)\|_{L^2_\tau}\big\|_{L^2_\xi} \\ &\quad + \big\|\langle\xi\rangle^{s+\alpha/2}\widehat{\varphi}(\xi)\|\mathcal{F}_t(\eta(t)e^{-|t||\xi|^\alpha})(\tau)\|_{L^2_\tau}\big\|_{L^2_\xi}.\end{aligned} \tag{2.11}$$

Soit $g_\xi(t) = \eta(t)e^{-|t||\xi|^\alpha}$ et $0 \le b \le 1$. Si $|\xi| \ge 1$, il s'ensuit par l'inégalité de Young que

$$\begin{aligned}\|g_\xi\|_{H^b_t} &= \|\langle\tau\rangle^b(\widehat{\eta} * \mathcal{F}_t(e^{-|t||\xi|^\alpha})(\tau)\|_{L^2_\tau} \\ &\lesssim \|\langle\tau\rangle^b\widehat{\eta}\|_{L^1_\tau}\|e^{-|t||\xi|^\alpha}\|_{L^2_t} + \|\widehat{\eta}\|_{L^1_\tau}\|e^{-|t||\xi|^\alpha}\|_{\dot{H}^b_t} \\ &\lesssim |\xi|^{-\alpha/2} + |\xi|^{\alpha(b-1/2)} \lesssim |\xi|^{\alpha(b-1/2)}.\end{aligned}$$

Si $|\xi| \le 1$, il vient

$$\begin{aligned}\|g_\xi\|_{H^b_t} &= \|\eta(t)e^{-|t||\xi|^\alpha}\|_{H^b_t} \\ &\lesssim \sum_{n\ge 0}\frac{|\xi|^{n\alpha}}{n!}\||t|^n\eta(t)\|_{H^1_t} \\ &\lesssim 1 + \sum_{n\ge 1}\frac{1}{(n-1)!} \lesssim 1.\end{aligned}$$

Il en résulte que pour tout ξ,

$$\|g_\xi\|_{H^b_t} \lesssim \langle\xi\rangle^{\alpha(b-1/2)}, \quad \text{pour} \quad 0 \le b \le 1.$$

Nous concluons en insérant cette dernière inégalité dans (2.11). □

Le lemme suivant donne une estimation linéaire non-homogène sur le terme de force.

Lemme 2.3. *Soit $s \in \mathbb{R}$. Pour tout $0 < \delta < 1/2$ et tout $f \in X_\alpha^{-1/2+\delta,s}$,*

$$\Big\|\chi_{\mathbb{R}_+}(t)\eta(t)\int_0^t W_\alpha(t-t')f(t')dt'\Big\|_{X_\alpha^{1/2,s}} \lesssim \|f\|_{X_\alpha^{-1/2+\delta,s}}. \tag{2.12}$$

Démonstration. La preuve découle d'une réécriture de [MR02], Proposition 2.3. □

2.3 Estimations bilinéaires

Nous allons résoudre (2.1) à l'aide d'une méthode de point fixe appliquée à la formulation intégrale tronquée en temps

$$u(t) = \eta(t)\Big[W_\alpha(t)u_0 - \frac{\chi_{\mathbb{R}_+}(t)}{2}\int_0^t W_\alpha(t-t')\partial_x(\eta_T^2(t')u^2(t'))dt'\Big], \tag{2.13}$$

où nous avons posé $\eta_T(\cdot) = \eta(\cdot/T)$. Combinant les Lemmes 2.2 et 2.3, nous déduisons que si u est solution de (2.13), alors

$$\|u\|_{X_\alpha^{1/2,s}} \lesssim \|u_0\|_{H^s} + \|\partial_x(\eta_T u)^2\|_{X_\alpha^{-1/2+\delta,s}}$$

pour tout $0 < \delta < 1/2$. Notons que, contrairement au cas purement dispersif (estimation (2.7)), nous observons ici une perte de régularité dans la variable $\tau - h(\xi)$ due à la présence de $\delta > 0$. Ceci explique pourquoi nos résultats donnent le caractère bien posé dans des espaces sous-critiques du type $H^s(\mathbb{R})$, $s > s_c$.

Pour contracter le membre de droite dans (2.13), la principale tâche consiste à prouver l'estimation bilinéaire

$$\|\partial_x(uv)\|_{X_\alpha^{-1/2+\delta,s}} \lesssim T^\nu \|u\|_{X_\alpha^{1/2,s}}\|v\|_{X_\alpha^{1/2,s}}, \tag{2.14}$$

pour tout $u, v \in X_\alpha^{1/2,s}$ à support (en temps) dans $[-T,+T]$ et pour un $\nu > 0$. Par dualité, nous voyons qu'il est équivalent de montrer que pour tout $w \in X_\alpha^{1/2-\delta,-s}$,

$$\Big|\int_{\mathbb{R}^2} w\partial_x(uv)\Big| \lesssim T^\nu \|w\|_{X_\alpha^{1/2-\delta,-s}}\|u\|_{X_\alpha^{1/2,s}}\|v\|_{X_\alpha^{1/2,s}}.$$

En posant

$$\begin{aligned}
\widetilde{u_1}(\tau,\xi) &= \langle i(\tau - h(\xi)) + |\xi|^\alpha\rangle^{1/2}\langle\xi\rangle^s\widetilde{u}(\tau,\xi),\\
\widetilde{u_2}(\tau,\xi) &= \langle i(\tau - h(\xi)) + |\xi|^\alpha\rangle^{1/2}\langle\xi\rangle^s\widetilde{v}(\tau,\xi),\\
\widetilde{u_3}(\tau,\xi) &= \langle i(\tau - h(\xi)) + |\xi|^\alpha\rangle^{1/2-\delta}\langle\xi\rangle^{-s}\widetilde{w}(\tau,\xi),
\end{aligned}$$

il est encore équivalent de montrer que

$$|I| \lesssim T^\nu \prod_{j=1}^{3} \|u_j\|_{L^2_{xt}}, \tag{2.15}$$

où

$$I = \int_{\substack{\xi_1+\xi_2+\xi_3=0 \\ \tau_1+\tau_2+\tau_3=0}} K(\tau,\xi) \prod_{j=1}^{3} u_j(\tau_j,\xi_j),$$

et

$$K(\tau,\xi) = \frac{|\xi_3|\langle\xi_3\rangle^s\langle\xi_1\rangle^{-s}\langle\xi_2\rangle^{-s}}{\langle i(\tau_3-h(\xi_3))+|\xi_3|^\alpha\rangle^{1/2-\delta}\prod_{j=1}^{2}\langle i(\tau_j-h(\xi_j))+|\xi_j|^\alpha\rangle^{1/2}}.$$

En fait, quitte à changer δ par $\delta/2$, il suffit grâce au lemme élémentaire suivant de prouver (2.15) avec $\nu = 0$.

Lemme 2.4. *Soit $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ à support (en temps) dans $[-T,+T]$. Alors pour tout $\theta > 0$, il existe $\nu = \nu(\theta) > 0$ tel que*

$$\left\|\mathcal{F}^{-1}\Big(\frac{\widetilde{f}(\tau,\xi)}{\langle\tau-h(\xi)\rangle^\theta}\Big)\right\|_{L^2_{xt}} \lesssim T^\nu \|f\|_{L^2_{xt}}.$$

Dans certaines situations (par exemple pour (KdVB)), l'estimation (2.15) peut se démontrer directement à l'aide d'un régionnement adéquat. Dans notre cas, en particulier dans les régions où la partie dispersive est trop faible pour récupérer la dérivée perdue dans le terme non-linéaire, nous serons amenés à utiliser une décomposition dyadique. Dans [Tao01], Tao étudia systématiquement les estimations multi-linéaires dans des espaces de Bourgain pour certaines équations dispersives en utilisant une telle approche. Nous introduisons brièvement la théorie des $[k,Z]$-multiplicateurs de Tao et renvoyons à [Tao01] pour les détails.

Soit Z un groupe abélien additif avec une mesure invariante $d\eta$. Pour tout entier $k \geq 2$, on définit l'hyperplan

$$\Gamma_k(Z) = \{(\eta_1,...,\eta_k) \in Z^k : \eta_1 + ... + \eta_k = 0\}$$

muni de la mesure

$$\int_{\Gamma_k(Z)} f = \int_{Z^{k-1}} f(\eta_1,...,\eta_{k-1},-(\eta_1+...+\eta_{k-1}))d\eta_1...d\eta_{k-1}.$$

On appelle $[k;Z]$-multiplicateur toute fonction $m : \Gamma_k(Z) \to \mathbb{C}$. La norme du multiplicateur $\|m\|_{[k;Z]}$ est par définition la meilleure constante telle que l'inégalité

$$\Big|\int_{\Gamma_k(Z)} m(\eta)\prod_{j=1}^{k} f_j(\eta_j)\Big| \leq \|m\|_{[k;Z]} \prod_{j=1}^{k} \|f_j\|_{L^2(Z)} \tag{2.16}$$

est vraie pour toutes fonctions test $f_1, ..., f_k$ sur Z. Autrement dit,

$$\|m\|_{[k;Z]} = \sup_{\substack{f_j \in \mathcal{S}(Z) \\ \|f_j\|_{L^2(Z)} \leq 1}} \Big| \int_{\Gamma_k(Z)} m(\eta) \prod_{j=1}^{k} f_j(\eta_j) \Big|.$$

Dans son article [Tao01], Tao utilise les notations suivantes. Les lettres majuscules N_j, L_j ($j = 1, ..., k$) sont supposées dyadiques, c'est-à-dire de la forme 2^ℓ, $\ell \in \mathbb{Z}$. Nous considérons ici le cas $k = 3$,qui correspond au terme non-linéaire quadratique dans l'équation. Il sera utile de définir les quantités $N_{max} \geq N_{med} \geq N_{min}$ pour le maximum, le median et le minimum de N_1, N_2, N_3 respectivement. On définit de façon similaire $L_{max} \geq L_{med} \geq L_{min}$ lorsque $L_1, L_2, L_3 > 0$.

Nous considérons ici des $[3; \mathbb{R} \times \mathbb{R}]$-multiplicateurs et nous paramétrons $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ par $\eta = (\tau, \xi)$ muni de la mesure de Lebesgue $d\tau d\xi$. Définissons

$$h_j(\xi_j) = \xi_j |\xi_j|^{1+a}, \quad \lambda_j = \tau_j - h_j(\xi_j), \quad j = 1, 2, 3,$$

ainsi que la fonction de résonance

$$h(\xi) = h_1(\xi_1) + h_2(\xi_2) + h_3(\xi_3). \tag{2.17}$$

Il est alors clair par (2.16) que l'estimation (2.15) est équivalente à montrer que la norme de multiplicateur

$$\left\| \frac{\xi_3 \langle \xi_3 \rangle^s \langle \xi_1 \rangle^{-s} \langle \xi_2 \rangle^{-s}}{\langle |\lambda_1| + |\xi_1|^\alpha \rangle^{1/2} \langle |\lambda_2| + |\xi_2|^\alpha \rangle^{1/2} \langle |\lambda_3| + |\xi_3|^\alpha \rangle^{1/2-\delta}} \right\|_{[3;\mathbb{R}\times\mathbb{R}]} \tag{2.18}$$

est bornée. Par une décomposition dyadique des variables ξ_j, λ_j et $h(\xi)$, nous pouvons supposer $|\xi_j| \sim N_j$, $|\lambda_j| \sim L_j$ et $|h(\xi)| \sim H$. Par invariance par translation des $[k, Z]$-multiplicateurs ([Tao01], Lemme 3.4) nous pouvons toujours nous restreindre à $L_j \gtrsim 1$ et $N_{max} \gtrsim 1$. Il vient alors

$$\begin{aligned} (2.18) \lesssim \Bigg\| \sum_{N_{max} \gtrsim 1} \sum_{H} \sum_{L_1, L_2, L_3 \gtrsim 1} & \frac{N_3 \langle N_3 \rangle^s \langle N_1 \rangle^{-s} \langle N_2 \rangle^{-s}}{(L_1 + \langle N_1 \rangle^\alpha)^{1/2} (L_2 + \langle N_2 \rangle^\alpha)^{1/2} (L_3 + \langle N_3 \rangle^\alpha)^{1/2-\delta}} \\ & \times X_{N_1, N_2, N_3, H, L_1, L_2, L_3} \Bigg\|_{[3,\mathbb{R}\times\mathbb{R}]} \end{aligned}$$

où

$$X_{N_1, N_2, N_3, H, L_1, L_2, L_3} = \chi_{|h(\xi)| \sim H} \prod_{j=1}^{3} \chi_{|\xi_j| \sim N_j} \chi_{|\lambda_j| \sim L_j}. \tag{2.19}$$

Des égalités

$$\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 0 \tag{2.20}$$

et

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + h(\xi) = 0$$

sur le support du multiplicateur, nous voyons que (2.19) s'annule à moins que

$$N_{max} \sim N_{med} \tag{2.21}$$

et

$$L_{max} \sim \max(H, L_{med}). \tag{2.22}$$

En vue de (2.21), (2.22) et du test de Schur ([Tao01], Lemme 3.11), il suffit de montrer que

$$\sum_{N_{max} \sim N_{med} \sim N} \sum_{L_1, L_2, L_3 \gtrsim 1} \frac{N_3 \langle N_3 \rangle^s \langle N_1 \rangle^{-s} \langle N_2 \rangle^{-s}}{(L_1 + \langle N_1 \rangle^\alpha)^{1/2} (L_2 + \langle N_2 \rangle^\alpha)^{1/2} (L_3 + \langle N_3 \rangle^\alpha)^{1/2-\delta}} \times \| X_{N_1, N_2, N_3, L_{max}, L_1, L_2, L_3} \|_{[3; \mathbb{R} \times \mathbb{R}]} \tag{2.23}$$

et

$$\sum_{N_{max} \sim N_{med} \sim N} \sum_{L_{max} \sim L_{med}} \sum_{H \ll L_{max}} \frac{N_3 \langle N_3 \rangle^s \langle N_1 \rangle^{-s} \langle N_2 \rangle^{-s}}{(L_1 + \langle N_1 \rangle^\alpha)^{1/2} (L_2 + \langle N_2 \rangle^\alpha)^{1/2} (L_3 + \langle N_3 \rangle^\alpha)^{1/2-\delta}} \times \| X_{N_1, N_2, N_3, H, L_1, L_2, L_3} \|_{[3; \mathbb{R} \times \mathbb{R}]} \tag{2.24}$$

sont bornés, uniformément en $N \gtrsim 1$. Ainsi, nous sommes amenés à majorer le terme

$$\| X_{N_1, N_2, N_3, H, L_1, L_2, L_3} \|_{[3; \mathbb{R} \times \mathbb{R}]} \tag{2.25}$$

dans les cas $H \sim L_{max}$ et $L_{max} \sim L_{med} \gg H$. Une fois les bonnes estimations de (2.25) trouvées, l'estimation bilinéaire (2.14) sera une conséquence de (2.24), (2.23) et de calculs élémentaires sur les sommes dyadiques.

3 Caractère bien posé

3.1 Les équations de Benjamin-Ono dissipatives

Nous donnons dans cette section des résultats optimaux sur le caractère bien ou mal posé des équations de Benjamin-Ono dissipatives (dBO).

Dans [Ota05], Otani a étudié l'équation de Benjamin-Ono-Burgers (BOB), et il a obtenu, par des méthodes similaires à celles employées dans [MR02], le caractère bien posé de (BOB) dans $H^s(\mathbb{R})$, $s > -1/2$. Dans [Ota06], le même auteur a généralisé son premier résultat à l'équation (2.1) avec $a \geq 0$ et $\alpha > 0$. Il prouva que le problème de Cauchy associé à cette équation est bien posé dans $H^s(\mathbb{R})$ dès que $a + \alpha < 3$, $\alpha > (3-a)/2$ et $s > -(a + \alpha - 1)/2$.

Dans le cas $a = 0$, le théorème suivant fournit un meilleur résultat.

Théorème 2.1 ([Ven08b]). *Soit $1 < \alpha \leq 2$ et $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$ avec $s > -\alpha/4$. Alors pour tout $T > 0$, il existe une unique solution u de (dBO) dans*

$$Z_T = \mathcal{C}([0,T]; H^s(\mathbb{R})) \cap X^{1/2,s}_{\alpha,T}.$$

De plus, le flot solution $u_0 \mapsto u$ est régulier de $H^s(\mathbb{R})$ vers Z_T et u appartient à $\mathcal{C}((0,T], H^\infty(\mathbb{R}))$.

Dans ce théorème, $X^{b,s}_{\alpha,T}$ désigne la version tronquée en temps des espaces $X^{b,s}_\alpha$ définis plus haut :

$$\|u\|_{X^{b,s}_{\alpha,T}} = \inf_{w \in X^{b,s}_\alpha} \{\|w\|_{X^{b,s}_\alpha},\ w(t) = u(t) \text{ sur } [0,T]\}.$$

Il est intéressant de comparer ce résultat avec ceux disponibles pour l'équation purement dissipative (2.3). A l'aide de techniques classiques dans le contextes des équations semi-linéaires paraboliques, il n'est pas difficile de voir (cf. [Ven08b]) que pour $1 < \alpha \leq 2$, (2.3) est globalement bien posé dans $H^s(\mathbb{R})$ dès que $s > 3/2 - \alpha$; la démonstration de ce résultat s'adapte en outre aisément aux équations (dBO). En particulier lorsque $\alpha = 2$, cela fournit une preuve alternative (et plus simple) de notre résultat. Pour $\alpha < 2$, nous voyons clairement que la partie dispersive joue un rôle crucial dans l'étude de solutions à faible régularité. Plus surprenant encore, les effets dispersifs et dissipatifs s'ajoutent et conduisent à des niveaux de régularité plus bas que ceux obtenus pour les équations (2.2) et (2.3).

Eléments de preuve. Par une méthode standard de point fixe combinée avec les estimations linéaires de la Section 2.2, il suffit de prouver l'estimation bilinéaire (2.14). Par une décomposition dyadique, nous nous restreignons à estimer la norme de multiplicateur (2.25). Notons tout d'abord que la fonction de résonance (2.17) se localise comme

$$H \sim N_{max} N_{min}. \tag{2.26}$$

Ceci nous permet de prouver les estimations suivantes.

Proposition 2.1 ([Ven08b]). *Soit $N_1, N_2, N_3, H, L_1, L_2, L_3 > 0$ satisfaisant (2.21), (2.22) et (2.26).*

1. *Dans le cas haute modulation $L_{max} \sim L_{med} \gg H$, nous avons*

$$(2.25) \lesssim L_{min}^{1/2} N_{min}^{1/2}.$$

2. *Dans le cas faible modulation $L_{max} \sim H$,*

   (a) ((++) cohérence) si $N_{max} \sim N_{min}$, alors

$$(2.25) \lesssim L_{min}^{1/2} L_{med}^{1/4},$$

(b) *((+-) cohérence) si $N_2 \sim N_3 \gg N_1$ et $H \sim L_1 \gtrsim L_2, L_3$, alors pour tout $\gamma > 0$,*

$$(2.25) \lesssim L_{min}^{1/2} \min(N_{min}^{1/2}, N_{max}^{1/2-1/2\gamma} N_{min}^{-1/2\gamma} L_{med}^{1/2\gamma}).$$

De même pour les permutations des indices $\{1,2,3\}$.

(c) *Dans tous les autres cas, le multiplicateur (2.19) s'annule.*

La fin de la démonstration consiste à montrer (2.23) et (2.24) au moyen de calculs fastidieux, en séparant les différents cas intervenant dans la Proposition 2.1. □

Le Théorème 2.1 est optimal dans le sens suivant.

Théorème 2.2 ([Ven08b]). *Soit $1 \leq \alpha \leq 2$ et $s < -\alpha/4$. Alors il n'existe pas $T > 0$ tel que le problème de Cauchy (dBO) admet une unique solution locale définie sur l'intervalle $[0, T]$ et tel que le flot solution $u_0 \mapsto u$ est de classe $\mathcal{C}^3$ dans un voisinage de l'origine de $H^s(\mathbb{R})$ dans $H^s(\mathbb{R})$.*

Le principe de la démonstration est exactement le même que celui du Théorème 1.1 au Chapitre 1. Nous renvoyons à [Ven08b] pour les détails.

De façon similaire, dans le cas $0 \leq \alpha < 1$, nous montrons le caractère faiblement mal posé de (dBO) dans $H^s(\mathbb{R})$, quelque soit $s \in \mathbb{R}$. Ceci semble principalement dû au fait que l'opérateur D_x^α est dans ce cas trop faible pour compenser la dérivée du terme non-linéaire.

Théorème 2.3 ([Ven08b]). *Soit $0 \leq \alpha < 1$ et $s \in \mathbb{R}$. Alors il n'existe pas $T > 0$ tel que le problème de Cauchy (dBO) admet une unique solution locale définie sur l'intervalle $[0, T]$ et tel que le flot solution $u_0 \mapsto u$ est de classe $\mathcal{C}^2$ dans un voisinage de l'origine de $H^s(\mathbb{R})$ dans $H^s(\mathbb{R})$.*

3.2 Les équations de Korteweg-de Vries dissipatives

Nous nous intéressons maintenant aux équations de KdV dissipatives (dKdV), c'est-à-dire au cas $a = 1$ dans (2.1).

Lorsque $\alpha = 0$, (dKdV) se comporte localement comme l'équation de KdV

$$\partial_t u + \partial_{xxx} u + u \partial_x u = 0, \qquad \text{(KdV)}$$

qui a fait l'objet de nombreuses recherches. Dans [Bou93b], Bourgain a montré à l'aide des espaces $X^{b,s}$ que le problème de Cauchy associé à (KdV) est localement bien posé dans $L^2(\mathbb{R})$. Grâce aux lois de conservations à ce niveau de régularité, son résultat devient global. Par un raffinement de cette méthode, Kenig, Ponce et Vega [KPV96] ont démontré une estimation bilinéaire optimale et ont ainsi obtenu le caractère localement bien posé de (KdV) dans $H^s(\mathbb{R})$, $s > -3/4$. En outre, lorsque

$s < -3/4$, le problème est $\mathcal{C}^3$-mal posé dans $H^s(\mathbb{R})$ (voir [Bou97]) et $\mathcal{C}^2$-mal posé dans l'espace homogène $\dot{H}^s(\mathbb{R})$ (voir [Tzv99]).

Lorsque $\alpha = 2$, (dKdV) est l'équation de KdV-Burgers

$$\partial_t u + \partial_{xxx} u - \partial_{xx} u + u\partial_x u = 0. \tag{KdVB}$$

Dans [MR01], Molinet et Ribaud ont étudié (KdVB) dans l'espace de Bourgain $X^{b,s}$ associé à l'équation (KdV), considérant seulement la partie dispersive de l'équation. Ils ont pu prouver le caractère globalement bien posé de (KdVB) dans $H^s(\mathbb{R})$, $s > -3/4 - 1/24$, obtenant ainsi une régularité plus basse que l'indice critique pour (KdV). Plus tard, ces mêmes auteurs [MR02] ont introduit l'espace $X_2^{b,s}$ défini à la Section 2, et sont descendus à la régularité optimale $H^s(\mathbb{R})$, $s > -1$.

Concernant le cas $0 < \alpha < 2$, il a été établi [MR01] que le problème est bien posé dans $H^s(\mathbb{R})$, $s > -3/4$, quelque soit la valeur de α. Travaillant dans les espaces $X_\alpha^{b,s}$, Otani [Ota06] montra que (dKdV) est bien posé dans $H^s(\mathbb{R})$ pour $3/2 \leq \alpha < 2$ et $s > -\alpha/2$. Nous nous proposons d'améliorer ces résultats en montrant que ce problème est globalement bien posé dans $H^s(\mathbb{R})$ dès que $s > s_\alpha$ avec

$$s_\alpha = \begin{cases} -3/4 & \text{si } 0 < \alpha \leq 1, \\ -\frac{3}{5-\alpha} & \text{si } 1 < \alpha \leq 2 \end{cases} .$$

Théorème 2.4 ([Ven07a]). *Soit $0 < \alpha \leq 2$ et $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$ avec $s > s_\alpha$. Alors pour tout $T > 0$, il existe une unique solution u de (dKdV) dans*

$$Z_T = \mathcal{C}([0,T], H^s(\mathbb{R})) \cap X_{\alpha,T}^{1/2,s}.$$

De plus, le flot solution $u_0 \mapsto u$ est régulier de $H^s(\mathbb{R})$ vers Z_T et u appartient à $\mathcal{C}((0,T], H^\infty(\mathbb{R}))$.

Notons que ce résultat a été également obtenu de façon indépendante dans [GW08]. En outre, Xue [Xue07] a récemment amélioré ce résultat et a prouvé que le problème est bien posé dans $H^s(\mathbb{R})$ pour $s > -\min(1, \frac{3+\alpha}{4})$. Il est par ailleurs possible de montrer que cet indice est optimal.

Le schéma de démonstration du Théorème 2.4 suit celui du Théorème 2.1. Il s'agit de montrer l'estimation bilinéaire (2.14) et de "travailler en dyadique". En fait la plupart des régions peuvent se traiter à l'aide de calculs élémentaires, sans utiliser une telle décomposition. Le point clé de la preuve est l'égalité de résonance

$$h(\xi) = \xi_1^3 + \xi_2^3 + \xi_3^3 = 3\xi_1\xi_2\xi_3,$$

lorsque $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 0$. Avec les notations de la Section 2.3, cela conduit à

$$H \sim N_1 N_2 N_3 \sim N_{max}^2 N_{min}. \tag{2.27}$$

La fin de la preuve vient alors essentiellement du résultat suivant.

Proposition 2.2 ([Tao01]). *Soit $N_1, N_2, N_3, H, L_1, L_2, L_3 > 0$ satisfaisant (2.21), (2.22) et (2.27).*

1. *Dans le cas haute modulation $L_{max} \sim L_{med} \gg H$, nous avons*

$$(2.25) \lesssim L_{min}^{1/2} N_{min}^{1/2}.$$

2. *Dans le cas faible modulation $L_{max} \sim H$,*
   (a) *((++) cohérence) si $N_{max} \sim N_{min}$, alors*

$$(2.25) \lesssim L_{min}^{1/2} N_{max}^{-1/4} L_{med}^{1/4},$$

   (b) *((+-) cohérence) si $N_2 \sim N_3 \gg N_1$ et $H \sim L_1 \gtrsim L_2, L_3$, alors*

$$(2.25) \lesssim L_{min}^{1/2} \min(N_{min}^{1/2}, N_{max}^{-1/2} N_{min}^{-1/2} L_{med}^{1/2}).$$

   De même pour les permutations des indices $\{1, 2, 3\}$.

   (c) *Dans tous les autres cas,*

$$(2.25) \lesssim L_{min}^{1/2} \min(N_{min}^{1/2}, N_{max}^{-1} L_{med}^{1/2}).$$

4 Etude asymptotique des équations de Korteweg-de Vries dissipatives

4.1 Généralités

Notre but ici est d'étudier le comportement asymptotique des solutions de l'équation de Korteweg-de Vries dissipative (dKdV) avec $0 < \alpha < 2$.

Lorsque $\alpha = 0$, l'équation (dKdV) s'écrit

$$\partial_t u + \partial_{xxx} u + u + u\partial_x u = 0 \tag{2.28}$$

et, comme nous l'avons vu précédemment, se comporte localement comme (KdV). Concernant son comportement asymptotique, il n'est pas difficile d'obtenir le taux de décroissance en norme L^2 de la solution. En effet, si nous multiplions (2.28) par u puis intégrons en espace sur $\mathbb{R}$, nous trouvons, formellement au moins, l'égalité

$$\frac{1}{2}\partial_t \int_{-\infty}^{\infty} u^2(t,x)dx + \int_{-\infty}^{\infty} u^2(t,x)dx = 0.$$

Il s'ensuit immédiatement que la norme L^2 de la solution est à décroissance rapide :

$$\|u(t)\|_{L^2} = O(e^{-t}) \text{ lorsque } t \to \infty.$$

Ceci constitue une différence importante avec les solutions de l'équation de (KdV) pour lesquelles la norme L^2 est conservée au cours du temps.

Concernant l'équation de KdV-Burgers ((dKdV) avec $\alpha = 2$), nous observons également une perte d'énergie des solutions. Dans leurs travaux [ABS89], Amick, Bona et Schonbek ont prouvé que si $u_0 \in L^1(\mathbb{R}) \cap H^2(\mathbb{R})$, la solution satisfait

$$\|u(t)\|_{L^2} \leq c(1+t)^{-1/4} \tag{2.29}$$

et de plus, cette estimation est optimale pour une classe générique de solutions. Ce résultat a été obtenu grâce à la transformation de Cole-Hopf $v = \exp(-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{x} u(t,y)dy)$ qui vérifie l'équation

$$\partial_t v - \partial_{xx} v = \frac{1}{2}\partial_{xx} uv.$$

Plus tard, Karch [Kar99b] a amélioré ce résultat en montrant que le profil asymptotique (au premier ordre) de la solution avec une masse $M = \int_{\mathbb{R}} u_0$ est donné par la solution fondamentale U_M de l'équation de Burgers

$$\partial_t u - \partial_{xx} u + u\partial_x u = 0 \tag{2.30}$$

avec la même masse. Plus précisément,

$$t^{(1-1/p)/2}\|u(t) - U_M(t)\|_{L^p} \to 0 \quad \text{lorsque } t \to \infty$$

pour tout $p \in [1, \infty]$. La preuve est basée sur l'argument de changement d'échelle suivant : si $u(t,x)$ est solution de (KdVB), alors pour tout $\lambda > 0$, $u_\lambda(t,x) = \lambda u(\lambda^2 t, \lambda x)$ satisfait

$$\partial_t u_\lambda + \lambda^{-1}\partial_{xxx} u_\lambda - \partial_{xx} u_\lambda + u_\lambda \partial_x u_\lambda = 0.$$

A la limite lorsque λ tend vers l'infini, nous constatons que u_λ est solution de (2.30). Ainsi, nous pouvons dire que pour des grands temps, la partie dispersive est négligeable par rapport aux effets dissipatifs et non-linéaires.

Nous nous intéressons ici au cas de "non-linéarité asymptotiquement faible" $0 < \alpha < 2$. En effet, nous allons voir que la solution de (dKdV) se comporte asymptotiquement comme la solution du problème linéaire associé (avec même donnée initiale). Ensuite, nous donnerons un développement asymptotique de la solution dans de nombreux espaces de Sobolev.

Nous allons principalement travailler sur la formulation intégrale de (dKdV)

$$u(t) = S_\alpha(t) * u_0 - \frac{1}{2}\int_0^t S_\alpha(t-s) * \partial_x u^2(s)ds \tag{2.31}$$

valide pour toute solution suffisamment régulière, et où $S_\alpha(t)$ est défini par

$$S_\alpha(t,x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} e^{(i\xi^3 - |\xi|^\alpha)t} d\xi, \quad t > 0.$$

Nous utiliserons également les effets régularisants du noyau $S_\alpha(t)$:

$$\|S_\alpha(t)\|_{\dot W^j_p} \le ct^{-(1-1/p)/\alpha-j/\alpha} \tag{2.32}$$

et

$$\|S_\alpha(t)\|_{\dot W^j_1} \le ct^{-j/\alpha}(1+t^{1/2-3/2\alpha}).$$

pour tout $t>0$, $p\in[2,\infty]$, $j\in\mathbb{N}$ où on a posé $\|f\|_{\dot W^j_p} = \|\partial_x^j f\|_{L^p}$.

4.2 Estimations de décroissance

Soit $u_0 \in L^1(\mathbb{R})\cap L^2(\mathbb{R})$. Nous savons par le Théorème 2.4 qu'il existe une unique solution globale u de (dKdV) dans $\mathcal{C}([0,T],L^2(\mathbb{R}))\cap Z_T$ pour tout $T>0$ et qu'en outre, u est continue de $]0,\infty[$ dans $H^\infty(\mathbb{R})$. Ainsi, la solution devient régulière à tout instant $t_0>0$, et par conséquent, quitte à changer l'instant initial à t_0, nous pouvons supposer que la donnée initiale $u_0\in H^\infty(\mathbb{R})$. Nous ferons de plus les hypothèses suivantes :

$$\forall j\ge 0,\ \sup_{t>0}\|\partial_x^j u(t)\|_{L^2} < \infty, \tag{2.33}$$

$$\sup_{t\ge 0}\|u(t)\|_{L^1} < \infty. \tag{2.34}$$

Lorsque $1<\alpha<2$, il est possible de montrer que ces hypothèses sont bien vérifiées. Pour prouver (2.34), nous multiplions (dKdV) par $\operatorname{sgn} u$ et intégrons sur $\mathbb{R}$, ce qui donne

$$\partial_t\|u(t)\|_{L^1} = -\int_{-\infty}^{\infty}(\partial_{xxx}u + D_x^\alpha u + u\partial_x u)\operatorname{sgn} u.$$

D'autre part, l'inégalité de Kato (voir [BPFS79]-[BFW98]) montre que

$$-\int_{-\infty}^{\infty} D_x^\alpha u \operatorname{sgn} u \le 0.$$

Utilisant la relation

$$\int_{-\infty}^{\infty} u\partial_x u \operatorname{sgn} u = \int_{-\infty}^{\infty}\partial_x(u|u|) = 0,$$

nous obtenons finalement, après intégration en temps sur $[0,t]$,

$$\|u(t)\|_{L^1} \le \|u_0\|_{L^1} + \int_0^t \|\partial_{xxx}u(s)\|_{L^1}ds \le \|u_0\|_{L^1} + \|\partial_{xxx}u\|_{L^1_{xt}}.$$

Toute la difficulté consiste alors à montrer que le terme $\|\partial_{xxx}u\|_{L^1_{xt}}$ est borné. Cela s'obtient par des améliorations successives d'estimations de la solution en norme $L^p_tL^1_x$ sur la formulation intégrale. Nous renvoyons à [Ven08a] pour les détails.

Supposons à présent que les hypothèses (2.33)-(2.34) soient satisfaites et prouvons le résultat suivant.

Théorème 2.5 ([Ven08a]). *Soit* $p \in [2, \infty]$ *et* $j \in \mathbb{N}$. *Supposons que* $u_0 \in H^{j+1}(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ *et que (2.33)-(2.34) sont vérifiées. Alors nous avons*

$$\|u(t)\|_{\dot{W}^j_p} \leq c(1+t)^{-(1-1/p)/\alpha - j/\alpha}, \quad t > 0. \tag{2.35}$$

Notons que d'après (2.32), la solution non-linéaire et la solution linéaire possèdent le même taux de décroissance en grand temps pour la norme $\dot{W}^j_p$.

Eléments de preuve. Commençons par prouver (2.35) dans le cas $(p, j) = (2, 0)$. Multiplions (dKdV) par u et intégrons en espace sur $\mathbb{R}$, il vient

$$\partial_t \|u(t)\|^2_{L^2} + 2\|D_x^{\alpha/2} u(t)\|_{L^2} = 0.$$

Nous utilisons ensuite une méthode introduite par Schonbek [Sch80] qui consiste à écrire grâce à (2.34) :

$$\begin{aligned}
\partial_t \Big[t^{2/\alpha} \|u(t)\|^2_{L^2} \Big] &= \frac{2}{\alpha} t^{2/\alpha - 1} \|u(t)\|^2_{L^2} + t^{2/\alpha} \partial_t \|u(t)\|^2_{L^2} \\
&= \frac{2}{\alpha} t^{2/\alpha - 1} \|u(t)\|^2_{L^2} - 2t^{2/\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} |\xi|^\alpha |\hat{u}(t,\xi)|^2 d\xi \\
&\leq \frac{2}{\alpha} t^{2/\alpha - 1} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{u}(t,\xi)|^2 d\xi - \frac{2}{\alpha} t^{2/\alpha - 1} \int_{|\xi| > (\alpha t)^{-1/\alpha}} |\hat{u}(t,\xi)|^2 d\xi \\
&= \frac{2}{\alpha} t^{2/\alpha - 1} \int_{|\xi| < (\alpha t)^{-1/\alpha}} |\hat{u}(t,\xi)|^2 d\xi \\
&\leq c t^{2/\alpha - 1} \|u(t)\|^2_{L^1} |\{|\xi| < (\alpha t)^{-1/\alpha}\}| \\
&\leq c t^{1/\alpha - 1}.
\end{aligned}$$

L'intégration de cette inégalité sur $[0, t]$ fournit le résultat désiré. La preuve de (2.35) dans les autres cas s'obtient par récurrence sur $j \in \mathbb{N}$ en utilisant la formulation intégrale (2.31), voir [Ven08a] pour les détails. □

4.3 Développement asymptotique

Nous cherchons maintenant les premiers termes apparaissant dans le développement asymptotique de la solution. Le théorème suivant montre qu'au premier ordre, la solution se comporte comme la solution libre $S_\alpha(t) * u_0$.

Théorème 2.6 ([Ven08a]). *Soit* $p \in [2, \infty]$ *et* $j \in \mathbb{N}$. *On suppose que* $u_0 \in H^{j+3}(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ *et que la solution* u *satisfait (2.33)-(2.34). Alors, pour tout* $t > 0$,

$$\|u(t) - S_\alpha(t) * u_0\|_{\dot{W}^j_p} \leq c \begin{cases} (1+t)^{(-(1-1/p)/\alpha - j/\alpha) - 1/\alpha} & \textit{pour} \quad 0 < \alpha < 1, \\ (1+t)^{(-(1-1/p) - j) - 1} \log(1+t) & \textit{pour} \quad \alpha = 1, \\ (1+t)^{(-(1-1/p)/\alpha - j/\alpha) - (2/\alpha - 1)} & \textit{pour} \quad 1 < \alpha < 2. \end{cases}$$

La démonstration est immédiate avec (2.32)-(2.35) en écrivant la différence $u(t)-S_\alpha(t)*u_0$ comme

$$u(t)-S_\alpha(t)*u_0=-\frac{1}{2}\int_0^t S_\alpha(t-s)*\partial_x u^2(s)ds.$$

Nous calculons maintenant explicitement le second terme, disons $w(t)$, du développement asymptotique de la solution. Lorsque $\alpha<1$, le théorème suivant assure que $\|u(t)-S_\alpha(t)*u_0-w(t)\|_{\dot{W}_p^j}$ est un $o(t^{-(1-1/p)/\alpha-j/\alpha-1/\alpha})$. Ce résultat est à comparer avec celui du Théorème 2.6 qui montre que la différence $\|u(t)-S_\alpha(t)*u_0\|_{\dot{W}_p^j}$ est un $O(t^{-(1-1/p)/\alpha-j/\alpha-1/\alpha})$.

Pour énoncer notre prochain résultat, nous avons besoin de définir G_α, la solution fondamentale de l'équation linéaire $\partial_t u+D_x^\alpha u=0$, i.e.

$$G_\alpha(t,x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ix\xi}e^{-t|\xi|^\alpha}d\xi,\quad t>0.$$

Théorème 2.7 ([Ven08a]). *Supposons $p\in[2,\infty]$, $j\in\mathbb{N}$, $u_0\in H^{j+3}(\mathbb{R})\cap L^1(\mathbb{R})$ et que (2.33)-(2.34) sont vérifiées.*

(i) Si $0<\alpha<1$, alors

$$t^{((1-1/p)/\alpha+j/\alpha)+1/\alpha}\left\|u(t)-S_\alpha(t)*u_0+\frac{1}{2}\Big(\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty u^2(s,y)dyds\Big)\partial_x G_\alpha(t)\right\|_{\dot{W}_p^j}\to 0$$

lorsque $t\to\infty$.

(ii) Si $\alpha=1$, alors

$$\frac{t^{(1-1/p)+j+1}}{\log t}\left\|u(t)-S_1(t)*u_0+\frac{M^2}{4\pi}(\log t)\partial_x G_1(t)\right\|_{\dot{W}_p^j}\to 0$$

où $M=\int_{\mathbb{R}}u_0$.

La preuve de ce Théorème est similaire aux travaux de Karch [Kar99a] dans lesquels il considéra une autre classe d'équations non-linéaires dispersives-dissipatives, et est essentiellement basée sur la formulation intégrale (2.31).

Considérons enfin le cas $1<\alpha<2$. Nous obtenons également un développement asymptotique à un ordre $O(t^{-(1-1/p)/\alpha-j/\alpha-1/\alpha})$ (en norme $\dot{W}_p^j$ et pour presque tout α) mais nous avons besoin de plus de termes dans ce développement. L'idée principale est d'approcher la solution par les termes successifs $F^n(t)$ apparaissant dans la convergence de la méthode de point fixe appliquée à la formulation intégrale (2.31) :

$$\begin{cases} F^0(t)=S_\alpha(t)*u_0, \\ F^{n+1}(t)=S_\alpha(t)*u_0-\frac{1}{2}\int_0^t S_\alpha(t-s)*\partial_x(F^n(s))^2ds. \end{cases}$$

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat principal de cette section dans le cas $1<\alpha<2$.

Théorème 2.8 ([Ven08a]). *Soit $1 < \alpha < 2$, $p \in [2, \infty]$, $j \in \mathbb{N}$ et $u_0 \in H^{j+3}(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$. Supposons de plus que les conditions (2.33) and (2.34) sont satisfaites.*

(i) Si $\frac{2N+1}{N+1} < \alpha < \frac{2N+3}{N+2}$ pour un certain $N \in \mathbb{N}$, alors

$$\|u(t) - F^{N+1}(t)\|_{\dot{W}_p^j} \leq c(1+t)^{-(1-1/p)/\alpha - j/\alpha - 1/\alpha}.$$

(ii) Si $\alpha = \frac{2N+3}{N+2}$ pour un certain $N \in \mathbb{N}$, alors

$$\|u(t) - F^{N+1}(t)\|_{\dot{W}_p^j} \leq c(1+t)^{-(1-1/p)/\alpha - j/\alpha - 1/\alpha} \log(1+t).$$

Perspectives de recherche

Sur les équations de Benjamin-Ono généralisées

Nous avons étudié le caractère localement bien posé des équations de Benjamin-Ono généralisées, et obtenu des résultats optimaux pour des données initiales de régularité minimale dans l'échelle des espaces de Sobolev. Ceci achève l'étude locale du caractère bien posé de (gBO) amorcée en 1979 par Saut. Cependant, de nombreuses questions sur ce sujets demeurent en suspend.

Tout d'abord dans le cas $k = 3$, nous n'avons pas pu atteindre l'existence de solution au niveau de régularité critique $H^{1/3}(\mathbb{R})$, mais seulement pour des données dans $H^s(\mathbb{R})$, $s > 1/3$. Ceci est principalement dû à l'estimation (1.26) qui n'est valide que pour $s > 1/3$.

Une autre question intéressante serait de savoir si les solutions locales obtenues dans l'espace critique peuvent ou non se globaliser. Au niveau de régularité $H^{1/2}$, les lois de conservation de la Section 1.2 du Chapitre 1 permettent de prolonger l'existence de la solution à tout temps dans le cas défocalisant et k pair. Cette propriété n'est plus immédiate dans l'espace critique H^{s_k} car on ne dispose pas de lois de conservation à ce niveau. Néanmoins, à l'exemple de l'équation (KdV) pour laquelle nous pouvons globaliser les solutions au niveau $H^{-3/4}$, il est possible qu'en travaillant dans des espaces de Bourgain, la I-méthode puisse s'appliquer et donner des résultats allant dans cette direction.

D'autre part, il serait intéressant d'obtenir des informations supplémentaires concernant le flot solution obtenu au Théorème 1.3. Nous avons simplement prouvé son caractère continu (ou plus précisément localement Lipschitz) afin de montrer que le problème (1.12) est bien posé au sens de la Définition 1.1. Déterminer si ce flot est de classe $\mathcal{C}^m$ pour un $m > 0$ pourra faire l'objet d'un travail futur.

Enfin, une question naturelle est de savoir si nous avons scattering dans l'espace d'énergie $H^{1/2}(\mathbb{R})$, ce qui peut se formuler de la façon suivante. Etant données une donnée $u_0 \in H^{1/2}(\mathbb{R})$ et la solution globale associée u, existe-t-il u_0^+ et u_0^- dans

$H^{1/2}(\mathbb{R})$ tels que

$$\lim_{t\to-\infty}\|u(t)-V(t)u_0^-\|_{H^{1/2}}=0 \quad \text{et} \quad \lim_{t\to+\infty}\|u(t)-V(t)u_0^+\|_{H^{1/2}}=0 \ ?$$

Ce résultat a déjà été prouvé dans [MR04b] pour des petites données. Nous pensons qu'un tel résultat pour des données de taille arbitraire pourrait être établi à l'aide de méthodes similaires à celle employées dans [PV07].

Sur les équations de type KdV dissipatives

Nous avons donné des résultats variés concernant le comportement local et global des équations mixtes (2.1). Nous allons énoncer quelques problèmes connexes sans réponse à ce jour.

Les équations étudiées ici ne concernent que les types de dispersions BO ($a=0$) et KdV ($a=1$). Afin d'acquérir une meilleure compréhension des modèles dispersifs-dissipatifs, il serait intéressant de trouver des résultats optimaux dans le cas intermédiaire $0<a<1$. Des résultats préliminaires ont déjà été prouvés par Otani (voir Chapitre 2, Section 3.1), et nous pensons que les méthodes utilisées ici pourraient mener à des niveaux de régularité plus bas. La principale difficulté semble être la généralisation des estimations (2.26)-(2.27) pour la fonction de résonance, et des Lemmes 2.1-2.2, dont les preuves sont essentiellement basées sur des identités algébriques (égalité de résonance).

Une autre piste de recherche serait de considérer les équations de Benjamin-Ono dissipatives périodiques

$$\begin{cases} \partial_t u+\mathcal{H}\partial_{xx}u+D_x^\alpha u+u\partial_x u=0, & t>0, x\in\mathbb{T}, \\ u(0,\cdot)=u_0\in H^s(\mathbb{T}), \end{cases}$$

Dans [Mol06], Molinet a montré que le problème de Cauchy pour l'équation de Benjamin-Ono périodique est bien posé dans l'espace $L^2(\mathbb{T})$. A notre connaissance, le cas $\alpha>0$ n'a jamais été étudié, mais à l'instar de l'équation de KdV-Burgers périodique [MR02], des résultats pourraient sûrement être obtenus en travaillant dans l'espace $\widetilde{X}_\alpha^{1/2,s}$ muni de la norme

$$\|u\|_{\widetilde{X}_\alpha^{1/2,s}}=\Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\langle n\rangle^{2s}\int_{\mathbb{R}}\langle i(\tau-n|n|)+|n|^\alpha\rangle|\widehat{u}(\tau,n)|^2d\tau\Big)^{1/2}.$$

Enfin, dans le contexte des équations de KdV dissipatives, ce serait un challenge intéressant que de prouver que la solution reste bornée dans L^1 et H^j, $j\geq 0$ (conjectures (2.33)-(2.34)) dans le cas $0<\alpha\leq 1$, et pour une certaine classe de solutions. Ceci renforcerait l'importance des résultats obtenus concernant l'asymptotique de ces équations (Théorèmes 2.5 - 2.7). Nous savons que ces estimations sont valides dans le cas de l'équation purement dissipative (2.3) (voir [BFW98]), mais la preuve échoue ici à cause du terme dispersif. En ce qui concerne notre preuve lorsque $\alpha > 1$, il semble qu'elle ne peut s'adapter au cas $\alpha \leq 1$ car le terme dissipatif est trop faible pour récupérer la dérivée consommée dans le terme non-linéaire.

Deuxième partie

Etude des équations de Benjamin-Ono généralisées

Chapitre 3

Caractère bien posé des équations de Benjamin-Ono généralisées avec grande non-linéarité

Nous montrons que les équations de Benjamin-Ono généralisées $\partial_t u + \mathcal{H}\partial_x^2 u \pm u^k \partial_x u = 0$ sont localement bien posées dans $H^s(\mathbb{R})$, $s > 1/2 - 1/k$ pour $k \geq 12$ et sans restriction sur la taille des données initiales. La condition $s > 1/2 - 1/k$ est connue pour être optimale puisque le flot solution $u_0 \mapsto u$ n'est pas de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ sur $H^s(\mathbb{R})$ pour $s < 1/2 - 1/k$. D'un autre côté, dans le cas particulier des équations de Benjamin-Ono cubiques, nous prouvons le caractère mal posé dans $H^s(\mathbb{R})$, $s < 1/3$.

Sharp well-posedness results for the generalized Benjamin-Ono equation with high nonlinearity

Stéphane Vento,
Université Paris-Est,
Laboratoire d'Analyse et de Mathématiques Appliquées,
5 bd. Descartes, Cité Descartes, Champs-Sur-Marne,
77454 Marne-La-Vallée Cedex 2, France

E-mail: stephane.vento@univ-paris-est.fr

Abstract. We establish the local well-posedness of the generalized Benjamin-Ono equation $\partial_t u + \mathcal{H}\partial_x^2 u \pm u^k \partial_x u = 0$ in $H^s(\mathbb{R})$, $s > 1/2 - 1/k$ for $k \geq 12$ and without smallness assumption on the initial data. The condition $s > 1/2 - 1/k$ is known to be sharp since the solution map $u_0 \mapsto u$ is not of class $\mathcal{C}^{k+1}$ on $H^s(\mathbb{R})$ for $s < 1/2 - 1/k$. On the other hand, in the particular case of the cubic Benjamin-Ono equation, we prove the ill-posedness in $H^s(\mathbb{R})$, $s < 1/3$.

Keywords : NLS-like equations, Cauchy problem
AMS Classification : 35Q55, 35B30, 76B03, 76B55

1 Introduction and statement of the results

1.1 Introduction

Our purpose in this paper is to study the initial value problem for the generalized Benjamin-Ono equation

$$\begin{cases} \partial_t u + \mathcal{H}\partial_x^2 u \pm u^k \partial_x u = 0, & x, t \in \mathbb{R}, \\ u(x, t = 0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{gBO}$$

where $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\mathcal{H}$ is the Hilbert transform defined by

$$\mathcal{H}f(x) = \frac{1}{\pi} \,\mathrm{pv}\left(\frac{1}{x} * f\right)(x) = \mathcal{F}^{-1}\big(-i \ \mathrm{sgn}(\xi)\hat{f}(\xi)\big)(x)$$

and with initial data u_0 belonging to the Sobolev space $H^s(\mathbb{R}) = (1-\partial_x^2)^{-s/2}L^2(\mathbb{R})$.

The case $k = 1$ was deduced by T.B. Benjamin [Ben67] and later by H. Ono [Ono75] as a model in internal wave theory. The Cauchy problem for the Benjamin-Ono equation has been extensively studied. It has been proved in [Sau79] that (BO) is globally well-posed (i.e. global existence, uniqueness and persistence of regularity of the solution) in $H^s(\mathbb{R})$ for $s \geq 3$, and then for $s > 3/2$ and $s \geq 3/2$ in [Iór86] and [Pon91] respectively. Recently, T. Tao [Tao04] proved the well-posedness of this equation for $s \geq 1$ by using a gauge transformation. More recently, combining a gauge transformation with a Bourgain's method, A.D. Ionescu and C.E. Kenig [IK07] shown that one could go down to $L^2(\mathbb{R})$, and this seems to be, in some sense, optimal. It is worth noticing that all these results have been obtained by compactness methods. On the other hand, L. Molinet, J.-C. Saut and N. Tzvetkov [MST01] proved that, for all $s \in \mathbb{R}$, the flow map $u_0 \mapsto u$ is not of class $\mathcal{C}^2$ from $H^s(\mathbb{R})$ to $H^s(\mathbb{R})$. Furthermore, building suitable families of approximate solutions, H. Koch and N. Tzvetkov proved in [KT05] that the flow map is not even uniformly continuous on bounded sets of $H^s(\mathbb{R})$, $s > 0$. As an important consequence of this, since a Picard iteration scheme would imply smooth dependance upon the initial data, we see that such a scheme cannot be used to get solutions in any space continuously embedded in $\mathcal{C}([0,T], H^s(\mathbb{R}))$.

For higher nonlinearities, that is for $k \geq 2$, the picture is a little bit different. It turns out that one can get local well-posedness results through a Picard iteration scheme but for small initial data only (see [MR04b]). This seems mainly due to the fact that the smoothing properties of the linear group $V(\cdot)$ associated to the linear (BO) equation is just sufficient to recover the lost derivative in the nonlinear term, but does not allow to get the required contraction factors. On the other hand, for large initial data, one can prove local well-posedness by compactness methods together with a gauge transformation (see [MR04a]). Unfortunately, this usually requires more smoothness on the initial data. We summarize now the known results about the Cauchy problem for (gBO) equations when $k \geq 2$.

In the case of the modified Benjamin-Ono equation ($k = 2$), C.E. Kenig and H. Takaoka [KT06] have recently obtained the global well-posedness in the energy space $H^{1/2}(\mathbb{R})$. This has been proved thanks to a localized gauge transformation combined with a L^2_{xT} estimate of the solution. This result is known to be sharp since the solution map $u_0 \mapsto u$ is not $\mathcal{C}^3$ in $H^s(\mathbb{R})$, $s < 1/2$ (see [MR04b]).

For (gBO) with cubic nonlinearity ($k = 3$), the local well-posedness is known in $H^s(\mathbb{R})$, $s > 1/3$ for small initial data [MR04b] but only in $H^s(\mathbb{R})$, $s > 3/4$, for large initial data. Moreover, the ill-posedness has been proved in $H^s(\mathbb{R})$, $s < 1/6$ [MR04b]. In this paper, we show the ill-posedness of the cubic Benjamin-Ono equation in $H^s(\mathbb{R})$, $s < 1/3$, which turns out to be optimal according to the above results.

When $k \geq 4$, by a scaling argument, one can guess the best Sobolev space in which the Cauchy problem is locally well-posed, that is, the critical indice s_c such that (gBO) is well-posed in $H^s(\mathbb{R})$ for $s > s_c$ and ill-posed for $s < s_c$. Recall that if $u(x,t)$ is solution to the equation then $u_\lambda(x,t) = \lambda^{1/k}u(\lambda x, \lambda^2 t)$ ($\lambda > 0$) solves (gBO) with initial data $u_\lambda(x,0)$ and moreover

$$\|u_\lambda(\cdot,0)\|_{\dot{H}^s} = \lambda^{s+\frac{1}{k}-\frac{1}{2}}\|u(\cdot,0)\|_{\dot{H}^s}.$$

Hence the $\dot{H}^s(\mathbb{R})$ norm is invariant if and only if $s = s_k = 1/2 - 1/k$ and one can conjecture that $s_c = s_k$.

In the case of small initial data, this limit has been reached by L. Molinet and F. Ribaud [MR04b]. This result is almost sharp in the sense that the flow map $u_0 \mapsto u$ is not of class $\mathcal{C}^{k+1}$ from $H^s(\mathbb{R})$ to $\mathcal{C}([0,T], H^s(\mathbb{R}))$ at the origin when $s < s_k$, [MR04a]. This lack of regularity is also described by H.A. Biagioni and F. Linares in [BL01] where they established, using solitary waves, that the flow map is not uniformly continuous in $\dot{H}^{s_k}(\mathbb{R})$, $k \geq 2$.

For large initial data, the local well-posedness of (gBO) is only known in $H^s(\mathbb{R})$, $s \geq 1/2$, whatever the value of k. This has been proved in [MR04a] by using the gauge transformation

$$u \overset{\mathcal{G}}{\longmapsto} P_+(e^{-i\int_{-\infty}^x u^k}u), \tag{3.1}$$

together with compactness methods. Note also that very recently, in the particular case $k = 4$, N. Burq and F. Planchon [BP06] derived the local well-posedness of (gBO) in the homogeneous space $\dot{H}^{1/4}(\mathbb{R})$. It is possible that their method of proof works in $\dot{H}^{s_k}$ for all $k \geq 4$.

In this paper, our aim is to improve the results obtained in [MR04a] for large initial data. We show that for all $k \geq 12$, (gBO) is locally well-posed in $H^s(\mathbb{R})$, $s > s_k$. Our proofs follow those of [MR04a]: we perform the gauge transformation $w = \mathcal{G}(u)$ of a smooth solution u of (gBO) and derive suitable estimates for w. The main interest of this transformation is to obtain an equation satisfied by w where the nonlinearity $u^k u_x$ is replaced by terms of the form $P_+(u^k P_- u_x)$ in which one can share derivatives on u with derivatives on u^k. Working in the subcritical case, this allows to get a contraction factor T^ν in our estimates. It is worth noticing that $\nu = \nu(s)$ verifies $\lim_{s\to s_k}\nu(s) = 0$, and this explains why our method fails in the critical case $s = s_k$. On the other hand, the restriction $k \geq 12$ appears when we estimate the integral term

$$P_+\Big(e^{-i\int_{-\infty}^x u^k}u\int_{-\infty}^x u^{k-2}\mathcal{H}u_{xx}\Big)$$

(see section 3.2). This term doesn't seem to have a "good structure" since the bad interaction

$$Q_j u\int_{-\infty}^x (P_j u)^{k-2}\mathcal{H}P_j u_{xx}$$

forbids the share of the antiderivative $\int_{-\infty}^{x}$ with other derivatives. We believe that this restriction is of technical nature, but we were not able to discard it.

1.2 Main results

Our main results read as follows.

Theorem 3.1. *Let $k \geq 12$ and $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$ with $s > 1/2 - 1/k$. Then there exist $T = T(s, k, \|u_0\|_{H^s}) > 0$ and a unique solution $u \in \mathcal{C}([0,T]; H^s(\mathbb{R}))$ of (gBO) such that*

$$\|D_x^{s+1/2} u\|_{L_x^\infty L_T^2} < \infty, \tag{3.2}$$

$$\|D_x^{s-1/4} u\|_{L_x^4 L_T^\infty} < \infty, \tag{3.3}$$

$$\|P_0 u\|_{L_x^2 L_T^\infty} < \infty. \tag{3.4}$$

Moreover, the flow map $u_0 \mapsto u$ is Lipschitz on every bounded set of $H^s(\mathbb{R})$.

As mentioned previously, these results are in some sense almost sharp. However, the critical case $s = s_k$ remains open. We will only consider the most difficult case, that is the lowest values for s. More precisely we will prove Theorem 3.1 for $s_k < s < 1/2$.

In the case $k = 3$, we have the following ill-posedness result.

Theorem 3.2. *Let $k = 3$ and $s < 1/3$. There does not exist $T > 0$ such that the Cauchy problem (gBO) admits a unique local solution defined on the interval $[0,T]$ and such that the flow map $u_0 \mapsto u$ is of class $\mathcal{C}^4$ in a neighborhood of the origin from $H^s(\mathbb{R})$ to $H^s(\mathbb{R})$.*

This result implies that we cannot solve (gBO) with $k = 3$ in $H^s(\mathbb{R})$, $s < 1/3$ by a contraction method on the Duhamel formulation. Recall that for small initial data [MR04b], we have local well-posedness in $H^s(\mathbb{R})$ for $s > 1/3$. In view of this, we can conjecture that (gBO) is locally well-posed in $H^s(\mathbb{R})$, $s > 1/3$.

The remainder of this paper is organized as follows. In Section 2, we first derive some linear estimates on the free evolution operator associated to (gBO) and we define our resolution space. Then we give some technical lemmas which will be used for nonlinear estimates. In Section 3 we introduce the gauge transformation and derive the needed nonlinear estimates. The Section 4 is devoted to the proof of Theorem 3.1. Finally we prove our ill-posedness result in the Appendix.

The author is grateful to Francis Ribaud for several useful comments on the subject.

1.3 Notations

For two positive numbers x, y, we write $x \lesssim y$ to mean that there exists a $C > 0$ which does not depend on x and y, and such that $x \leq Cy$. In the sequel, this constant may depend on s and k. We also use $\nu = \nu(s,k)$ to denote a positive power of T which may differ at each occurrence.

Our resolution space is constructed thanks to the space-time Lebesgue spaces $L^p_x L^q_T$ and $L^q_T L^p_x$ endowed for $T > 0$ and $1 \leq p, q \leq \infty$ with the norm

$$\|f\|_{L^p_x L^q_T} = \big\| \|f\|_{L^q_T([0;T])} \big\|_{L^p_x(\mathbb{R})} \text{ and } \|f\|_{L^q_T L^p_x} = \big\| \|f\|_{L^p_x(\mathbb{R})} \big\|_{L^q_T([0;T])}.$$

When $p = q$ we simplify the notation by writing L^p_{xT}.

The well-known operators $\mathcal{F}$ (or $\hat{\cdot}$) and $\mathcal{F}^{-1}$ (or $\check{\cdot}$) are the Fourier operators defined by $\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} f(x)dx$. The operator D^α_x is defined by its Fourier symbol $|\xi|^\alpha$. Let P_+ and P_- be the Fourier projections to $[0, +\infty[$ and $]-\infty, 0]$. Thus one has

$$i\mathcal{H} = P_+ - P_-.$$

Let $\eta \in \mathcal{C}^\infty_0(\mathbb{R})$, $\eta \geq 0$, supp $\eta \subset \{1/2 \leq |\xi| \leq 2\}$ with $\sum_{-\infty}^{\infty} \eta(2^{-k}\xi) = 1$ for $\xi \neq 0$. We set $p(\xi) = \sum_{j \leq -3} \eta(2^{-j}\xi)$ and consider, for all $k \in \mathbb{Z}$, the operators Q_k and P_k respectively defined by

$$Q_k(f) = \mathcal{F}^{-1}(\eta(2^{-k}\xi)\hat{f}(\xi)) \text{ and } P_k(f) = \mathcal{F}^{-1}(p(2^{-k}\xi)\hat{f}(\xi)).$$

Therefore we have the standard Littlewood-Paley decomposition

$$f = \sum_{j \in \mathbb{Z}} Q_j(f) = P_0(f) + \sum_{j \geq -2} Q_j(f) = P_0(f) + \tilde{P}(f). \tag{3.5}$$

We also need the operators

$$P_{\leq k} f = \sum_{j \leq k} Q_j f, \quad P_{\geq k} f = \sum_{j \geq k} Q_j f.$$

We finally introduce the operators $\tilde{P}_+ = P_+ \tilde{P}$ and $\tilde{P}_- = P_- \tilde{P}$ in order to obtain the smooth decomposition

$$f = \tilde{P}_-(f) + P_0(f) + \tilde{P}_+(f). \tag{3.6}$$

2 Linear estimates and technical lemmas

2.1 Linear estimates and resolution space

Recall that (gBO) is equivalent to its integral formulation

$$u(t) = V(t)u_0 \mp \frac{1}{k+1} \int_0^t V(t-\tau)\partial_x(u^{k+1})(\tau)d\tau, \tag{3.7}$$

where $V(t)=\mathcal{F}^{-1}e^{it\xi|\xi|}\mathcal{F}$ is the generator of the free evolution. Let us now gather the well-known estimates on the group $V(\cdot)$ in the following lemma.

Lemma 3.1. *Let $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$, then*

$$\|V(t)\varphi\|_{L^\infty_T L^2_x}\lesssim\|\varphi\|_{L^2}, \tag{3.8}$$
$$\|D_x^{1/2}V(t)\varphi\|_{L^\infty_x L^2_T}\lesssim\|\varphi\|_{L^2}, \tag{3.9}$$
$$\|D_x^{-1/4}V(t)\varphi\|_{L^4_x L^\infty_T}\lesssim\|\varphi\|_{L^2}. \tag{3.10}$$

Moreover, for $0<T<1$, we have

$$\|P_0V(t)\varphi\|_{L^2_x L^\infty_T}\lesssim\|P_0\varphi\|_{L^2}. \tag{3.11}$$

The estimate (3.8) is straightforward whereas the proof of the Kato smoothing effect (3.9) and the maximal in time inequality (3.10) can be found in [KPV91a]. Estimate (3.11) has been proved in [KPV91b].

These estimates motivate the definition of our resolution space.

Definition 3.1. *For $s_k<s<1/2$, we define the space $X^s_T=\{u\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2),\|u\|_{X^s_T}<\infty\}$ where $0<T<1$ and*

$$\|u\|_{X^s_T}=\|u\|_{L^\infty_T H^s_x}+\|D_x^{s+1/2}u\|_{L^\infty_x L^2_T}+\|D_x^{s-1/4}u\|_{L^4_x L^\infty_T}+\|P_0u\|_{L^2_x L^\infty_T}. \tag{3.12}$$

Thus Lemma 3.1 implies immediately that for all $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$ and $0<T<1$,

$$\|V(t)\varphi\|_{X^s_T}\lesssim\|\varphi\|_{H^s}. \tag{3.13}$$

We now give some families of norms which are controlled by the X^s_T norm. This will be usefull to derive some nonlinear estimates in the sequel.

Definition 3.2. *A triplet $(\alpha,p,q)\in\mathbb{R}\times[2,\infty]^2$ is said to be 1-admissible if $(\alpha,p,q)=(1/2,\infty,2)$ or*

$$4\le p<\infty,\quad 2<q\le\infty,\quad \frac{2}{p}+\frac{1}{q}\le\frac{1}{2},\quad \alpha=\frac{1}{p}+\frac{2}{q}-\frac{1}{2}. \tag{3.14}$$

Proposition 3.1. *If $(\alpha-s,p,q)$ is 1-admissible, then for all u in X^s_T,*

$$\|D_x^\alpha u\|_{L^p_x L^q_T}\lesssim\|u\|_{X^s_T}. \tag{3.15}$$

Proof. The inequality

$$\|D_x^{s+1/2}u\|_{L^\infty_x L^2_T}\lesssim\|u\|_{X^s_T} \tag{3.16}$$

yields the result when $(\alpha,p,q)=(1/2,\infty,2)$. Assume now $(\alpha,p,q)\neq(1/2,\infty,2)$. Let $r\in[4;p]$. Then according to Sobolev embedding theorem,

$$\|D_x^{s+1/r-1/2}u\|_{L^r_x L^\infty_T}\lesssim\|D_x^{s-1/4}u\|_{L^4_x L^\infty_T}\lesssim\|u\|_{X^s_T}.$$

By interpolation with (3.16) we get for all $0 \leq \theta \leq 1$

$$\|D_x^{s+\frac{1}{2}-(1-\frac{1}{r})\theta} u\|_{L_x^{r/\theta} L_T^{2/(1-\theta)}} \lesssim \|u\|_{X_T^s}.$$

We deduce (3.15) by taking $\theta = r/p$ since the assumption $r \geq 4$ is equivalent to $\frac{2}{p} + \frac{1}{q} \leq \frac{1}{2}$. $\square$

We list now all the norms needed for the nonlinear estimates.

Corollary 3.1. *For $u \in X_T^s$, the following quantities are bounded by $\|u\|_{X_T^s}$.*

$$\begin{array}{ll}
N_1 = \|u\|_{L_x^p L_T^\infty},\ 4 \leq p \leq (\frac{1}{2} - s)^{-1}, & N_2 = T^{-\nu}\|u\|_{L_{xT}^{3k}}, \\
N_3 = T^{-\nu}\|u\|_{L_x^{k/(1-s)} L_T^{2k/s}}, & N_4 = T^{-\nu}\|u\|_{L_x^{k(\frac{1}{3}+s)^{-1}} L_T^{k(\frac{1}{3}-\frac{s}{2})^{-1}}}, \\
N_5 = T^{-\nu}\|u\|_{L_x^{3k/4s} L_T^{k(\frac{1}{2}-\frac{2s}{3})^{-1}}}, & N_6 = T^{-\nu}\|u\|_{L_x^{k(1-\frac{s}{3})^{-1}} L_T^{6k/s}}, \\
N_7 = T^{-\nu}\|u\|_{L_x^{k+1} L_T^{2k(k+1)}}, & N_8 = T^{-\nu}\|u\|_{L_x^{(k-1)(\frac{5}{6}-\frac{s}{3})^{-1}} L_T^{(k-1)(\frac{2s}{3}-\frac{1}{6})^{-1}}}, \\
N_9 = \|D_x^{1-2s+6\varepsilon} u\|_{L_x^{(\frac{3}{2}-3s)^{-1}} L_T^{1/3\varepsilon}}, & N_{10} = \|D_x^s u\|_{L_{xT}^6}, \\
N_{11} = \|D_x^{s+1/2-3\varepsilon} u\|_{L_x^{1/\varepsilon} L_T^{(\frac{1}{2}-2\varepsilon)^{-1}}}, & N_{12} = \|D_x^{1/2} u\|_{L_x^{3/s} L_T^{(\frac{1}{2}-\frac{2s}{3})^{-1}}},
\end{array}$$

where $\varepsilon, \nu > 0$ are small enough.

Proof. (i) Let $4 \leq p \leq (\frac{1}{2} - s)^{-1}$. By separating low and high frequencies,

$$\|u\|_{L_x^p L_T^\infty} \lesssim \|P_0 u\|_{L_x^2 L_T^\infty} + \|\tilde{P} D_x^{s+1/p-1/2} u\|_{L_x^p L_T^\infty} \lesssim \|u\|_{X_T^s}.$$

Here we used that $\tilde{P}$ is continuous on $L_x^p L_T^q$, $1 \leq p, q \leq \infty$, and the 1-admissibility of $(1/p - 1/2, p, \infty)$.

(ii)-(vii) We evaluate a norm of the form $N = \|u\|_{L_x^p L_T^q}$ with $p > 2$ and $q < \infty$. Fix $\delta > 0$ small enough so that $\alpha = s - s_k - 2\delta > 0$ and $\frac{1}{q} - \delta > 0$. Then using the previous decomposition, Bernstein and Hölder inequalities, we get

$$N \lesssim T^\nu \|P_0 u\|_{L_x^2 L_T^\infty} + T^\nu \|\tilde{P} D_x^\alpha u\|_{L_x^p L_T^{(\frac{1}{q}-\delta)^{-1}}}.$$

We complete the proof by noticing that the triplet $(\alpha - s, p, (\frac{1}{q} - \delta)^{-1})$ is 1-admissible.

(viii) Following the same idea, we write

$$N_8 \lesssim T^\nu \|P_0 u\|_{L_x^2 L_T^\infty} + T^\nu \|\tilde{P} D_x^{\frac{k}{k-1}(s-s_k-2\frac{\delta}{k})} u\|_{L_x^{(k-1)(\frac{5}{6}-\frac{s}{3})^{-1}} L_T^{(k-1)(\frac{2s}{3}-\frac{1}{6}-\delta)^{-1}}}$$

for an appropriate $\delta > 0$. Once again, $(\frac{k}{k-1}(s - s_k - 2\frac{\delta}{k}) - s, (k-1)(\frac{5}{6} - \frac{s}{3})^{-1}, (k-1)(\frac{2s}{3} - \frac{1}{6} - \delta)^{-1})$ is 1-admissible.

(ix)-(xii) Note finally that the triplets $(1-3s+6\varepsilon, (\frac{3}{2}-3s)^{-1}, 1/3\varepsilon)$, $(0,6,6)$, $(1/2-3\varepsilon, 1/\varepsilon, (\frac{1}{2}-2\varepsilon)^{-1})$ and $(1/2-s, 3/s, (\frac{1}{2}-\frac{2s}{3})^{-1})$ are 1-admissible.

□

We now turn to the non-homogenous estimates. Let us first recall the following result found in [MR04a].

Lemma 3.2. *Let $(\alpha_1,\alpha_2)\in\mathbb{R}^2$, $(\nu_1,\nu_2)\in\mathbb{R}_+^2$, and $1\le p_1,q_1,p_2,q_2\le\infty$ such that for all $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$,*

$$\|D_x^{\alpha_1}V(t)\varphi\|_{L_x^{p_1}L_T^{q_1}}\lesssim T^{\nu_1}\|\varphi\|_{L^2},$$

$$\|D_x^{\alpha_2}V(t)\varphi\|_{L_x^{p_2}L_T^{q_2}}\lesssim T^{\nu_2}\|\varphi\|_{L^2}.$$

Then for all $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$,

$$\left\|D_x^{\alpha_2}\int_0^t V(t-\tau)f(\tau)d\tau\right\|_{L_T^\infty L_x^2}\lesssim T^{\nu_2}\|f\|_{L_x^{\bar{p}_2}L_T^{\bar{q}_2}},\tag{3.17}$$

$$\left\|D_x^{\alpha_1+\alpha_2}\int_0^t V(t-\tau)f(\tau)d\tau\right\|_{L_x^{p_1}L_T^{q_1}}\lesssim T^{\nu_1+\nu_2}\|f\|_{L_x^{\bar{p}_2}L_T^{\bar{q}_2}}\tag{3.18}$$

provided $\min(p_1,q_1)>\max(\bar{p}_2,\bar{q}_2)$ *or ($q_1=\infty$ and $\bar{p}_2,\bar{q}_2<\infty$), where $\bar{p}_2$ and $\bar{q}_2$ are defined by $1/\bar{p}_2=1-1/p_2$ and $1/\bar{q}_2=1-1/q_2$.*

Using Lemma 3.2 we infer the following result.

Lemma 3.3. *For all $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, the quantity $\left\|\int_0^t V(t-\tau)f(\tau)d\tau\right\|_{X_T^s}$ can be estimated by*

$$\|f\|_{L_x^{(\frac{5}{6}+\frac{s}{3})^{-1}}L_T^{(\frac{5}{6}-\frac{2s}{3})^{-1}}},\quad \|D_x^s f\|_{L_{xT}^{6/5}},\quad \|D_x^{s-1/2}f\|_{L_x^1L_T^2},\quad \|D_x^{s+1/4}f\|_{L_x^{4/3}L_T^1}.\tag{3.19}$$

Moreover,

$$\left\|D_x^{s+1/2}\int_0^t V(t-\tau)f(\tau)d\tau\right\|_{L_x^\infty L_T^2}\lesssim\|D_x^s f\|_{L_T^1L_x^2}.\tag{3.20}$$

Proof. The first part follows from (3.17)-(3.18) since the triplets $(s,(\frac{1}{6}-\frac{s}{3})^{-1},(\frac{1}{6}+\frac{2s}{3})^{-1})$, $(0,6,6)$, $(1/2,\infty,2)$ and $(-1/4,4,\infty)$ are 1-admissible. Inequality (3.20) is proved in [MR04a], Proposition 2.8. □

2.2 Technical lemmas

In this subsection, we recall some useful lemmas which allow to share derivatives of various expressions in $L_x^pL_T^q$ norms. One can find proofs of Lemmas 3.4-3.8 in [MR04a, KPV93b].
Here f and g denote two elements of $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Lemma 3.4. *If $\alpha > 0$ and $1 < p, q < \infty$, then*

$$\|D_x^\alpha(fg)\|_{L_x^p L_T^q} \lesssim \|f\|_{L_x^{p_1} L_T^{q_1}} \|D_x^\alpha g\|_{L_x^{p_2} L_T^{q_2}} + \|g\|_{L_x^{\tilde{p}_1} L_T^{\tilde{q}_1}} \|D_x^\alpha f\|_{L_x^{\tilde{p}_2} L_T^{\tilde{q}_2}}$$

where $1 < p_1, p_2, q_2, \tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{q}_2 < \infty$, $1 < q_1, \tilde{q}_1 \leq \infty$, $1/p_1 + 1/p_2 = 1/\tilde{p}_1 + 1/\tilde{p}_2 = 1/p$ and $1/q_1 + 1/q_2 = 1/\tilde{q}_1 + 1/\tilde{q}_2 = 1/q$.
Moreover the cases $(p_1, q_1) = (\infty, \infty)$ and $(\tilde{p}_1, \tilde{q}_1) = (\infty, \infty)$ are allowed.

Lemma 3.5. *If $0 < \alpha < 1$ and $1 < p, q < \infty$ then*

$$\|D_x^\alpha F(f)\|_{L_x^p L_T^q} \lesssim \|F'(f)\|_{L_x^{p_1} L_T^{q_1}} \|D_x^\alpha f\|_{L_x^{p_2} L_T^{q_2}}$$

where $1 < p_1, p_2, q_2 < \infty$, $1 < q_1 \leq \infty$, $1/p_1 + 1/p_2 = 1/p$ and $1/q_1 + 1/q_2 = 1/q$.

Lemma 3.6. *If $0 < \alpha < 1$, $0 \leq \beta < 1 - \alpha$ and $1 < p, q < \infty$, then*

$$\|D_x^\beta([D_x^\alpha, f]g)\|_{L_x^p L_T^q} \lesssim \|g\|_{L_x^{p_1} L_T^{q_1}} \|D_x^{\alpha+\beta} f\|_{L_x^{p_2} L_T^{q_2}}$$

where $1 < p_1, q_1, p_2, q_2 < \infty$, $1/p_1 + 1/p_2 = 1/p$ and $1/q_1 + 1/q_2 = 1/q$.
Moreover, if $\beta > 0$ then $q_1 = \infty$ is allowed.

Lemma 3.7. *If $\alpha > 0$, $\beta \geq 0$ and $1 < p, q < \infty$ then*

$$\|D_x^\alpha P_+(f P_- D_x^\beta g)\|_{L_x^p L_T^q} \lesssim \|D_x^{\gamma_1} f\|_{L_x^{p_1} L_T^{q_1}} \|D_x^{\gamma_2} g\|_{L_x^{p_2} L_T^{q_2}}$$

where $1 < p_1, q_1, p_2, q_2 < \infty$, $1/p_1 + 1/p_2 = 1/p$, $1/q_1 + 1/q_2 = 1/q$ and $\gamma_1 \geq \alpha$, $\gamma_1 + \gamma_2 = \alpha + \beta$.

As in [MR04a], we introduce the bilinear operator G defined by

$$G(f, g) = \mathcal{F}^{-1}\Big(\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \frac{\xi_1(\xi - \xi_1)}{i\xi}[\mathrm{sgn}(\xi_1) + \mathrm{sgn}(\xi - \xi_1)]\hat{f}(\xi_1)\hat{g}(\xi - \xi_1)d\xi_1\Big).$$

We easily verify that

$$G(f, f) = \partial_x^{-1}(f_x \mathcal{H} f_x) = \partial_x^{-1}(-i(P_+ f_x)^2 + i(P_- f_x)^2) \tag{3.21}$$

and

$$G(f, g) = \partial_x^{-1}(-iP_+ f_x P_+ g_x + iP_- f_x P_- g_x). \tag{3.22}$$

Lemma 3.8. *If $0 \leq \alpha \leq 1$ and $1 < p, q < \infty$ then*

$$\|D_x^\alpha G(f, g)\|_{L_x^p L_T^q} \lesssim \|D_x^{\gamma_1} f\|_{L_x^{p_1} L_T^{q_1}} \|D_x^{\gamma_2} g\|_{L_x^{p_2} L_T^{q_2}}$$

where $0 \leq \gamma_1, \gamma_2 \leq 1$, $\gamma_1 + \gamma_2 = \alpha + 1$, $1 < p_1, q_1, p_2, q_2 < \infty$, $1/p_1 + 1/p_2 = 1/p$ and $1/q_1 + 1/q_2 = 1/q$.

We will also need the following lemma in order to treat low frequencies in the integral term.

Lemma 3.9. *If $\alpha \geq 0$ and $1 \leq p, q \leq \infty$ then*

$$\|P_0(fD_x^\alpha g)\|_{L_x^p L_T^q} \lesssim \|D_x^{\gamma_1} f\|_{L_x^{p_1} L_T^{q_1}} \|D_x^{\gamma_2} g\|_{L_x^{p_2} L_T^{q_2}} + \|P_0 f\|_{L_x^{\tilde{p}_1} L_T^{\tilde{q}_1}} \|D_x^\alpha P_0 g\|_{L_x^{\tilde{p}_2} L_T^{\tilde{q}_2}}$$

where $\gamma_1, \gamma_2 \geq 0$, $\alpha = \gamma_1 + \gamma_2$, $1 < p_i, q_i, \tilde{p}_i, \tilde{q}_i < \infty$, $1/p_1 + 1/p_2 = 1/\tilde{p}_1 + 1/\tilde{p}_2 = 1/p$ and $1/q_1 + 1/q_2 = 1/\tilde{q}_1 + 1/\tilde{q}_2 = 1/q$.

Proof. We split the product $fD_x^\alpha g$ as follows:

$$fD_x^\alpha g = P_+ f P_+ D_x^\alpha g + P_+ f P_- D_x^\alpha g + P_- f P_+ D_x^\alpha g + P_- f P_- D_x^\alpha g. \tag{3.23}$$

It is sufficient to consider the contribution of the first two terms. For the first one, we remark that

$$P_0[P_+ f P_+(D_x^\alpha g)] = P_0[P_0(P_+ f) P_0(P_+ D_x^\alpha g)]$$

and thus using the continuity of P_0 on $L_x^p L_T^q$,

$$\begin{aligned} \|P_0[P_+ f P_+(D_x^\alpha g)]\|_{L_x^p L_T^q} &\lesssim \|P_0(P_+ f) P_0(P_+ D_x^\alpha g)\|_{L_x^p L_T^q} \\ &\lesssim \|P_0 f\|_{L_x^{\tilde{p}_1} L_T^{\tilde{q}_1}} \|D_x^\alpha P_0 g\|_{L_x^{\tilde{p}_2} L_T^{\tilde{q}_2}}. \end{aligned}$$

For the second term in (3.23) we have typically contributions of the form $P_0[P_0(P_+ f) P_0(P_- D_x^\alpha g)]$ which are treated as above, and $P_0[\tilde{P}_+ f \tilde{P}_- D_x^\alpha g]$. Using decomposition (3.5), one can write

$$\begin{aligned} P_0(\tilde{P}_+ f \tilde{P}_- D_x^\alpha g) = P_0\Big(&\sum_{j\in\mathbb{Z}} Q_j(\tilde{P}_+ f) P_j(\tilde{P}_- D_x^\alpha g) + \sum_{j\in\mathbb{Z}} P_j(\tilde{P}_+ f) Q_j(\tilde{P}_- D_x^\alpha g)\Big) \\ &+ P_0\Big(\sum_{|p|\leq 2} \sum_{j\in\mathbb{Z}} Q_j(\tilde{P}_+ f) Q_{j+p}(\tilde{P}_- D_x^\alpha g)\Big). \end{aligned}$$

By a careful analysis of the various localizations, we get

$$P_0(\tilde{P}_+ f \tilde{P}_- D_x^\alpha g) = P_0\Big[\sum_{|p|\lesssim 1} \sum_{j\in\mathbb{Z}} Q_j(\tilde{P}_+ f) Q_{j+p}(\tilde{P}_- D_x^\alpha g)\Big].$$

Here we define the operators $Q_j^\lambda = 2^{-\lambda j} D_x^\lambda Q_j$. It follows that

$$P_0(\tilde{P}_+ f \tilde{P}_- D_x^\alpha g) = P_0\Big[\sum_{|p|\lesssim 1} \sum_{j\in\mathbb{Z}} Q_j^{-\gamma_1}(\tilde{P}_+ D_x^{\gamma_1} f) Q_{j+p}^{\gamma_1}(\tilde{P}_- D_x^{\gamma_2} g)\Big].$$

Thus using Cauchy-Schwarz and Hölder inequalities, and Littlewood-Paley theorem,

$$\begin{aligned}
&\|P_0(\tilde{P}_+ f \tilde{P}_- D_x^\alpha g)\|_{L^p_x L^q_T} \\
&\lesssim \Big\| \sum_{|p|\lesssim 1} \Big[\Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}} |Q_j^{-\gamma_1} \tilde{P}_+ D_x^{\gamma_1} f|^2 \Big)^{1/2} \Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}} |Q_j^{\gamma_1} \tilde{P}_- D_x^{\gamma_2} g|^2 \Big)^{1/2} \Big] \Big\|_{L^p_x L^q_T} \\
&\lesssim \Big\| \Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}} |Q_j^{-\gamma_1} \tilde{P}_+ D_x^{\gamma_1} f|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \Big\|_{L^{p_1}_x L^{q_1}_T} \Big\| \Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}} |Q_j^{\gamma_1} \tilde{P}_- D_x^{\gamma_2} g|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \Big\|_{L^{p_2}_x L^{q_2}_T} \\
&\lesssim \|D_x^{\gamma_1} f\|_{L^{p_1}_x L^{q_1}_T} \|D_x^{\gamma_2} g\|_{L^{p_2}_x L^{q_2}_T}.
\end{aligned}$$

□

3 Nonlinear estimates

3.1 Gauge transformation

By a rescaling argument, it is sufficient to solve

$$u_t + \mathcal{H}u_{xx} = 2u^k u_x \tag{3.24}$$

(equation with minus sign in front of the nonlinearity could be treated in the same way). If $u \in \mathcal{C}([0,T]; H^\infty(\mathbb{R}))$ is a smooth solution, we define the gauge transformation[1]

$$w = P_+(e^{-iF}u), \quad F = F(u) = \int_{-\infty}^x u^k(y,t)dy. \tag{3.25}$$

The rest of this subsection is devoted to the proof of the following estimate.

Proposition 3.2. *Let be $k \geq 12$ and $s_k < s < 1/2$. Let $u \in \mathcal{C}([0,T]; H^\infty(\mathbb{R}))$ be a solution of the Cauchy problem associated to (3.24) with initial data $u_0 \in H^\infty(\mathbb{R})$. Then there exist $\nu = \nu(s,k) > 0$ and a positive nondecreasing polynomial function p_k such that*

$$\begin{aligned}
\|u\|_{X^s_T} \lesssim \|u_0\|_{H^s} &+ T^\nu p_k(\|u\|_{X^s_T})\|u\|_{X^s_T} \\
&+ (\|u_0\|^k_{H^s} + T^\nu p_k(\|u\|_{X^s_T})\|u\|_{X^s_T})\|D_x^{s+1/2} w\|_{L^\infty_x L^2_T}.
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Proof. We start by splitting u according to (3.6). Then, using that $|P_+ u| = |P_- u|$ (since u is real), we deduce

$$\|u\|_{X^s_T} \lesssim \|P_0 u\|_{X^s_T} + \|\tilde{P}_+ u\|_{X^s_T}. \tag{3.27}$$

[1] we can also set $F = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^x u^k$ in the non-rescaled case $u_t + \mathcal{H}u_{xx} = u^k u_x$.

For the low frequencies, we use the Duhamel formulation of (gBO), Lemma 3.3 and (3.13) to get

$$\begin{aligned}
\|P_0 u\|_{X_T^s} &\lesssim \|P_0 u_0\|_{H^s} + \|P_0 D_x^{1/2} u^{k+1}\|_{L_x^1 L_T^2} \\
&\lesssim \|u_0\|_{H^s} + \|u^{k+1}\|_{L_x^1 L_T^2} \\
&\lesssim \|u_0\|_{H^s} + T^\nu \|u\|^{k+1}_{L_x^{k+1} L_T^{2k(k+1)}} \\
&\lesssim \|u_0\|_{H^s} + T^\nu \|u\|^{k+1}_{X_T^s}.
\end{aligned}$$

Now we consider the second term in the right-hand side of (3.27). As mentioned in [MR04a], $\tilde{P}_+ u$ satisfies the dispersive equation

$$\partial_t(\tilde{P}_+ u) + \mathcal{H}\partial_x^2(\tilde{P}_+ u) = \tilde{P}_+(e^{iF} u^k w_x) - \tilde{P}_+(e^{iF} u^k \partial_x P_-(e^{-iF} u)) + i\tilde{P}_+(u^{2k+1}).$$

Thus, according to Lemma 3.3

$$\begin{aligned}
\|\tilde{P} u\|_{X_T^s} &\lesssim \|V(t) u_0\|_{X_T^s} + \left\| \int_0^t V(t-\tau)\tilde{P}_+(e^{iF} u^k w_x)(\tau) d\tau \right\|_{X_T^s} \\
&\quad + \|D_x^s u^{2k+1}\|_{L_{xT}^{6/5}} + \|\tilde{P}_+(e^{iF} u^k \partial_x P_-(e^{-iF} u))\|_{L_x^{(\frac{5}{6}+\frac{s}{3})^{-1}} L_T^{(\frac{5}{6}-\frac{2s}{3})^{-1}}} \\
&\lesssim \|u_0\|_{H^s} + A + B + C.
\end{aligned}$$

Obviously,

$$B \lesssim \|u^{2k}\|_{L_{xT}^{3/2}} \|D_x^s u\|_{L_{xT}^6} \lesssim \|u\|^{2k}_{L_{xT}^{3k}} \|D_x^s u\|_{L_{xT}^6} \lesssim T^\nu \|u\|^{2k+1}_{X_T^s}.$$

Term C has a structure $P_+(fP_- g_x)$ thus by Lemma 3.7

$$\begin{aligned}
C &\lesssim \|D_x^{1/2}(e^{iF} u^k)\|_{L_x^{6/5} L_T^3} \|D_x^{1/2}(e^{-iF} u)\|_{L_x^{3/s} L_T^{(\frac{1}{2}-\frac{2s}{3})^{-1}}} \\
&\lesssim C_1 C_2.
\end{aligned}$$

Using Lemmas 3.4-3.5, we infer

$$\begin{aligned}
C_1 &\lesssim \|D_x^{1/2} u^k\|_{L_x^{6/5} L_T^3} + \|D_x^{1/2} e^{iF}\|_{L_x^{(\frac{1}{2}-s)^{-1}} L_T^{2/s}} \|u^k\|_{L_x^{(\frac{1}{3}+s)^{-1}} L_T^{(\frac{1}{3}-\frac{s}{2})^{-1}}} \\
&\lesssim \|u\|^{k-1}_{L_x^{(k-1)(\frac{5}{6}-\frac{s}{3})^{-1}} L_T^{(k-1)(\frac{2s}{3}-\frac{1}{6})^{-1}}} \|D_x^{1/2} u\|_{L_x^{3/s} L_T^{(\frac{1}{2}-\frac{2s}{3})^{-1}}} \\
&\quad + \|D_x^{-1/2}(u^k e^{iF})\|_{L_x^{(\frac{1}{2}-s)^{-1}} L_T^{2/s}} \|u\|^k_{L_x^{k(\frac{1}{3}+s)^{-1}} L_T^{k(\frac{1}{3}-\frac{s}{2})^{-1}}} \\
&\lesssim T^\nu \|u\|^k_{X_T^s} + T^\nu \|u^k\|_{L_x^{1/(1-s)} L_T^{2/s}} \|u\|^k_{X_T^s} \\
&\lesssim T^\nu \|u\|^k_{X_T^s} + T^\nu \|u\|^{2k}_{X_T^s} \qquad (3.28)
\end{aligned}$$

and in the same way

$$
\begin{aligned}
C_2 &\lesssim \|D_x^{1/2}u\|_{L_x^{3/s}L_T^{(\frac{1}{2}-\frac{2s}{3})^{-1}}} + \|D_x^{1/2}e^{-iF}\|_{L_x^{(\frac{4s}{3}-\frac{1}{2})^{-1}}L_T^{(\frac{1}{2}-\frac{2s}{3})^{-1}}}\|u\|_{L_x^{(\frac{1}{2}-s)^{-1}}L_T^{\infty}} \\
&\lesssim \|D_x^{1/2}u\|_{L_x^{3/s}L_T^{(\frac{1}{2}-\frac{2s}{3})^{-1}}} + \|u^k\|_{L_x^{3/4s}L_T^{(\frac{1}{2}-\frac{2s}{3})^{-1}}}\|u\|_{L_x^{(\frac{1}{2}-s)^{-1}}L_T^{\infty}} \\
&\lesssim \|u\|_{X_T^s} + T^{\nu}\|u\|_{X_T^s}^{k+1}. \qquad (3.29)
\end{aligned}
$$

Combining (3.28) and (3.29), C is bounded by

$$
C \lesssim T^{\nu}(\|u\|_{X_T^s}^{k+1} + \|u\|_{X_T^s}^{2k+1} + \|u\|_{X_T^s}^{3k+1}) \lesssim T^{\nu}p_k(\|u\|_{X_T^s})\|u\|_{X_T^s}.
$$

In order to study the contribution of A, we decompose $e^{iF}u^k w_x$ as

$$
e^{iF}u^k w_x = D_x^{1/2}(e^{iF}u^k\mathcal{H}D_x^{1/2}w) - [D_x^{1/2}, e^{iF}u^k]\mathcal{H}D_x^{1/2}w.
$$

Therefore, according to Lemma 3.3, and using the fact that $\tilde{P}_+$ is continuous on $L_x^1L_T^2$,

$$
\begin{aligned}
A &\lesssim \|D_x^s(e^{iF}u^k\mathcal{H}D_x^{1/2}w)\|_{L_x^1L_T^2} + \|[D_x^{1/2}, e^{iF}u^k]\mathcal{H}D_x^{1/2}w\|_{L_x^{(\frac{5}{6}+\frac{s}{3})^{-1}}L_T^{(\frac{5}{6}-\frac{2s}{3})^{-1}}} \\
&\lesssim A_1 + A_2.
\end{aligned}
$$

Note that A_1 cannot be treated by Lemma 3.4, so we use Theorem A.13 in [KPV93b]. This leads to

$$
\begin{aligned}
A_1 &\lesssim \|D_x^s(e^{iF}u^k)\|_{L_x^{(1-\frac{s}{3})^{-1}}L_T^{3/2s}}\|D_x^{1/2}(e^{-iF}u)\|_{L_x^{3/s}L_T^{(\frac{1}{2}-\frac{2s}{3})^{-1}}} \\
&\quad + \|u^k\|_{L_x^1L_T^{\infty}}\|D_x^{s+1/2}w\|_{L_x^{\infty}L_T^2} \\
&\lesssim A_{11}C_2 + A_{12}^k\|D_x^{s+1/2}w\|_{L_x^{\infty}L_T^2}.
\end{aligned}
$$

By Lemma 3.4 we bound the contribution of A_{11} by

$$
\begin{aligned}
A_{11} &\lesssim \|D_x^s u^k\|_{L_x^{(1-\frac{s}{3})^{-1}}L_T^{3/2s}} + \|D_x^s e^{iF}\|_{L_x^{3/2s}L_T^{6/s}}\|u^k\|_{L_x^{1/(1-s)}L_T^{2/s}} \\
&\lesssim \|u\|^{k-1}_{L_x^{(k-1)(\frac{5}{6}-\frac{s}{3})^{-1}}L_T^{(k-1)(\frac{2s}{3}-\frac{1}{6})^{-1}}}\|D_x^s u\|_{L_{xT}^6} + \|u\|^k_{L_x^{k(1-\frac{s}{3})^{-1}}L_T^{6k/s}}\|u\|^k_{L_x^{k/(1-s)}L_T^{2k/s}} \\
&\lesssim T^{\nu}\|u\|_{X_T^s}^k + T^{\nu}\|u\|_{X_T^s}^{2k}.
\end{aligned}
$$

To treat $A_{12} = \|u\|_{L_x^kL_T^{\infty}}$ we use the Duhamel formulation of (gBO) and Lemma 3.2,

$$
\begin{aligned}
A_{12} &\lesssim \|V(t)u_0\|_{L_x^kL_T^{\infty}} + \left\|\int_0^t V(t-\tau)\partial_x u^{k+1}(\tau)d\tau\right\|_{L_x^kL_T^{\infty}} \\
&\lesssim \|u_0\|_{H^s} + \|D_x^{s_k+1/2+3\varepsilon}u^{k+1}\|_{L_x^{(1-\varepsilon)^{-1}}L_T^{(\frac{1}{2}+2\varepsilon)^{-1}}}
\end{aligned}
$$

and setting $\varepsilon' = \frac{1}{3}(s-s_k) - \varepsilon > 0$ it follows that

$$\begin{aligned}
&\|D_x^{s_k+1/2+3\varepsilon} u^{k+1}\|_{L_x^{(1-\varepsilon)^{-1}} L_T^{(\frac{1}{2}+2\varepsilon)^{-1}}} \\
&\quad \lesssim \|D_x^{s+1/2-3\varepsilon'} u\|_{L_x^{1/\varepsilon'} L_T^{(\frac{1}{2}-2\varepsilon')^{-1}}} \|u^k\|_{L_x^{(1-\frac{1}{3}(s-s_k))^{-1}} L_T^{\frac{3}{2}(s-s_k)^{-1}}} \\
&\quad \lesssim T^\nu \|u\|_{X_T^s} \|u\|^k_{L_x^{k(1-\frac{1}{3}(s-s_k))^{-1}} L_T^\infty} \\
&\quad \lesssim T^\nu \|u\|^{k+1}_{X_T^s}.
\end{aligned}$$

Finally, according to Lemma 3.6 we write

$$\begin{aligned}
A_2 &\lesssim \|D_x^{1/2}(e^{iF}u^k)\|_{L_x^{6/5} L_T^3} \|D_x^{1/2}(e^{-iF}u)\|_{L_x^{3/s} L_T^{(\frac{1}{2}-\frac{2s}{3})^{-1}}} \\
&\lesssim C_1 C_2 \\
&\lesssim T^\nu p_k(\|u\|_{X_T^s}) \|u\|_{X_T^s},
\end{aligned}$$

which completes the proof of (3.26). □

3.2 Estimate of $\|D_x^{s+1/2} w\|_{L_x^\infty L_T^2}$

Now our aim is to estimate the term $\|D_x^{s+1/2} w\|_{L_x^\infty L_T^2}$ which appears in (3.26). More precisely we will prove the following proposition.

Proposition 3.3. *Let $k \geq 12$ and $s_k < s < 1/2$. For any solution $u \in \mathcal{C}([0,T]; H^\infty(\mathbb{R}))$ to (3.24) with initial data $u_0 \in H^\infty(\mathbb{R})$, we have the following bound,*

$$\|D_x^{s+1/2} w\|_{L_x^\infty L_T^2} \lesssim p_k(\|u_0\|_{H^s})\|u_0\|_{H^s} + T^\nu p_k(\|u\|_{X_T^s})\|u\|_{X_T^s} \tag{3.30}$$

where p_k is a positive nondecreasing polynomial function.

Proof. Following [MR04a], we see that w satisfies the equation

$$\begin{aligned}
w_t + \mathcal{H} w_{xx} = P_+[2e^{-iF}(-ku^k P_- u_x - iP_- u_{xx})] \\
- ik(k-1)P_+\Big(e^{-iF} u \int_{-\infty}^x u^{k-2} u_x \mathcal{H} u_x\Big).
\end{aligned} \tag{3.31}$$

Thus using the Duhamel formulation of (3.31) and Lemma 3.3 we infer

$$\begin{aligned}
&\|D_x^{s+1/2} w\|_{L_x^\infty L_T^2} \\
&\quad \lesssim \|D_x^{s+1/2} V(t) w(0)\|_{L_x^\infty L_T^2} \\
&\qquad + \|P_+[2e^{-iF}(-ku^k P_- u_x - iP_- u_{xx})]\|_{L_x^{(\frac{5}{6}+\frac{s}{3})^{-1}} L_T^{(\frac{5}{6}-\frac{2s}{3})^{-1}}} \\
&\qquad + \Big\|D_x^{s+1/2} \int_0^t V(t-\tau) P_+\Big(e^{-iF} u \int_{-\infty}^x u^{k-2} u_x \mathcal{H} u_x\Big) d\tau\Big\|_{L_x^\infty L_T^2}.
\end{aligned} \tag{3.32}$$

The first term of right-hand side can be bounded by

$$\begin{aligned}
\|D_x^{s+1/2}V(t)w(0)\|_{L_x^\infty L_T^2} &\lesssim \|e^{-iF(u_0)}u_0\|_{H^s} \\
&\lesssim \|u_0\|_{L^2} + \|e^{-iF(u_0)}\|_{L^\infty}\|D_x^s u_0\|_{L^2} \\
&\quad + \|D_x^s e^{-iF(u_0)}\|_{L^{1/s}}\|u_0\|_{L^{(\frac{1}{2}-s)^{-1}}} \\
&\lesssim \|u_0\|_{H^s} + \|D^{s-1}(e^{-iF(u_0)}u_0^k)\|_{L^{1/s}}\|u_0\|_{H^s} \\
&\lesssim \|u_0\|_{H^s}(1+\|u_0^k\|_{L^1}) \\
&\lesssim \|u_0\|_{H^s}(1+\|u_0\|_{H^s}^k).
\end{aligned}$$

On the other hand, according to Lemma 3.7, we see that

$$\begin{aligned}
&\|P_+[2e^{-iF}(-ku^kP_-u_x - iP_-u_{xx})]\|_{L_x^{(\frac{5}{6}+\frac{s}{3})^{-1}}L_T^{(\frac{5}{6}-\frac{2s}{3})^{-1}}} \\
&\lesssim \|D_x^{1/2}(e^{-iF}u^k)\|_{L_x^{6/5}L_T^3}\|D_x^{1/2}u\|_{L_x^{3/s}L_T^{(\frac{1}{2}-\frac{2s}{3})^{-1}}} \\
&\lesssim C_1\|u\|_{X_T^s} \\
&\lesssim T^\nu\|u\|_{X_T^s}^{k+1} + T^\nu\|u\|_{X_T^s}^{2k+1}
\end{aligned}$$

Thus it remains to estimate the integral term in (3.32), that is, the last one. For this purpose, we split it as

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^x u^{k-2}u_x\mathcal{H}u_x &= P_0\int_{-\infty}^x u^{k-2}u_x\mathcal{H}u_x + \tilde{P}_+\int_{-\infty}^x u^{k-2}u_x\mathcal{H}u_x \\
&\quad + \tilde{P}_-\int_{-\infty}^x u^{k-2}u_x\mathcal{H}u_x \\
&= I + II + III.
\end{aligned}$$

By symmetry, it will be enough to consider the contributions of I and II.

Contribution of I

Using a commutator operator, we decompose

$$D_x^s(e^{-iF}uI) = D_x^s(e^{-iF}u)I + [D_x^s, I]e^{-iF}u.$$

Therefore thanks to Lemma 3.3 we obtain

$$\begin{aligned}
&\Big\|D_x^{s+1/2}\int_0^t V(t-\tau)P_+\Big(e^{-iF}uP_0\int_{-\infty}^x u^{k-2}u_x\mathcal{H}u_x\Big)d\tau\Big\|_{L_x^\infty L_T^2} \\
&\lesssim \Big\|D_x^s(e^{-iF}u)P_0\int_{-\infty}^x u^{k-2}u_x\mathcal{H}u_x\Big\|_{L_T^1L_x^2} \\
&\quad + \Big\|D_x^{1/4}\Big[D_x^s, P_0\int_{-\infty}^x u^{k-2}u_x\mathcal{H}u_x\Big]e^{-iF}u\Big\|_{L_x^{4/3}L_T^1} \\
&\lesssim D + E.
\end{aligned}$$

The contribution of D is treated as follows.

$$\begin{aligned}
D &\lesssim \|D_x^s(e^{-iF}u)\|_{L_T^\infty L_x^2}\Big\|\int_{-\infty}^x P_0(u^{k-2}u_x\mathcal{H}u_x)\Big\|_{L_T^1L_x^\infty}\\
&\lesssim (\|D_x^s u\|_{L_T^\infty L_x^2} + \|D_x^s e^{-iF}\|_{L_T^\infty L_x^{1/s}}\|u\|_{L_T^\infty L_x^{(\frac12 -s)^{-1}}})\|P_0(u^{k-2}\partial_x G(u,u))\|_{L^1_{xT}}\\
&\lesssim T^\nu\|u\|_{L_T^\infty H_x^s}(1+\|u\|^k_{L_T^\infty H_x^{s_k}})\|P_0(u^{k-2}\partial_x G(u,u))\|_{L_x^1L_T^{1/(1-\varepsilon)}}\\
&\lesssim T^\nu\|u\|_{X_T^s}(1+\|u\|^k_{X_T^s})\|P_0(u^{k-2}\partial_x G(u,u))\|_{L_x^1L_T^{1/(1-\varepsilon)}}.
\end{aligned}$$

The low frequencies term is estimated with Lemma 3.9. We get

$$\begin{aligned}
&\|P_0(u^{k-2}\partial_x G(u,u))\|_{L_x^1L_T^{1/(1-\varepsilon)}}\\
&\quad\lesssim \|D_x^{1-2s+6\varepsilon}u^{k-2}\|_{L_x^{1/(1-2\varepsilon)}L_T^{1/3\varepsilon}}\|D_x^{2s-6\varepsilon}G(u,u)\|_{L_x^{1/2\varepsilon}L_T^{1/(1-4\varepsilon)}}\\
&\qquad+\|P_0u^{k-2}\|_{L_x^{(1-\frac{2s}{3})^{-1}}L_T^{(\frac{4s}{3}-\varepsilon)^{-1}}}\|P_0\partial_x G(u,u)\|_{L_x^{3/2s}L_T^{(1-\frac{4s}{3})^{-1}}}\\
&\quad\lesssim \|u^{k-3}\|_{L_x^{(3s-\frac12-2\varepsilon)^{-1}}L_T^\infty}\|D_x^{1-2s+6\varepsilon}u\|_{L_x^{(\frac32-3s)^{-1}}L_T^{1/3\varepsilon}}\|D_x^{s+1/2-3\varepsilon}u\|^2_{L_x^{1/\varepsilon}L_T^{(\frac12-2\varepsilon)^{-1}}}\\
&\qquad+\|u\|^{k-2}_{L_x^{k-2}L_T^\infty}\|D_x^{1/2}u\|^2_{L_x^{3/s}L_T^{(\frac12-\frac{2s}{3})^{-1}}}\\
&\quad\lesssim \|u\|^k_{X_T^s}.
\end{aligned}$$

Note that in order to bound the norm $N_9 = \|D_x^{1-2s+6\varepsilon}u\|_{L_x^{(\frac32-3s)^{-1}}L_T^{1/3\varepsilon}}$, we have to impose $k \geq 12$. Indeed, for $\varepsilon > 0$ small enough, the triplet $(1-3s+6\varepsilon, (\frac32 - 3s)^{-1}, 1/3\varepsilon)$ is 1-admissible if and only if

$$\Big(\frac32 - 3s\Big)^{-1} \geq 4 \quad \text{and} \quad 2\Big(\frac32 - 3s\Big) + 3\varepsilon \leq \frac12$$

if and only if $s > 5/12 = 1/2 - 1/12$.

To bound E by Lemma 3.6, we write

$$
\begin{aligned}
E &\lesssim T^{\nu}\Big\|D_x^{1/4}\Big[D_x^s, P_0\int_{-\infty}^{x} u^{k-2}u_x\mathcal{H}u_x\Big]e^{-iF}u\Big\|_{L_x^{4/3}L_T^{1/(1-\varepsilon)}} \\
&\lesssim T^{\nu}\sum_{j=-\infty}^{-3} 2^{-j}\|D_x^{1/4}\big[D_x^s, Q_j(u^{k-2}u_x\mathcal{H}u_x)\big]e^{-iF}u\|_{L_x^{4/3}L_T^{1/(1-\varepsilon)}} \\
&\lesssim T^{\nu}\sum_{j=-\infty}^{-3} 2^{-j}\|D_x^{s+1/4}Q_j(u^{k-2}u_x\mathcal{H}u_x)\|_{L_x^{(s+\frac{1}{4}-\varepsilon)^{-1}}L_T^{1/(1-\varepsilon)}}\|u\|_{L_x^{(\frac{1}{2}-s+\varepsilon)^{-1}}L_T^{\infty}} \\
&\lesssim T^{\nu}\Big(\sum_{j=-\infty}^{-3} 2^{2\varepsilon j}\Big)^{1/2} \\
&\quad\times\Big(\sum_{j=-\infty}^{-3} 2^{-2(1+\varepsilon)j}\|D_x^{s+1/4}Q_j(u^{k-2}u_x\mathcal{H}u_x)\|^2_{L_x^{(s+\frac{1}{4}-\varepsilon)^{-1}}L_T^{1/(1-\varepsilon)}}\Big)^{1/2}\|u\|_{X_T^s} \\
&\lesssim T^{\nu}\|D_x^{s-3/4-\varepsilon}P_0(u^{k-2}\partial_x G(u,u))\|_{L_x^{(s+\frac{1}{4}-\varepsilon)^{-1}}L_T^{1/(1-\varepsilon)}}\|u\|_{X_T^s} \\
&\lesssim T^{\nu}\|P_0(u^{k-2}\partial_x G(u,u)\|_{L_x^1L_T^{1/(1-\varepsilon)}}\|u\|_{X_T^s} \\
&\lesssim T^{\nu}\|u\|_{X_T^s}^{k+1}.
\end{aligned}
$$

Contribution of II
We split the term II into

$$II = II_1 + II_2 + II_3$$

with

$$
\begin{aligned}
II_1 &= \int_{-\infty}^{x} \tilde{P}_+(u^{k-2}P_-(u_x\mathcal{H}u_x)), \\
II_2 &= \int_{-\infty}^{x} \tilde{P}_+(P_+(u^{k-2})P_+(u_x\mathcal{H}u_x)), \\
II_3 &= \int_{-\infty}^{x} \tilde{P}_+(P_-(u^{k-2})P_+(u_x\mathcal{H}u_x)).
\end{aligned}
$$

Contribution of II_1
The treatment of II_1 is similar to the one of I. We write

$$D_x^s(e^{-iF}uII_1) = D_x^s(e^{-iF}u)II_1 + [D_x^s, II_1]e^{-iF}u$$

and thus

$$
\begin{aligned}
&\Big\|D_x^{s+1/2}\int_0^t V(t-\tau)P_+\Big(e^{-iF}u\int_{-\infty}^x \tilde{P}_+(u^{k-2}P_-(u_x\mathcal{H}u_x))\Big)d\tau\Big\|_{L_x^\infty L_T^2}\\
&\quad\lesssim \Big\|D_x^s(e^{-iF}u)\int_{-\infty}^x \tilde{P}_+(u^{k-2}P_-(u_x\mathcal{H}u_x))\Big\|_{L_T^1L_x^2}\\
&\quad\quad+\Big\|D_x^{1/4}\Big[D_x^s,\int_{-\infty}^x \tilde{P}_+(u^{k-2}P_-(u_x\mathcal{H}u_x))\Big]e^{-iF}u\Big\|_{L_x^{4/3}L_T^1}\\
&\quad\lesssim D'+E'.
\end{aligned}
$$

We first bound D' as

$$
\begin{aligned}
D'&\lesssim \|D_x^s(e^{-iF}u)\|_{L_T^\infty L_x^2}\Big\|\int_{-\infty}^x \tilde{P}_+(u^{k-2}P_-(u_x\mathcal{H}u_x))\Big\|_{L_T^1L_x^\infty}\\
&\lesssim \|u\|_{X_T^s}(1+\|u\|_{X_T^s}^k)\|\tilde{P}_+(u^{k-2}P_-\partial_xG(u,u))\|_{L_T^1L_x^{1/(1-\varepsilon)}}\\
&\lesssim T^\nu\|u\|_{X_T^s}(1+\|u\|_{X_T^s}^k)\|\tilde{P}_+(u^{k-2}P_-\partial_xG(u,u))\|_{L_{xT}^{1/(1-\varepsilon)}}
\end{aligned}
$$

and using Lemma 3.7, we get

$$
\begin{aligned}
&\|\tilde{P}_+(u^{k-2}P_-\partial_xG(u,u))\|_{L_{xT}^{1/(1-\varepsilon)}}\\
&\quad\lesssim \|D_x^{1-2s+6\varepsilon}u^{k-2}\|_{L_x^{1/(1-3\varepsilon)}L_T^{1/3\varepsilon}}\|D_x^{2s-6\varepsilon}G(u,u)\|_{L_x^{1/2\varepsilon}L_T^{1/(1-4\varepsilon)}}\\
&\quad\lesssim \|u^{k-3}\|_{L_x^{(3s-\frac12-3\varepsilon)^{-1}}L_T^\infty}\|D_x^{1-2s+6\varepsilon}u\|_{L_x^{(\frac32-3s)^{-1}}L_T^{1/3\varepsilon}}\|D_x^{s+1/2-3\varepsilon}u\|^2_{L_x^{1/\varepsilon}L_T^{(\frac12-2\varepsilon)^{-1}}}\\
&\quad\lesssim \|u\|_{X_T^s}^k.
\end{aligned}
$$

Next, E' is estimated as follows

$$
\begin{aligned}
E'&\lesssim T^\nu\Big\|D_x^{1/4}\Big[D_x^s,\int_{-\infty}^x \tilde{P}_+(u^{k-2}P_-(u_x\mathcal{H}u_x))\Big]e^{-iF}u\Big\|_{L_x^{4/3}L_T^{1/(1-\varepsilon)}}\\
&\lesssim T^\nu\|D_x^{s-3/4}\tilde{P}_+(u^{k-2}P_-\partial_xG(u,u))\|_{L_x^{(s+\frac14)^{-1}}L_T^{1/(1-\varepsilon)}}\|u\|_{L_x^{(\frac12-s)^{-1}}L_T^\infty}\\
&\lesssim T^\nu\|\tilde{P}_+(u^{k-2}P_-\partial_xG(u,u))\|_{L_{xT}^{1/(1-\varepsilon)}}\|u\|_{X_T^s}\\
&\lesssim T^\nu\|u\|_{X_T^s}^{k+1}.
\end{aligned}
$$

Contribution of II_2

A decomposition of u^{k-2} into low and high frequencies, an integration by parts, and formulas (3.21-3.22) give

$$
\begin{aligned}
II_2&=\int_{-\infty}^x \tilde{P}_+[P_+P_{\le -4}u^{k-2}P_+P_{\ge -3}\partial_xG(u,u)]\\
&\quad+\int_{-\infty}^x \tilde{P}_+[P_+P_{\ge -3}u^{k-2}P_+\partial_xG(u,u)]\\
&=\tilde{P}_+[P_+P_{\le -4}u^{k-2}P_+P_{\ge -3}G(u,u)]-i\tilde{P}_+G(P_{\le -4}u^{k-2},P_{\ge -3}\partial_x^{-1}G(u,u))\\
&\quad+i\tilde{P}_+G(P_{\ge -3}\partial_x^{-1}u^{k-2},G(u,u)).
\end{aligned}\tag{3.33}
$$

We bound the first term by

$$\begin{aligned}
&\Big\| D_x^{s+1/2} \int_0^t V(t-\tau)P_+(e^{-iF} u\tilde{P}_+[P_+P_{\le -4}u^{k-2}P_+P_{\ge -3}G(u,u)])(\tau)d\tau \Big\|_{X_T^s} \\
&\quad \lesssim \|u\tilde{P}_+[P_+P_{\le -4}u^{k-2}P_+P_{\ge -3}G(u,u)]\|_{L_x^{(\frac{5}{6}+\frac{s}{3})^{-1}} L_T^{(\frac{5}{6}-\frac{2s}{3})^{-1}}} \\
&\quad \lesssim \|u\|_{L_x^{(k-1)(\frac{5}{6}-\frac{s}{3})^{-1}} L_T^{(k-1)(\frac{2s}{3}-\frac{1}{6})^{-1}}} \\
&\qquad \times \|P_+P_{\le -4}u^{k-2}P_+P_{\ge -3}G(u,u)\|_{L_x^{(k-1)[k(\frac{5}{6}+\frac{s}{3})-\frac{5}{3}]^{-1}} L_T^{(k-1)[k(\frac{5}{6}-\frac{2s}{3})-\frac{2}{3}]^{-1}}} \\
&\quad \lesssim \|u\|_{L_x^{(k-1)(\frac{5}{6}-\frac{s}{3})^{-1}} L_T^{(k-1)(\frac{2s}{3}-\frac{1}{6})^{-1}}} \\
&\qquad \times \|u^{k-2}\|_{L_x^{\frac{k-1}{k-2}(\frac{5}{6}-\frac{s}{3})^{-1}} L_T^{\frac{k-1}{k-2}(\frac{2s}{3}-\frac{1}{6})^{-1}}} \|G(u,u)\|_{L_x^{3/2s} L_T^{(1-\frac{4s}{3})^{-1}}} \\
&\quad \lesssim \|u\|^{k-1}_{L_x^{(k-1)(\frac{5}{6}-\frac{s}{3})^{-1}} L_T^{(k-1)(\frac{2s}{3}-\frac{1}{6})^{-1}}} \|D_x^{1/2}u\|^2_{L_x^{3/s} L_T^{(\frac{1}{2}-\frac{2s}{3})^{-1}}} \\
&\quad \lesssim T^\nu \|u\|^{k+1}_{X_T^s}.
\end{aligned} \tag{3.34}$$

The other terms in (3.33) are teated in the same way via Lemma 3.8.

Contribution of II_3
In order to share the derivative on $G(u,u)$ in II_3 with Lemma 3.7, we first integrate by parts

$$II_3 = \tilde{P}_+[P_-u^{k-2}P_+G(u,u)] - \tilde{P}_+\Big[\int_{-\infty}^x P_-\partial_x u^{k-2}P_+G(u,u)\Big].$$

Then we see that the first term can be estimated exactly as (3.34). Finally for the last term in the previous equality we repeat the proof for the contribution of II_1. $\square$

4 Proof of Theorem 3.1

In this section we briefly recall the standard arguments which yield well-posedness for (gBO) ; we refer the reader to [MR04a] for details. We choose $k \ge 12$ and $s_k < s < 1/2$.

We start by taking a sequence $(u_0^n)_n$ in $H^\infty(\mathbb{R})$ such that $u_0^n \to u_0$ in $H^s(\mathbb{R})$ and $\|u_0^n\|_{H^s} \le \|u_0\|_{H^s}$. Now let $u_n \in H^\infty(\mathbb{R})$ be the solutions of (gBO) with initial data u_0^n. Then bounds (3.26) and (3.30) imply the *a priori* estimate

$$\|u_n\|_{X_T^s} \lesssim p_k(\|u_0^n\|_{H^s})\|u_0^n\|_{H^s} + T^\nu p_k(\|u_n\|_{X_T^s})\|u_n\|_{X_T^s}.$$

This allows us to obtain the existence of a $T > 0$ small enough and a solution $u \in X_T^s$ of (gBO).

Using the integral equation (3.7) and (3.26)-(3.30) it follows that for all $0 < t_1 < t_2 < T$,

$$\begin{aligned}\|u(t_1) - u(t_2)\|_{H^s} &\lesssim \sup_{t\in[t_1,t_2]} \|u(t) - u(t_1)\| \\ &\lesssim \|u(t) - u(t_1)\|_{L^\infty([t_1,t_2];H^s)} \\ &\quad + \Big\| \int_{t_1}^t V(t-\tau)\partial_x(u^{k+1})(\tau)d\tau \Big\|_{L^\infty([t_1,t_2];H^s)} \\ &\lesssim o(1).\end{aligned}$$

This shows that $u \in \mathcal{C}([0,T]; H^s(\mathbb{R}))$.

We now turn to the proof of the uniqueness and the dependance of the solution upon the data. In this purpose we must establish the estimate

$$\begin{aligned}\|u_1 - u_2\|_{X_T^s} \lesssim p_k(\|u_{0,1}\|_{H^s} + \|u_{0,2}\|_{H^s})\|u_{0,1} - u_{0,2}\|_{H^s} \\ + T^\nu p_k(\|u_1\|_{X_T^s} + \|u_2\|_{X_T^s})\|u_1 - u_2\|_{X_T^s}\end{aligned}$$

for u_1, u_2 two solutions of (gBO) associated to initial data $u_{0,1}$ and $u_{0,2}$ respectively. We process exactly as in Section 3 with the gauge transformation

$$w = w_1 - w_2, \quad w_j = P_+(e^{-iF_j}u_j), \quad F_j = \int_{-\infty}^x u_j^k(y,t)dy.$$

The main new ingredient to use is the estimate

$$|e^{i\int_{-\infty}^x f_1} - e^{i\int_{-\infty}^x f_2}| \lesssim \|f_1 - f_2\|_{L^1}$$

for any real functions f_1, f_2 as explained in [MR04a].

5 Appendix

This subsection is devoted to the proof of Theorem 3.2. As in [MR04b, MRY02, MST01], it is a consequence of the following result.

Lemma 3.10. *Let $s < 1/3$. Then there exists a sequence of functions $\{h_N\} \subset H^s(\mathbb{R})$ such that for all $T > 0$,*

$$\|h_N\|_{H^s} \lesssim 1$$

$$\lim_{N\to+\infty} \sup_{[0,T]} \Big\| \int_0^t V(t-s)\partial_x((V(s)h_N)^4)ds \Big\|_{H^s} = +\infty \tag{3.35}$$

We show first that Lemma 3.10 implies the result.
Suppose that Theorem 3.2 fails. Since the flow-map $\varphi \mapsto u(\varphi)$ is of class $\mathcal{C}^4$ at the origin, we have the relation

$$F(u,\varphi) := u(\varphi) - V(t)\varphi + \int_0^t V(t-s)u^3(s)\partial_x u(s)ds = 0$$

which together with the implicit function theorem yields

$$v(t,x) := \frac{\partial^3 u}{\partial \varphi^3}(t,x,0)[h_N, ..., h_N] = 3! \int_0^t V(t-s)\partial_x((V(s)h_N)^4)ds.$$

Hence

$$\sup_{[0,T]} \|v(t)\|_{H^s} \lesssim \|h_N\|_{H^s} \lesssim 1,$$

witch contradicts (3.35).

Proof of Lemma 3.10. For each integer N, we define the function h_N through its Fourier transform by

$$\widehat{h_N}(\xi) = \alpha^{-1/2} N^{-s}\big(\chi_1(\xi) + \chi_2(\xi)\big)$$

where $\chi_1 = \chi_{[N,N+\alpha]}$, $\chi_2(\xi) = \chi_1(-\xi)$ and $\alpha = N^{-\theta}$, $\theta > 0$ to be chosen later. Observe that h_N is a real valued function since $\widehat{h_N}$ is even. Moreover, an obvious calculation yields $\|h_N\|_{H^s} \simeq 1$.
We now want to estimate $|\hat{v}|$:

$$\begin{aligned}
\hat{v}(\xi_0,t) &\simeq \xi_0 e^{ip(\xi_0)t} \int_0^t e^{-ip(\xi_0)s} \mathcal{F}_x((V(s)h_N)^4)ds \\
&\simeq \alpha^{-2} N^{-4s} \xi_0 e^{ip(\xi_0)t} \sum_{n=0}^{4} \int_0^t e^{-ip(\xi_0)s} \big(e^{ip(\xi_0)s}\chi_1\big)^{*n} * \big(e^{ip(\xi_0)s}\chi_2\big)^{*(4-n)} ds \\
&:= \sum_{n=0}^{4} v_n
\end{aligned}$$

where we defined $p(\xi) = \xi|\xi|$ and $f^{*n} = f * ... * f$. The function v_4 is supported in $[4N, 4N+4\alpha]$ which is disjoined with the supports of v_n, $n = 0,1,2,3$. Consequently,

$$\begin{aligned}
&\hat{v}(\xi_0,t)\chi_{[4N,4N+4\alpha]}(\xi_0) \\
&\simeq \alpha^{-2} N^{-4s} \xi_0 e^{ip(\xi_0)t} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} e^{-ip(\xi_0)s} e^{ip(\xi_0-\xi_1)s} e^{ip(\xi_1-\xi_2)s} e^{ip(\xi_2-\xi_3)s} e^{ip(\xi_3)s} \\
&\quad \times \chi_1(\xi_0-\xi_1)\chi_1(\xi_1-\xi_2)\chi_1(\xi_2-\xi_3)\chi_1(\xi_3) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 ds \\
&\simeq \alpha^{-2} N^{-4s} \xi_0 e^{ip(\xi_0)t} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{itP(\xi_0,\xi_1,\xi_2,\xi_3)} - 1}{P(\xi_0,\xi_1,\xi_2,\xi_3)} \\
&\quad \times \chi_1(\xi_0-\xi_1)\chi_1(\xi_1-\xi_2)\chi_1(\xi_2-\xi_3)\chi_1(\xi_3) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3
\end{aligned}$$

with $P(\xi_0,\xi_1,\xi_2,\xi_3) = -2\sum_{j=1}^{3} \xi_j(\xi_{j-1}-\xi_j)$. For $(\xi_{j-1}-\xi_j)$ and ξ_3 in $[4N, 4N+4\alpha]$, we have

$$P(\xi_0,\xi_1,\xi_2,\xi_3) \simeq N^2 \quad \text{and} \quad \Big|\frac{e^{itP(\xi_0,\xi_1,\xi_2,\xi_3)} - 1}{P(\xi_0,\xi_1,\xi_2,\xi_3)}\Big| = |t| + O(N^2) \gtrsim 1,$$

which yields

$$|\hat{v}(\xi_0,t)|\chi_{[4N,4N+4\alpha]}(\xi_0) \gtrsim \alpha^{-2}N^{-4s}|\xi_0|\chi_1^{*4}(\xi_0).$$

By straightforward calculations,

$$\chi_1^{*4}(\xi) \simeq \int_{\mathbb{R}} \exp\big(-i\xi_1(4N+2\alpha-\xi)\big)\Big(\frac{\sin i\alpha\xi_1/2}{\xi_1}\Big)^4 d\xi_1$$

and hence $\chi_1^{*4}(4N+2\alpha) \simeq \alpha^3$. By a continuity argument, $\chi_1^{*4}(\xi) \simeq \alpha^3$ for all $\xi \in [4N, 4N+4\alpha]$. This proves that

$$|\hat{v}(\xi_0,t)|\chi_{[4N,4N+4\alpha]}(\xi_0) \gtrsim \alpha N^{-4s+1}\chi_{[4N,4N+4\alpha]}(\xi_0)$$

and finally

$$\|v\|_{H^s} \gtrsim \alpha N^{-4s+1}\Big(\int_{4N}^{4N+4\alpha}(1+|\xi|^2)^s d\xi\Big)^{1/2} \gtrsim \alpha N^{-4s+1}N^s\alpha^{1/2} \gtrsim N^{-3s+1-3\theta/2}.$$

Since $s < 1/3$, we can choose $\theta > 0$ such that $-3s+1-3\theta/2 > 0$ and it follows that $\|v\|_{H^s} \to +\infty$. □

Chapitre 4

Sur les équations de Benjamin-Ono généralisées dans l'espace critique

Nous montrons que les équations de Benjamin-Ono généralisées $\partial_t u + \mathcal{H}\partial_x^2 u + u^k \partial_x u = 0$, $k \geq 4$ sont localement bien posées dans l'espace invariant par changement d'échelle $\dot{H}^{s_k}(\mathbb{R})$ avec $s_k = 1/2 - 1/k$. Nos résultats s'étendent aussi aux espaces non-homogènes $H^{s_k}(\mathbb{R})$. Dans le cas $k = 3$, le caractère bien posé est obtenu dans $H^s(\mathbb{R})$, $s > 1/3$.

Well-posedness for the generalized Benjamin-Ono equations with arbitrary large initial data in the critical space

Stéphane Vento,
Université Paris-Est,
Laboratoire d'Analyse et de Mathématiques Appliquées,
5 bd. Descartes, Cité Descartes, Champs-Sur-Marne,
77454 Marne-La-Vallée Cedex 2, France

E-mail: stephane.vento@univ-paris-est.fr

Abstract. We prove the local well-posedness of the generalized Benjamin-Ono equations $\partial_t u + \mathcal{H}\partial_x^2 u \pm u^k \partial_x u = 0$, $k \geq 4$, in the scaling invariant spaces $\dot{H}^{s_k}(\mathbb{R})$ where $s_k = 1/2 - 1/k$. Our results also hold in the non-homogeneous spaces $H^{s_k}(\mathbb{R})$. In the case $k = 3$, local well-posedness is obtained in $H^s(\mathbb{R})$, $s > 1/3$.

Keywords : NLS-like equations, Cauchy problem
AMS Classification : 35Q55, 35B30, 76B03, 76B55

1 Introduction

In this paper we pursue our study of the Cauchy problem for the generalized Benjamin-Ono equations

$$\begin{cases} \partial_t u + \mathcal{H}\partial_x^2 u \pm u^k \partial_x u = 0, & x, t \in \mathbb{R}, \\ u(t=0, x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{gBO}$$

with k an integer ≥ 3 and with $\mathcal{H}$ the Hilbert transform defined *via* the Fourier transform by

$$\mathcal{H}f = \mathcal{F}^{-1}(-i\,\mathrm{sgn}(\xi)\hat{f}(\xi)), \quad f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}). \tag{4.1}$$

The Hilbert transform is a real operator, and consequently we look for real-valued solutions. In view of (4.1), we see that $\mathcal{H}$ is nothing but $-i$ on positive frequencies and $+i$ on negative ones. A very close equation to (gBO) is then the derivative nonlinear Schrödinger equation

$$\partial_t u - i\partial_x^2 u \pm u^k \partial_x u = 0. \tag{4.2}$$

for which all our results remain true.

A remarkable feature of (gBO) is the following scaling invariance: if $u(t,x)$ is a solution of the equation on $[-T,+T]$, then for any $\lambda > 0$, $u_\lambda(t,x) = \lambda^{1/k} u(\lambda^2 t, \lambda x)$ also solves (gBO) on $[-\lambda^{-2}T, +\lambda^{-2}T]$ with initial data $u_\lambda(0,x)$ and moreover

$$\|u_\lambda(\cdot,0)\|_{\dot{H}^s} = \lambda^{s+\frac{1}{k}-\frac{1}{2}} \|u(\cdot,0)\|_{\dot{H}^s}.$$

Hence the $\dot{H}^s(\mathbb{R})$ norm is invariant under the flow $u \mapsto u_\lambda$ if and only if $s = s_k = 1/2 - 1/k$ and thus we may expect well-posedness in $\dot{H}^{s_k}(\mathbb{R})$.

When $k=1$, (gBO) is the ordinary Benjamin-Ono equation derived by Benjamin [Ben67] and later by Ono [Ono75] as a model for one-dimensional waves in deep water. The Cauchy problem for the Benjamin-Ono equation has been extensively studied these last years, see [Sau79, Pon91, Iór86]. In [Tao04], Tao introduced a gauge transformation (a kind of Cole-Hopf transformation) which ameliorate the derivative nonlinearity, and get the well-posedness of this equation in $H^s(\mathbb{R})$, $s \geq 1$. Recently, combining a gauge transformation together with a Bourgain's method, Ionescu and Kenig [IK07] shown that one could go down to $L^2(\mathbb{R})$, which seems to be the critical space for the Benjamin-Ono equation. Note also that Burq and Planchon [BP08] have obtained well-posedness in $H^s(\mathbb{R})$, $s > 1/4$ by similar methods. It is worth noticing that all these results have been obtained by compactness methods. On the other hand, Molinet, Saut and Tzvetkov [MST01] proved that, for all $s \in \mathbb{R}$, the flow map $u_0 \mapsto u$ is not of class $\mathcal{C}^2$ from $H^s(\mathbb{R})$ to $H^s(\mathbb{R})$. Furthermore, building suitable families of approximate solutions, Koch and Tzvetkov proved in [KT05] that the flow map is actually not even uniformly continuous on bounded sets of $H^s(\mathbb{R})$, $s > 0$. This explains why a Picard iteration scheme fails to solve the Benjamin-Ono equation in Sobolev spaces.

In the case $k=2$ (modified Benjamin-Ono equation), Molinet and Ribaud obtained in [MR04a] the well-posedness in $H^s(\mathbb{R})$, $s > 1/2$. Recently, Kenig and Takaoka [KT06] reached the energy space $H^{1/2}(\mathbb{R})$. This has been proved thanks to a localized gauge transformation combined with a space-time L^2 estimate of the solution. It is important to note that this result is far from that given by the scaling index $s_2 = 0$. However, it is known to be sharp since the solution map $u_0 \mapsto u$ is not $\mathcal{C}^3$ in $H^s(\mathbb{R})$ as soon as $s < 1/2$ (see [MR04b]).

In the case $k=3$, the local well-posedness is known in $H^s(\mathbb{R})$, $s > 1/3$ for small initial data [MR04b] but only in $H^s(\mathbb{R})$, $s > 3/4$ for large initial data. In [Ven07b], we showed that (gBO) is $\mathcal{C}^4$-ill-posed in $H^s(\mathbb{R})$, $s < 1/3$, in the sense that the flow-map $u_0 \mapsto u$ fails to be $\mathcal{C}^4$. We prove here that well-posedness occurs in $H^s(\mathbb{R})$, $s > 1/3$, and without smallness assumption on the initial data.

Concerning the case $k \geq 4$, global well-posedness in $H^s(\mathbb{R})$, $s > s_k$ was derived for small initial data by Molinet and Ribaud in [MR04b]. Later, by means of a gauge transformation, the same authors [MR04a] removed the size restriction on the data and showed well-posedness in $H^{1/2}(\mathbb{R})$, whatever the value of k. By a refinement of their method, we reached in [Ven07b] the well-posedness in $H^s(\mathbb{R})$, $s > s_k$, but for high nonlinearities only ($k \geq 12$ in fact). On the other hand, in the particular case $k = 4$, Burq and Planchon [BP06] proved the local well-posedness in the critical space $\dot{H}^{1/4}(\mathbb{R})$. Inspired by their works, we extend in this paper the well-posedness to $\dot{H}^{s_k}(\mathbb{R})$ for any $k \geq 4$, and our method is flexible enough to get the result in the non-homogeneous space $H^{s_k}(\mathbb{R})$. Also, a standard fixed point argument allows us to construct a unique solution in a subspace of $\dot{H}^{s_k}(\mathbb{R})$ with a continuous flow-map $u_0 \mapsto u$. Recall that Biagioni and Linares [BL01] proved using solitary waves, that this map cannot be uniformly continuous in $\dot{H}^{s_k}(\mathbb{R})$. In the surcritical case $s < s_k$, we also know that the solution-map (if it exists) fails to be $\mathcal{C}^{k+1}$ in $H^s(\mathbb{R})$, see [MR04b].

2 Notations and main results

2.1 Notations

For A and B two positive numbers, we write $A \lesssim B$ if there exists $c > 0$ such that $A \leq cB$. Similarly define $A \gtrsim B$, $A \sim B$ if $A \geq cB$ and $A \lesssim B \lesssim A$ respectively. When the constant c is large enough, we write $A \ll B$. For any $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, we use $\mathcal{F}f$ or $\hat{f}$ to denote its Fourier transform. For $1 \leq p \leq \infty$, L^p is the standard Lebesgue space and its space-time versions $L^p_x L^q_T$ and $L^q_T L^p_x$ ($T > 0$) are endowed with the norms

$$\|f\|_{L^p_x L^q_T} = \big\|\|f\|_{L^q_t([-T;T])}\big\|_{L^p_x(\mathbb{R})} \quad \text{and} \quad \|f\|_{L^q_T L^p_x} = \big\|\|f\|_{L^p_x(\mathbb{R})}\big\|_{L^q_t([-T;T])}.$$

The pseudo-differential operator D^α_x is defined by its Fourier symbol $|\xi|^\alpha$. We will denote by P_+ and P_- the projection on respectively the positive and the negative spatial Fourier modes. Thus one has

$$i\mathcal{H} = P_+ - P_-.$$

Let $\eta \in \mathcal{C}^\infty_0(\mathbb{R})$, $\eta \geq 0$, supp $\eta \subset \{1/2 \leq |\xi| \leq 2\}$ with $\sum_{-\infty}^{\infty} \eta(2^{-j}\xi) = 1$ for $\xi \neq 0$. We set $p(\xi) = \sum_{j \leq -3} \eta(2^{-j}\xi)$ and consider, for all $j \in \mathbb{Z}$, the operator Q_j defined by

$$Q_j(f) = \mathcal{F}^{-1}(\eta(2^{-j}\xi)\hat{f}(\xi)).$$

We adopt the following summation convention. Any summation of the form $r \lesssim j$, $r \gg j$,... is a sum over the $r \in \mathbb{Z}$ such that $2^r \lesssim 2^j$..., thus for instance $\sum_{r \lesssim j} = \sum_{r:2^r \lesssim 2^j}$. We define then the operators $Q_{\lesssim j} = \sum_{r \lesssim j} Q_r$, $Q_{\ll j} = \sum_{r \ll j} Q_r$, etc. For $1 \le p, q, r \le \infty$ and $s \in \mathbb{R}$, let $\dot{\mathcal{B}}^{s,r}_p(L^q_T)$ be the homogeneous Besov space equipped with the norm

$$\|f\|_{\dot{\mathcal{B}}^{s,r}_p(L^q_T)} = \Big(\sum_{j \in \mathbb{Z}} [2^{js} \|Q_j f\|_{L^p_x L^q_T}]^r \Big)^{1/r}.$$

Finally for $s \in \mathbb{R}$ and $\theta \in [0,1]$, we define the solution space $\dot{\mathcal{S}}^{s,\theta}$ (where lives our solution u) and the nonlinear space $\dot{\mathcal{N}}^{s,\theta}$ (where lives the nonlinear term $u^k \partial_x u$) by

$$\dot{\mathcal{S}}^{s,\theta} = \dot{\mathcal{B}}^{s+\frac{3\theta-1}{4},2}_{\frac{4}{1-\theta}}(L^{\frac{2}{\theta}}_T), \quad \dot{\mathcal{N}}^{s,\theta} = \dot{\mathcal{B}}^{s+\frac{1-3\theta}{4},2}_{\frac{4}{3+\theta}}(L^{\frac{2}{2-\theta}}_T).$$

2.2 Main results

We first state our well-posedness results in the case $k \ge 4$.

Theorem 4.1. *Let $k \ge 4$ and $u_0 \in \dot{H}^{s_k}(\mathbb{R})$. There exist $T = T(u_0) > 0$ and a unique solution u of (gBO) such that $u \in \dot{Z}_T$ with*

$$\dot{Z}_T = \mathcal{C}([-T,+T], \dot{H}^{s_k}(\mathbb{R})) \cap \dot{X}^{s_k} \cap L^k_x L^\infty_T.$$

Moreover, the flow map $u_0 \mapsto u$ is locally Lipschitz from $\dot{H}^{s_k}(\mathbb{R})$ to $\dot{Z}_T$.

In the non-homogeneous case, one has the following result.

Theorem 4.2. *Let $k \ge 4$ and $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$, $s \ge s_k$. There exist $T = T(u_0) > 0$ and a unique solution u of (gBO) such that $u \in Z_T$ with*

$$Z_T = \mathcal{C}([-T,+T], H^s(\mathbb{R})) \cap X^s \cap L^k_x L^\infty_T.$$

Moreover, the flow map $u_0 \mapsto u$ is locally Lipschitz from $H^s(\mathbb{R})$ to Z_T.

Remark 4.1. *We only obtain the Lipschitz continuity of the map $u_0 \mapsto u$ in Theorems 4.1 and 4.2 in $\dot{H}^{s_k}(\mathbb{R})$ (resp. $H^s(\mathbb{R})$). As noticed in the introduction, the solution map given by Theorem 4.1 is not uniformly continuous from $\dot{H}^{s_k}(\mathbb{R})$ to $\mathcal{C}([-T,T], \dot{H}^{s_k}(\mathbb{R}))$. Moreover, when $s < s_k$, the flow map in Theorem 4.2 is no longer of class $\mathcal{C}^{k+1}$ in $H^s(\mathbb{R})$. It is not clear wether the map given by Theorems 4.1 and 4.2 is $\mathcal{C}^{k+1}$ or not.*

Remark 4.2. *The spaces $\dot{X}^{s_k}$ and X^s will be defined in Section 3 and are directly related with the linear estimates for the linear Benjamin-Ono equation.*

The main tools to prove Theorems 4.1 and 4.2 are the sharp Kato smoothing effect and the maximal in time inequality for the free solution $V(t)u_0$ where $V(t) = e^{it\mathcal{H}\partial_x^2}$. Recall that for regular solutions, (gBO) is equivalent to its integral formulation

$$u(t) = V(t)u_0 \mp \int_0^t V(t-t')(u^k(t')\partial_x u(t'))dt'. \tag{4.3}$$

It is worth noticing that (gBO) provides a perfect balance between the derivative nonlinear term on one hand, and the available linear estimates on the other hand. Heuristically, one may use (4.3) to write

$$\begin{aligned}\|D_x^{s_k+1/2}u\|_{L_x^\infty L_T^2} + \|u\|_{L_x^k L_T^\infty} &\lesssim \|u_0\|_{\dot{H}^{s_k}} + \|D_x^{s_k-1/2}\partial_x(u^{k+1})\|_{L_x^1 L_T^2}\\ &\lesssim \|u_0\|_{\dot{H}^{s_k}} + \|D_x^{s_k+1/2}u\|_{L_x^\infty L_T^2}\|u\|_{L_x^k L_T^\infty}^k\end{aligned}$$

and perform a fixed point procedure. Unfortunately, such an argument fails for several reasons:

- First, it is not clear wether the second inequality holds true or not. Indeed, we used the fractional Leibniz rule (see the Appendix in [KPV93b], [MR04a]) at the end points L^p, $p = 1, \infty$. However, this inequality becomes true if one works in the associated Besov spaces $\dot{\mathcal{B}}_\infty^{s_k+1/2,2}(L_T^2) \cap \dot{\mathcal{B}}_k^{0,2}(L_T^\infty)$ and provides sharp well-posedness for small initial data, see [MR04b].

- The term $\|V(t)u_0\|_{L_x^k L_T^\infty}$ will be small only if $\|u_0\|_{\dot{H}^{s_k}}$ is small as well, even for small T. Nevertheless, as noticed in [BP06], if we consider instead the difference $V(t)u_0 - u_0$, then its $L_x^k L_T^\infty$-norm is small provided we restrict ourselves to a small interval $[-T, T]$ (see Lemma 4.5).

- We also need to get a better share of the derivative in the nonlinear term. By a standard paraproduct decomposition, we see that the worst contribution in $\partial_x u^{k+1}$ is given by $\pi(u, u)$ where

  $$\pi(f, g) = \sum_j \partial_x Q_j((Q_{\ll j} f)^k Q_{\sim j} g).$$

  The main idea is then to inject this term (or more precisely $\pi(u_0, u)$) in the linear part of the equation to get the variable-coefficient Schrödinger equation

  $$\partial_t u + \mathcal{H}\partial_x^2 u + \pi(u_0, u) = f \tag{4.4}$$

  where f will be a well-behaved term. Linear estimates for equation (4.4) are obtained by the localized gauge transform

  $$w_j = e^{\frac{i}{2}\int_{-\infty}^x (Q_{\ll j}u_0)^k} P_+ Q_j u, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Now we turn to the case $k = 3$. By similar considerations, we obtain the following result.

Theorem 4.3. *Let $k = 3$ and $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$, $s > 1/3$. There exist $T = T(u_0) > 0$ and a unique solution u of (gBO) such that $u \in Z_T$ with*

$$Z_T = \mathcal{C}([-T, +T], H^s(\mathbb{R})) \cap X^s \cap L^3_x L^\infty_T.$$

Moreover, the flow map $u_0 \mapsto u$ is locally Lipschitz from $H^s(\mathbb{R})$ to Z_T.

This paper is organized as follows. In Section 3, we recall some sharp estimates related with the linear operator $V(t)$, and we derive linear estimates for equation (4.4). Section 4 is devoted to the case $k \geq 4$. Finally, we prove Theorem 4.3 in Section 5.

3 Linear estimates

3.1 Estimates for the linear BO equation

This section deals with the well-known linear estimates for the Benjamin-Ono equation. Note that all results stated here hold as well for the Schrödinger operator $S(t) = e^{it\partial_x^2}$.

The following lemma summarizes the main estimates related to the group $V(t)$. See for instance [KPV91a, KPV91b] for their proof.

Lemma 4.1. *Let $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, then*

$$\|V(t)\varphi\|_{L^\infty_T L^2_x} \lesssim \|\varphi\|_{L^2}, \tag{4.5}$$

$$\|D_x^{1/2} V(t)\varphi\|_{L^\infty_x L^2_T} \lesssim \|\varphi\|_{L^2}, \tag{4.6}$$

$$\|D_x^{-1/4} V(t)\varphi\|_{L^4_x L^\infty_T} \lesssim \|\varphi\|_{L^2}. \tag{4.7}$$

Moreover, if $T \leq 1$ and $j \geq 0$,

$$\|Q_{\leq 0} V(t)\varphi\|_{L^2_x L^\infty_T} \lesssim \|Q_{\leq 0}\varphi\|_{L^2} \tag{4.8}$$

$$2^{-j/2}\|Q_j V(t)\varphi\|_{L^2_x L^\infty_T} \lesssim \|Q_j\varphi\|_{L^2} \tag{4.9}$$

Definition 4.1. *A triplet $(\alpha, p, q) \in \mathbb{R}\times[2, \infty]^2$ is said to be 1-admissible if $(\alpha, p, q) = (1/2, \infty, 2)$ or*

$$4 \leq p < \infty, \quad 2 < q \leq \infty, \quad \frac{2}{p} + \frac{1}{q} \leq \frac{1}{2}, \quad \alpha = \frac{1}{p} + \frac{2}{q} - \frac{1}{2}. \tag{4.10}$$

By Sobolev embedding and interpolation between estimates (4.6) and (4.7) we obtain the following result.

Proposition 4.1 ([MR04a]). *If (α, p, q) is 1-admissible, then for all φ in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$,*

$$\|D_x^\alpha V(t)\varphi\|_{L_x^p L_T^q} \lesssim \|\varphi\|_{L^2}. \tag{4.11}$$

Now we define our resolution spaces.

Definition 4.2. *Let $k \geq 4$ and $s \in \mathbb{R}$ be fixed. For $0 < \varepsilon \ll 1$, we define the spaces $\dot{X}^s = \dot{\mathcal{S}}^{s,\varepsilon} \cap \dot{\mathcal{S}}^{s,1}$ endowed with the norm*

$$\|u\|_{\dot{X}^s} = \|u\|_{\dot{\mathcal{S}}^{s,\varepsilon}} + \|u\|_{\dot{\mathcal{S}}^{s,1}}.$$

At this stage it is important to remark that $\dot{X}^s$ does not contain any L_T^∞ component. As a consequence, for each $u \in \dot{X}^s$ and $\eta > 0$ fixed, we can choose $T = T(u)$ such that $\|u\|_{\dot{X}^s} < \eta$.

In the case $k = 3$, we shall require the following result which is not covered by Proposition 4.1.

Lemma 4.2 ([MR04a]). *Let $0 < T \leq 1$ and $s > 1/3$. Then it holds that*

$$\|V(t)\varphi\|_{L_x^3 L_T^\infty} \lesssim \|\varphi\|_{H^s}, \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}). \tag{4.12}$$

We next state the $L_x^p L_T^q$ and $L_T^q L_x^p$ estimates for the linear operator $f \mapsto \int_0^t V(t-t')f(t')dt'$.

Lemma 4.3 ([MR04a]). *Let $\alpha \in \mathbb{R}$, and $2 < p, q \leq \infty$ such that for all $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,*

$$\|D_x^\alpha V(t)\varphi\|_{L_x^p L_T^q} \lesssim \|\varphi\|_{L^2}.$$

Then for all $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$,

$$\left\|D_x^{1/2} \int_0^t V(t-t')f(t')dt'\right\|_{L_T^\infty L_x^2} \lesssim \|f\|_{L_x^1 L_T^2}, \tag{4.13}$$

$$\left\|D_x^{\alpha+1/2} \int_0^t V(t-t')f(t')dt'\right\|_{L_x^p L_T^q} \lesssim \|f\|_{L_x^1 L_T^2}. \tag{4.14}$$

Similarly, if

$$\|D_x^\alpha V(t)\varphi\|_{L_x^p L_T^q} \lesssim \|\varphi\|_{H^s}$$

for any $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, then

$$\left\|D_x^{\alpha+1/2} \int_0^t V(t-t')f(t')dt'\right\|_{L_x^p L_T^q} \lesssim \|\langle D_x\rangle^s f\|_{L_x^1 L_T^2}. \tag{4.15}$$

We shall also need the following Besov version of Lemma 4.3.

Lemma 4.4. *Let $k \geq 4$. For all $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})^2$,*

$$\Big\| \int_0^t V(t-t')f(t')dt' \Big\|_{L_x^k L_T^\infty} \lesssim \|f\|_{\dot{\mathcal{N}}^{s_k,1}}.$$

Proof. Note that the triplets $(1/2, \infty, 2)$ and $(-s_k, k, \infty)$ are both 1-admissible. In particular we deduce

$$\Big\| \int_{-T}^T D_x^{1/2} V(-t')h(t')dt' \Big\|_{L^2} \lesssim \|h\|_{L_x^1 L_T^2}, \quad \forall h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2),$$

which is the dual estimate of (4.11) for $(\alpha, p, q) = (1/2, \infty, 2)$. Since $L^2 = \dot{\mathcal{B}}_2^{0,2}$, we infer

$$\Big\| \int_{-T}^T D_x^{1/2} V(-t')h(t')dt' \Big\|_{L^2} \lesssim \|h\|_{\dot{\mathcal{B}}_1^{0,2}(L_T^2)}, \quad \forall h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2).$$

The usual TT^* argument provides

$$\Big\| \int_{-T}^T V(t-t')f(t')dt' \Big\|_{L_x^k L_T^\infty} \lesssim \|f\|_{\dot{\mathcal{B}}_1^{-1/k,2}(L_T^2)}.$$

We can conclude with the Christ-Kiselev lemma for reversed norms (Theorem B in [BP06]). □

3.2 Linear estimates for equation (4.4)

Here and hereafter we only consider the case $k \geq 4$. The special case $k = 3$ will be discussed in Section 5.

Next lemma will be crucial in the proof of our main results.

Lemma 4.5. *Let $k \geq 4$ and $u_0 \in \dot{H}^{s_k}$. For any $\eta > 0$, there exists $T = T(u_0)$ such that*

$$\|V(t)u_0 - u_0\|_{L_x^k L_T^\infty} < \eta.$$

Proof. Let $N > 0$ to be chosen later. By Sobolev embedding theorem together with (4.11), we get

$$\|V(t)u_0 - u_0\|_{L_x^k L_T^\infty} \lesssim \sum_{|j|<N} \|Q_j(V(t)u_0 - u_0)\|_{L_x^k L_T^\infty} + \Bigg(\sum_{|j|>N} \|Q_j u_0\|_{\dot{H}^{s_k}}^2 \Bigg)^{1/2}.$$

Note that $v = V(t)u_0 - u_0$ solves the equation

$$\partial_t v + \mathcal{H}\partial_x^2 v = -\mathcal{H}\partial_x^2 u_0$$

with zero initial data. Thus $V(t)u_0 - u_0 = \int_0^t V(t-t')\mathcal{H}\partial_x^2 u_0 dt'$ and

$$\begin{aligned}\sum_{|j|<N} \|Q_j(V(t)u_0 - u_0)\|_{L^k_x L^\infty_T} &\lesssim \sum_{|j|<N} 2^{2j} \Big\| \int_0^t V(t')Q_j u_0 dt' \Big\|_{L^k_x L^\infty_T} \\ &\lesssim T \sum_{|j|<N} 2^{2j} \|V(t)Q_j u_0\|_{L^k_x L^\infty_T} \\ &\lesssim T 2^{2N} \|u_0\|_{\dot H^{s_k}}.\end{aligned}$$

It suffices now to choose sufficiently large N and then T small enough. $\square$

Let us now turn back to the nonlinear (gBO) equation. We note that the sign of the nonlinearity is irrelevant in the study of the local problem, and we choose for convenience the plus sign. Using standard paraproduct rearrangements, we can rewrite the nonlinear term in (gBO) as follows:

$$\begin{aligned}\partial_x Q_j(u^{k+1}) &= \partial_x Q_j(\lim_{r\to\infty}(Q_{<r}u)^{k+1}) \\ &= \partial_x Q_j\Big(\sum_{-\infty}^{\infty}(Q_{<r+1}u)^{k+1} - (Q_{<r}u)^{k+1}\Big) \\ &= \partial_x Q_j\Big(\sum_{-\infty}^{\infty} Q_r u (Q_{\lesssim r}u)^k\Big) \\ &= \partial_x Q_j\Big(\sum_{r\sim j} Q_r u (Q_{\ll r}u)^k\Big) + \partial_x Q_j\Big(\sum_{r\gtrsim j} (Q_{\sim r}u)^2 (Q_{\lesssim r}u)^{k-1}\Big) \\ &= \partial_x Q_j((Q_{\ll j}u)^k Q_{\sim j}u) - g_j.\end{aligned}$$

We set

$$\pi(f,g) = \sum_j \partial_x Q_j((Q_{\ll j}f)^k Q_{\sim j}g),$$

so that (gBO) reads

$$\partial_t u + \mathcal{H}\partial_x^2 u + \pi(u,u) = g(t,x),$$

with

$$g = \sum_j g_j.$$

Setting now

$$f = \pi(u_0,u) - \pi(u,u) + g,$$

we see that (gBO) is equivalent to

$$\begin{cases} \partial_t u + \mathcal{H}\partial_x^2 u + \pi(u_0,u) = f(t,x), \\ u(0,x) = u_0(x). \end{cases} \tag{4.16}$$

We intend to solve (gBO) by a fixed point procedure on the Duhamel formulation of (4.16):

$$u(t) = U(t)u_0 - \int_0^t U(t-t')f(t')dt',$$

where $U(t)\varphi$ is solution to

$$\partial_t u + \mathcal{H}\partial_x^2 u + \pi(u_0, u) = 0, \quad u(0) = \varphi.$$

It is worth noticing that $U(t)$ depends on the data u_0.

Setting $u_j = Q_j u$ and $f_j = Q_j f$, we get from (4.16) that

$$\begin{aligned}\partial_t u_j + \mathcal{H}\partial_x^2 u_j + \partial_x((u_{0,\ll j})^k u_j) \\ = \partial_x[Q_j, (u_{L,\ll j})^k - (u_{0,\ll j})^k]u_{\sim j} - \partial_x[Q_j, (u_{L,\ll j})^k]u_{\sim j} + f_j \quad (4.17)\end{aligned}$$

where $u_L = V(t)u_0$ is the solution of the free (BO) equation. We will denote by R_j the right-hand side of (4.17). Now take the positive frequencies and set $v_j = P_+ u_j$, this leads to

$$i\partial_t v_j + \partial_x^2 v_j + i\partial_x((u_{0,\ll j})^k v_j) = iP_+ R_j.$$

With $b_{\ll j} = \frac{1}{2}(u_{0,\ll j})^k$, we obtain

$$i\partial_t v_j + (\partial_x + ib_{\ll j})^2 v_j = g_j \quad (4.18)$$

with

$$g_j = -i\partial_x b_{\ll j}.v_j - b_{\ll j}^2 v_j + iP_+ R_j. \quad (4.19)$$

Lemma 4.6. *Let v_j be a solution to (4.18) with initial data $v_{0,j} \in \dot{H}^{s_k} \cap \dot{H}^s$. Then there exists $C = C(u_0)$ such that*

$$\|v_j\|_{\dot{X}^s} \le C\|v_{0,j}\|_{\dot{H}^s} + C\|g_j\|_{\dot{N}^{s,1}}.$$

Proof. We define w_j by

$$w_j = e^{i\int^x b_{\ll j}} v_j.$$

Then we easily check that w_j solves

$$i\partial_t w_j + \partial_x^2 w_j = e^{i\int^x b_{\ll j}} g_j.$$

From the well-known linear estimates on the Schrödinger equation (Lemmas 4.1-4.3) we infer

$$\|\partial_x w_j\|_{L_x^\infty L_T^2} \lesssim \|e^{i\int^x b_{\ll j}} v_{0,j}\|_{\dot{H}^{1/2}} + \|g_j\|_{L_x^1 L_T^2}.$$

Since $\partial_x w_j = e^{i\int^x b_{\ll j}}(\partial_x v_j + b_{\ll j} v_j)$, we have

$$\begin{aligned}\|\partial_x v_j\|_{L_x^\infty L_T^2} &\lesssim \|\partial_x w_j\|_{L_x^\infty L_T^2} + \|b_{\ll j} v_j\|_{L_x^\infty L_T^2} \\ &\lesssim \|\partial_x w_j\|_{L_x^\infty L_T^2} + 2^{-j}\|b_{\ll j}\|_{L^\infty}\|\partial_x v_j\|_{L_x^\infty L_T^2}.\end{aligned}$$

On the other hand, we can make $2^{-j}\|(u_{0,\ll j})^k\|_{L^\infty}$ as small as desired by choosing the implicit constant $J = J(u_0)$ in $u_{0,\ll j}$ large enough:

$$2^{-j}\|(u_{0,<j-J})^k\|_{L^\infty} \lesssim 2^{-j}2^{j-J}\|u_0\|_{L^k}^k \lesssim c(u_0)2^{-J} \ll 1.$$

It follows that

$$\|\partial_x v_j\|_{L^\infty_x L^2_T} \lesssim \|e^{i\int^x b_{\ll j}} v_{0,j}\|_{\dot H^{1/2}} + \|g_j\|_{L^1_x L^2_T}.$$

We now use the fractional Leibniz rule (Theorem A.12 in [KPV93b]) and Bernstein inequality to estimate the first term in the right-hand side,

$$\begin{aligned}\|e^{i\int^x b_{\ll j}} v_{0,j}\|_{\dot H^{1/2}} &\lesssim \|e^{i\int^x b_{\ll j}}\|_{L^\infty}\|v_{0,j}\|_{\dot H^{1/2}} + \|D_x^{1/2} e^{i\int^x b_{\ll j}}\|_{L^{1/\varepsilon}}\|v_{0,j}\|_{L^{(\frac12-\varepsilon)^{-1}}}\\ &\lesssim \|v_{0,j}\|_{\dot H^{1/2}} + \|(u_{0,\ll j})^k\|_{L^{(\frac12+\varepsilon)^{-1}}}\|v_{0,j}\|_{L^{(\frac12-\varepsilon)^{-1}}}\\ &\lesssim (1+\|u_0\|_{L^k}^k)\|v_{0,j}\|_{\dot H^{1/2}},\end{aligned}$$

and thus

$$\|\partial_x v_j\|_{L^\infty_x L^2_T} \lesssim \|v_{0,j}\|_{\dot H^{1/2}} + \|g_j\|_{L^1_x L^2_T}.$$

Since v_j, g_j as well as $v_{0,j}$ are frequency localized, we get

$$\|v_j\|_{\dot{\mathcal B}_\infty^{s+1/2,2}(L^2_T)} \lesssim \|v_{0,j}\|_{\dot H^s} + \|g_j\|_{\dot{\mathcal B}_1^{s-1/2,2}(L^2_T)}. \tag{4.20}$$

We also need $L^4_x L^\infty_T$-norm estimates. Our equation can be rewritten as

$$i\partial_t v_j + \partial_x^2 v_j = g_j + h_j$$

with

$$h_j = b_{\ll j}^2 v_j - i\partial_x(b_{\ll j} v_j) - i b_{\ll j}\partial_x v_j.$$

Thus we get from Lemmas 4.1-4.3 that

$$\|v_j\|_{\dot{\mathcal B}_4^{s-1/4,2}(L^\infty_T)} \lesssim \|v_{0,j}\|_{\dot H^s} + \|g_j\|_{\dot{\mathcal B}_1^{s-1/2,2}(L^2_T)} + \|h_j\|_{\dot{\mathcal B}_1^{s-1/2,2}(L^2_T)}.$$

We bound the h_j contribution with (4.20):

$$\begin{aligned}\|b_{\ll j}^2 v_j\|_{\dot{\mathcal B}_1^{s-1/2,2}(L^2_T)} &\lesssim 2^{j(s-1/2)}\|b_{\ll j}^2\|_{L^1}\|v_j\|_{L^\infty_x L^2_T}\\ &\lesssim (2^{-j/2}\|b_{\ll j}\|_{L^2})^2\|v_j\|_{\dot{\mathcal B}_\infty^{s+1/2,2}(L^2_T)}\\ &\lesssim \|b\|_{L^1}^2(\|v_{0,j}\|_{\dot H^s} + \|g_j\|_{\dot{\mathcal B}_1^{s-1/2,2}(L^2_T)}),\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\|\partial_x(b_{\ll j} v_j) + b_{\ll j}\partial_x v_j\|_{\dot{\mathcal B}_1^{s-1/2,2}(L^2_T)} &\lesssim 2^{j(s+1/2)}\|b_{\ll j}\|_{L^1}\|v_j\|_{L^\infty_x L^2_T}\\ &\lesssim \|b\|_{L^1}(\|v_{0,j}\|_{\dot H^s} + \|g_j\|_{\dot{\mathcal B}_1^{s-1/2,2}(L^2_T)}).\end{aligned}$$

Therefore,

$$\|v_j\|_{\dot{\mathcal B}_4^{s-1/4,2}(L^\infty_T)} \lesssim \|v_{0,j}\|_{\dot H^s} + \|g_j\|_{\dot{\mathcal B}_1^{s-1/2,2}(L^2_T)} \tag{4.21}$$

and the claim follows by interpolation between (4.21) and (4.20). $\square$

We are now ready to prove the main linear estimate on equation (4.16).

Proposition 4.2. *Let u be a solution of (4.16) with initial data $u_0 \in \dot{H}^s \cap \dot{H}^{s_k}$, $s \in \mathbb{R}$. Then there exist $T = T(u_0) > 0$ and $C = C(u_0)$ such that on $[-T, +T]$,*

$$\|u\|_{\dot{X}^s} \leq C\|u_0\|_{\dot{H}^s} + C\|f\|_{\dot{\mathcal{N}}^{s,1}}.$$

Proof. Using that $|P_+ u_j| = |P_- u_j|$ (since u is real) and Lemma 4.6, we infer by (4.17)

$$\begin{aligned}
\|u_j\|_{\dot{X}^s} \lesssim \|v_j\|_{\dot{X}^s} &\lesssim \|Q_j u_0\|_{\dot{X}^s} + \|f_j\|_{\dot{\mathcal{N}}^{s,1}} + \|\partial_x (u_{0,\ll j})^k v_j\|_{\dot{\mathcal{N}}^{s,1}} + \|(u_{0,\ll j})^{2k} v_j\|_{\dot{\mathcal{N}}^{s,1}} \\
&\quad + \left\|\partial_x [Q_j, (u_{L,\ll j})^k - (u_{0,\ll j})^k] u_{\sim j}\right\|_{\dot{\mathcal{N}}^{s,1}} + \left\|\partial_x [Q_j, (u_{L,\ll j})^k] u_{\sim j}\right\|_{\dot{\mathcal{N}}^{s,1}} \\
&= \|Q_j u_0\|_{\dot{X}^s} + \|f_j\|_{\dot{\mathcal{N}}^{s,1}} + A + B + C + D.
\end{aligned}$$

We bound A by

$$\begin{aligned}
A &\lesssim 2^{j(s-1/2)} \|\partial_x (u_{0,\ll j})^k v_j\|_{L^1_x L^2_T} \lesssim 2^{-j} \|\partial_x (u_{0,\ll j})^k\|_{L^1} 2^{j(s+1/2)} \|v_j\|_{L^\infty_x L^2_T} \\
&\lesssim 2^{-j} \|\partial_x (u_{0,\ll j})^k\|_{L^1} \|v_j\|_{\dot{X}^s}.
\end{aligned}$$

As previously, $2^{-j}\|\partial_x (u_{0,\ll j})^k\|_{L^1}$ can be made as small as needed by choosing the implicit constant $J = J(u_0)$ in $u_{0,\ll j}$ large enough:

$$2^{-j} \|\partial_x (u_{0,<j-J})^k\|_{L^1} \lesssim 2^{-j} 2^{j-J} \|u_0\|_{L^k}^k \lesssim c(u_0) 2^{-J} \ll 1.$$

One proceeds similarly for B:

$$\begin{aligned}
B &\lesssim 2^{j(s-1/2)} \|(u_{0,\ll j})^{2k} v_j\|_{L^1_x L^2_T} \\
&\lesssim 2^{-j} \|(u_{0,\ll j})^k\|_{L^\infty} \|u_0\|_{L^k}^k 2^{j(s+1/2)} \|v_j\|_{L^\infty_x L^2_T} \\
&\ll \|v_j\|_{\dot{X}^s}.
\end{aligned}$$

Now we estimate C. By commutator lemma (Lemma 2.4 in [BP06]), we get

$$\begin{aligned}
C &\lesssim 2^{j(s-1/2)} \|\partial_x [Q_j, (u_{L,\ll j})^k - (u_{0,\ll j})^k] u_{\sim j}\|_{L^1_x L^2_T} \\
&\lesssim 2^{j(s+1/2)} \|(u_{L,\ll j})^k - (u_{0,\ll j})^k\|_{L^1_x L^\infty_T} \|u_j\|_{L^\infty_x L^2_T} \\
&\lesssim \|u_L - u_0\|_{L^k_x L^\infty_T} (\|u_L\|_{L^k}^{k-1} + \|u_0\|_{L^k_x L^\infty_T}^{k-1}) \|u_j\|_{\dot{X}^s} \\
&\ll \|u_j\|_{\dot{X}^s}
\end{aligned}$$

thanks to Lemma 4.5. Finally we deal with term D. By similar considerations, we get

$$\begin{aligned}
D &\lesssim 2^{j(s-1/2)} \|\partial_x [Q_j, (u_{L,\ll j})^k] u_{\sim j}\|_{L^1_x L^2_T} \\
&\lesssim 2^{j(s-1/2)} 2^{-j} \|\partial_x (u_{L,\ll j})^k\|_{L_x^{\frac{4}{4-\varepsilon}} L_T^{\frac{2}{\varepsilon}}} \|\partial_x u_j\|_{L_x^{\frac{4}{\varepsilon}} L_T^{\frac{2}{1-\varepsilon}}} \\
&\lesssim 2^{-j} 2^{3j\varepsilon/4} \|\partial_x (u_{L,\ll j})^k\|_{L_x^{\frac{4}{4-\varepsilon}} L_T^{\frac{2}{\varepsilon}}} \|u_j\|_{\dot{\mathcal{S}}^{s,1-\varepsilon}} \\
&\lesssim 2^{-j} 2^{3j\varepsilon/4} \|\partial_x u_{L,\ll j}\|_{L_x^{(\frac{1}{k}-\frac{\varepsilon}{4})^{-1}} L_T^{\frac{2}{\varepsilon}}} \|u_{L,\ll j}\|_{L^k_x L^\infty_T}^{k-1} \|u_j\|_{\dot{X}^s} \\
&\lesssim \|D_x^{3\varepsilon/4} u_{L,\ll j}\|_{L_x^{(\frac{1}{k}-\frac{\varepsilon}{4})^{-1}} L_T^{\frac{2}{\varepsilon}}} \|u_j\|_{\dot{X}^s}.
\end{aligned}$$

Since the triplet $(\frac{3\varepsilon}{4} - s_k, (\frac{1}{k} - \frac{\varepsilon}{4})^{-1}, \frac{2}{\varepsilon})$ is 1-admissible, for any $\eta > 0$, we can choose $T > 0$ small enough such that

$$\|D_x^{3\varepsilon/4} u_L\|_{L_x^{(\frac{1}{k}-\frac{\varepsilon}{4})^{-1}} L_T^{\frac{2}{\varepsilon}}} < \eta.$$

Gathering all these estimates we infer

$$\|u_j\|_{\dot{X}^s} \lesssim \|Q_j u_0\|_{\dot{X}^s} + \|f_j\|_{\dot{\mathcal{N}}^{s,1}}.$$

Summing this inequality over j finishes the proof of Proposition 4.2. □

We also need $L_x^k L_T^\infty$-norm estimates.

Proposition 4.3. *Let u be a solution of (4.16) with initial data $u_0 \in \dot{H}^{s_k}$. Then there exist $T > 0$ and $C = C(u_0)$ such that*

$$\|u\|_{L_x^k L_T^\infty} \leq C\|u_0\|_{\dot{H}^{s_k}} + C\|f\|_{\dot{\mathcal{N}}^{s_k,1}}.$$

Moreover, if $u_0 \in \dot{H}^s \cap \dot{H}^{s_k}$, $s \in \mathbb{R}$, then

$$\|u\|_{L_T^\infty \dot{H}_x^s} \leq C\|u_0\|_{\dot{H}^s} + C\|f\|_{\dot{\mathcal{N}}^{s,1}}. \tag{4.22}$$

Proof. We can rewrite our equation as

$$u = u_L - \int_0^t V(t-t')(f - \pi(u_0, u))dt'.$$

By virtue of Lemma 4.4 and Lemma 4.3, we deduce

$$\|u\|_{L_x^k L_T^\infty} \lesssim \|u_0\|_{\dot{H}^{s_k}} + \|f\|_{\dot{\mathcal{N}}^{s_k,1}} + \|\pi(u_0, u)\|_{\dot{\mathcal{N}}^{s_k,1}},$$

and also

$$\|u\|_{L_T^\infty \dot{H}_x^s} \lesssim \|u_0\|_{\dot{H}^s} + \|f\|_{\dot{\mathcal{N}}^{s,1}} + \|\pi(u_0, u)\|_{\dot{\mathcal{N}}^{s,1}}.$$

Next we get

$$\begin{aligned}
\|\pi(u_0, u)\|_{\dot{\mathcal{N}}^{s,1}} &\lesssim \Big(\sum_j \big[2^{j(s+1/2)}\|(u_{0,\ll j})^k u_{\sim j}\|_{L_x^1 L_T^2}\big]^2\Big)^{1/2} \\
&\lesssim \|u_0\|_{L_x^k L_T^\infty}^k \Big(\sum_j \big[2^{j(s+1/2)}\|u_{\sim j}\|_{L_x^\infty L_T^2}\big]^2\Big)^{1/2} \\
&\lesssim \|u_0\|_{\dot{H}^{s_k}}^k \|u\|_{\dot{X}^s} \\
&\lesssim C(u_0)(\|u_0\|_{\dot{H}^s} + \|f\|_{\dot{\mathcal{N}}^{s,1}})
\end{aligned}$$

by Proposition 4.2. □

4 Well-posedness for $k \geq 4$

4.1 Nonlinear estimates

Now we estimate the right-hand side of (4.16) in $\dot{\mathcal{N}}^{s,1}$-norm.

Proposition 4.4. *For any $u \in \dot{X}^s \cap L^k_x L^\infty_T$, we have*

$$\|\pi(u_0, u) - \pi(u,u)\|_{\dot{\mathcal{N}}^{s,1}} \lesssim \|u_0 - u\|_{L^k_x L^\infty_T} \big(\|u_0\|^{k-1}_{L^k_x L^\infty_T} + \|u\|^{k-1}_{L^k_x L^\infty_T}\big) \|u\|_{\dot{X}^s}$$

and

$$\|g\|_{\dot{\mathcal{N}}^{s,1}} \lesssim \|u\|^{k-1}_{L^k_x L^\infty_T} \|u\|^2_{\dot{X}^s}.$$

Remark 4.3. *Thanks to the first estimate, we will be able to get the required contraction factor by taking advantage of the difference $u_0 - u$ combined with Lemma 4.5. Concerning the second estimate, we will exploit the square on a norm which does not contain any L^∞_T component (the $\dot{X}^s$-norm).*

Proof. Set $u_j = Q_j u$, $u_{\ll j} = Q_{\ll j} u$, etc. Then:

$$\begin{aligned}
\|\pi(u_0, u) - \pi(u,u)\|_{\dot{\mathcal{N}}^{s,1}} &\lesssim \Big(\sum_j \big[2^{j(s-1/2)} \|\partial_x[((u_{0,\ll j})^k - (u_{\ll j})^k) u_{\sim j}]\|_{L^1_x L^2_T}\big]^2\Big)^{1/2} \\
&\lesssim \Big(\sum_j \big[2^{j(s+1/2)} \|(u_{0,\ll j})^k - (u_{\ll j})^k\|_{L^1_x L^\infty_T} \|u_{\sim j}\|_{L^\infty_x L^2_T}\big]^2\Big)^{1/2} \\
&\lesssim \|u_0 - u\|_{L^k_x L^\infty_T} \big(\|u_0\|^{k-1}_{L^k_x L^\infty_T} + \|u\|^{k-1}_{L^k_x L^\infty_T}\big) \|u\|_{\dot{X}^s}.
\end{aligned}$$

Recalling that $g = \sum_j g_j$ with

$$g_j = -i\partial_x b_{\ll j}.v_j - b^2_{\ll j} v_j + iP_+ R_j,$$

we bound the second term by

$$\begin{aligned}
\|g\|_{\dot{\mathcal{N}}^{s,1}} &\lesssim \Big(\sum_j \big[2^{j(s+1/2)} \sum_{r \gtrsim j} \|(u_{\sim r})^2 (u_{\lesssim r})^{k-1}\|_{L^1_x L^2_T}\big]^2\Big)^{1/2} \\
&\lesssim \Big(\sum_j \big[\sum_{r \gtrsim j} 2^{j(s+1/2)} \|u_{\sim r}\|_{L^{\frac{4}{\varepsilon}}_x L^{\frac{2}{1-\varepsilon}}_T} \|u_{\sim r}\|_{L^{(\frac{1}{k} - \frac{\varepsilon}{4})^{-1}}_x L^{\frac{2}{\varepsilon}}_T} \|u_{\lesssim r}\|^{k-1}_{L^k_x L^\infty_T}\big]^2\Big)^{1/2} \\
&\lesssim \|u\|^{k-1}_{L^k_x L^\infty_T} \sup_r 2^{3\varepsilon r/4} \|u_{\sim r}\|_{L^{(\frac{1}{k} - \frac{\varepsilon}{4})^{-1}}_x L^{\frac{2}{\varepsilon}}_T} \\
&\quad \times \Big(\sum_j \big[\sum_{r \gtrsim j} (2^{(j-r)(s+1/2)}) (2^{r(s+1/2-3\varepsilon/4)} \|u_{\sim r}\|_{L^{\frac{4}{\varepsilon}}_x L^{\frac{2}{1-\varepsilon}}_T})\big]^2\Big)^{1/2} \\
&\lesssim \|u\|^{k-1}_{L^k_x L^\infty_T} \|u\|_{\dot{S}^{s,\varepsilon}} \Big(\sum_{j \leq 0} 2^{j(s+1/2)}\Big) \Big(\sum_j \big[2^{j(s+1/2-3\varepsilon/4)} \|u_{\sim j}\|_{L^{\frac{4}{\varepsilon}}_x L^{\frac{2}{1-\varepsilon}}_T}\big]^2\Big)^{1/2} \\
&\lesssim \|u\|^{k-1}_{L^k_x L^\infty_T} \|u\|^2_{\dot{X}^s}
\end{aligned}$$

where we used discrete Young inequality. $\square$

4.2 Existence in $\dot{H}^{s_k}(\mathbb{R})$

Consider the map F defined as

$$F(u) = U(t)u_0 - \int_0^t U(t-t')f(t')dt',$$

where

$$f = \pi(u_0, u) - \pi(u, u) + g.$$

We shall contract F in the intersection of two balls:

$$B_M(u_0, T) = \{u \in \dot{X}^{s_k} \cap L^k_x L^\infty_T : \|u - u_0\|_{L^k_x L^\infty_T} \leq \delta\},$$

and

$$B_S(u_0, T) = \{u \in \dot{X}^{s_k} \cap L^k_x L^\infty_T : \|u\|_{\dot{X}^{s_k}} \leq \delta\},$$

endowed with the norm

$$\|u\|_{\dot{Y}_T} = \|u\|_{\dot{X}^{s_k}} + \|u\|_{L^k_x L^\infty_T}.$$

Gathering Propositions 4.2, 4.3 and 4.4 (with $s = s_k$) we find that there exists $C = C(u_0) > 1$ such that

$$\begin{aligned}\|F(u)\|_{\dot{X}^{s_k}} \leq C\|U(t)u_0\|_{\dot{X}^{s_k}} &+ C(1 + \|u-u_0\|^{k-1}_{L^k_x L^\infty_T})\|u\|^2_{\dot{X}^{s_k}} \\ &+ C\|u-u_0\|_{L^k_x L^\infty_T}(1 + \|u-u_0\|^{k-1}_{L^k_x L^\infty_T})\|u\|_{\dot{X}^{s_k}}\end{aligned}$$

and in the same way

$$\begin{aligned}\|F(u) - u_0\|_{L^k_x L^\infty_T} \leq \|U(t)u_0 - u_0\|_{L^k_x L^\infty_T} &+ C(1 + \|u-u_0\|^{k-1}_{L^k_x L^\infty_T})\|u\|^2_{\dot{X}^{s_k}} \\ &+ C\|u-u_0\|_{L^k_x L^\infty_T}(1 + \|u-u_0\|^{k-1}_{L^k_x L^\infty_T})\|u\|_{\dot{X}^{s_k}}.\end{aligned}$$

We can choose $T = T(u_0)$ small enough so that the quantities $\|U(t)u_0\|_{\dot{X}^{s_k}}$ and $\|U(t)u_0 - u_0\|_{L^k_x L^\infty_T}$ are smaller than $\varepsilon = \frac{1}{128C^2}$. Thus if $u \in B_M \cap B_S$, then

$$\|F(u)\|_{\dot{X}^{s_k}} \leq 4C\varepsilon + 4C\delta^2$$

and

$$\|F(u) - u_0\|_{L^k_x L^\infty_T} \leq 4C\varepsilon + 4C\delta^2.$$

Now we take $\delta = \frac{1}{8C}$ so that $F(u)$ belongs to $B_M \cap B_S$. Similarly, for any u_1 and u_2 in $B_M \cap B_S$, one has

$$\begin{aligned}\|F(u_1) - F(u_2)\|_{\dot{Y}_T} &\lesssim \|f(u_1) - f(u_2)\|_{\dot{N}^{s_k,1}} \\ &\lesssim \|u_0 - u_1\|_{L^k_x L^\infty_T}(1 + \|u_1\|^{k-1}_{L^k_x L^\infty_T})\|u_1 - u_2\|_{\dot{X}^{s_k}} \\ &\quad + \|u_2\|_{\dot{X}^{s_k}}(\|u_1\|^{k-1}_{L^k_x L^\infty_T} + \|u_2\|^{k-1}_{L^k_x L^\infty_T})\|u_1 - u_2\|_{L^k_x L^\infty_T} \\ &\quad + \|u_1\|^2_{\dot{X}^{s_k}}(\|u_1\|^{k-2}_{L^k_x L^\infty_T} + \|u_2\|^{k-2}_{L^k_x L^\infty_T})\|u_1 - u_2\|_{L^k_x L^\infty_T} \\ &\quad + \|u_2\|^{k-1}_{L^k_x L^\infty_T}(\|u_1\|_{\dot{X}^{s_k}} + \|u_2\|_{\dot{X}^{s_k}})\|u_1 - u_2\|_{\dot{X}^{s_k}}. \qquad (4.23)\end{aligned}$$

Therefore,
$$\|F(u_1) - F(u_2)\|_{\dot{Y}_T} \lesssim (\varepsilon + \delta)\|u_1 - u_2\|_{\dot{Y}_T}$$
and for ε, δ small enough, $F : B_M \cap B_S \to B_M \cap B_S$ is contractive. There exists a solution u in $B_M \cap B_S$.

The next step is to show that $u \in \mathcal{C}([-T, +T], \dot{H}^{s_k}(\mathbb{R}))$. Using (4.22) and Proposition 4.4, we obtain first that $u \in L^\infty_T \dot{H}^{s_k}_x$. Now for any $t_1, t_2 \in [0, T]$ with $t_1 < t_2$, writing $u(t)$ as

$$u(t) = V(t - t_1)u(t_1) - \int_{t_1}^{t} V(t - t')\partial_x u^{k+1}(t')dt',$$

we get

$$\begin{aligned}
\|u(t_1) - u(t_2)\|_{\dot{H}^{s_k}} &\lesssim \sup_{t\in[t_1,t_2]} \|u(t) - u(t_1)\|_{\dot{H}^{s_k}} \\
&\lesssim \sup_{t\in[t_1,t_2]} \|u(t_1) - V(t - t_1)u(t_1)\|_{\dot{H}^{s_k}} \\
&\quad + \left\| \int_{t_1}^{t} V(t - t')\partial_x u^{k+1}(t')dt' \right\|_{L^\infty(t_1,t_2;\dot{H}^{s_k})} \\
&\to 0
\end{aligned}$$

as $t_1 \to t_2$.

4.3 Uniqueness in $\dot{Z}_T$

Consider $u_{0,1}, u_{0,2} \in \dot{H}^{s_k}$ two initial data, and u_1, u_2 belonging to our resolution space $\dot{Z}_T$ (see Theorem 4.1) satisfying

$$u_1(t) = U_1(t)u_{0,1} - \int_0^t U_1(t - t')f_1(u_1)(t')dt',$$

$$u_2(t) = U_2(t)u_{0,2} - \int_0^t U_2(t - t')f_2(u_2)(t')dt',$$

where $U_j(t)\varphi$ is solution to

$$\partial_t u + \mathcal{H}\partial_x^2 u + \pi(u_{0,j}, u) = 0, \quad u(0) = \varphi$$

and f_j is defined by

$$f_j(u) = \pi(u_{0,j}, u) - \pi(u, u) + g(u).$$

We intend to show that there exists a nondecreasing polynomial function $P \geq 1$ such that

$$\begin{aligned}
\|u_1 - u_2\|_{\dot{Z}_T} \lesssim P(\|u_1\|_{\dot{Z}_T} + \|u_2\|_{\dot{Z}_T})\big[&\|u_{0,1} - u_{0,2}\|_{\dot{H}^{s_k}} \\
&+ (\|u_1\|_{\dot{X}^{s_k}} + \|u_2\|_{\dot{X}^{s_k}})\|u_1 - u_2\|_{\dot{Z}_T}\big] \quad (4.24)
\end{aligned}$$

where the implicit constant in the inequality may depend on $u_{0,1}$, $u_{0,2}$. Obviously, the uniqueness of the solution to (gBO) and the fact that the flow map is locally Lipschitz from $\dot{H}^{s_k}(\mathbb{R})$ to $\dot{Z}_T$ follow directly from (4.24).

One has

$$\|U_1(t)u_{0,1} - U_2(t)u_{0,2}\|_{\dot{Z}_T} \lesssim \|U_1(t)(u_{0,1} - u_{0,2})\|_{\dot{Z}_T} + \|(U_1(t) - U_2(t))u_{0,2}\|_{\dot{Z}_T}.$$

The first term in the right-hand side is bounded by $\|u_{0,1} - u_{0,2}\|_{\dot{H}^{s_k}}$. To treat the second one, we note that $(U_1(t) - U_2(t))u_{0,2}$ is solution to

$$\partial_t u + \mathcal{H}\partial_x^2 u + \pi(u_{0,1}, u) = \pi(u_{0,1}, U_2(t)u_{0,2}) - \pi(u_{0,2}, U_2(t)u_{0,2})$$

with zero initial data. Hence by Propositions 4.2 and 4.3,

$$\begin{aligned}\|(U_1(t) - U_2(t))u_{0,2}\|_{\dot{Z}_T} &\lesssim \|\pi(u_{0,1}, U_2(t)u_{0,2}) - \pi(u_{0,2}, U_2(t)u_{0,2})\|_{\dot{\mathcal{N}}^{s_k,1}} \\ &\lesssim \|u_{0,1} - u_{0,2}\|_{\dot{H}^{s_k}}.\end{aligned}$$

We also need to bound

$$\begin{aligned}&\Big\| \int_0^t (U_1(t-t')f_1(u_1) - U_2(t-t')f_2(u_2))dt' \Big\|_{\dot{Z}_T} \\ &\lesssim \Big\| \int_0^t U_1(t-t')(f_1(u_1) - f_1(u_2))dt' \Big\|_{\dot{Z}_T} &(4.25)\\ &\quad + \Big\| \int_0^t U_1(t-t')(f_1(u_2) - f_2(u_2))dt' \Big\|_{\dot{Z}_T} &(4.26)\\ &\quad + \Big\| \int_0^t (U_1(t-t') - U_2(t-t'))f_2(u_2)dt' \Big\|_{\dot{Z}_T}. &(4.27)\end{aligned}$$

(4.25) is bounded by

$$(4.25) \lesssim \|f_1(u_1) - f_1(u_2)\|_{\dot{\mathcal{N}}^{s_k,1}}$$

and we can use (4.23) to get the desired estimate. Term (4.26) is bounded by

$$\begin{aligned}(4.26) &\lesssim \|\pi(u_{0,1}, u_2) - \pi(u_{0,2}, u_2)\|_{\dot{\mathcal{N}}^{s_k,1}} \\ &\lesssim \|u_2\|_{\dot{X}^{s_k}} \|u_{0,1} - u_{0,2}\|_{\dot{H}^{s_k}}.\end{aligned}$$

Finally, note that $\int_0^t (U_1(t-t') - U_2(t-t'))f_2(u_2)dt'$ is solution to

$$\partial_t u + \mathcal{H}\partial_x^2 u + \pi(u_{0,1}, u) = \pi(u_{0,2}, \psi) - \pi(u_{0,1}, \psi),$$

with zero initial data, and where $\psi = \int_0^t U_2(t-t')f_2(u_2)dt'$. It follows that

$$\begin{aligned}(4.27) &\lesssim \|\pi(u_{0,2}, \psi) - \pi(u_{0,1}, \psi)\|_{\dot{\mathcal{N}}^{s_k,1}} \\ &\lesssim \|\psi\|_{\dot{X}^{s_k}} \|u_{0,1} - u_{0,2}\|_{\dot{H}^{s_k}} \\ &\lesssim (\|u_2\|_{\dot{X}^{s_k}} + \|u_2\|_{\dot{X}^{s_k}}^{k+1}) \|u_{0,1} - u_{0,2}\|_{\dot{H}^{s_k}}.\end{aligned}$$

Gathering all these estimates we obtain (4.24).

4.4 Existence and uniqueness in $H^s(\mathbb{R})$, $s \geq s_k$

Define the spaces $X^s = \dot{X}^0 \cap \dot{X}^s$ and $\mathcal{N}^{s,\theta} = \dot{\mathcal{N}}^{0,\theta} \cap \dot{\mathcal{N}}^{s,\theta}$.

We closely follow the proof of Theorem 4.1. We show that F is a contraction in the intersection of

$$B_M(u_0, T) = \{u \in X^s \cap L^k_x L^\infty_T : \|u - u_0\|_{L^k_x L^\infty_T} \leq \delta\}$$

and

$$B_S(u_0, T) = \{u \in X^s \cap L^k_x L^\infty_T : \|u\|_{X^s} \leq \delta\}$$

endowed with the norm

$$\|u\|_{Y_T} = \|u\|_{X^s} + \|u\|_{L^k_x L^\infty_T}.$$

Using Propositions 4.2, 4.3 and 4.4 (applied with $s \geq s_k$ and $s = 0$) and the embedding $\mathcal{N}^{s,1} \hookrightarrow \dot{\mathcal{N}}^{s_k,1}$ for $s \geq s_k$ we find

$$\begin{aligned} \|F(u)\|_{X^s} \leq C\|U(t)u_0\|_{X^s} &+ C(1 + \|u - u_0\|^{k-1}_{L^k_x L^\infty_T})\|u\|^2_{X^s} \\ &+ C\|u - u_0\|_{L^k_x L^\infty_T}(1 + \|u - u_0\|^{k-1}_{L^k_x L^\infty_T})\|u\|_{X^s} \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} \|F(u) - u_0\|_{L^k_x L^\infty_T} \leq \|U(t)u_0 - u_0\|_{L^k_x L^\infty_T} &+ C(1 + \|u - u_0\|^{k-1}_{L^k_x L^\infty_T})\|u\|^2_{X^s} \\ &+ C\|u - u_0\|_{L^k_x L^\infty_T}(1 + \|u - u_0\|^{k-1}_{L^k_x L^\infty_T})\|u\|_{X^s}. \end{aligned}$$

In the same way, one may show that

$$\begin{aligned} \|F(u_1) - F(u_2)\|_{Y_T} &\lesssim \|f(u_1) - f(u_2)\|_{\mathcal{N}^{s,1}} \\ &\lesssim \|u_0 - u_1\|_{L^k_x L^\infty_T}(1 + \|u_1\|^{k-1}_{L^k_x L^\infty_T})\|u_1 - u_2\|_{X^s} \\ &\quad + \|u_2\|_{X^s}(\|u_1\|^{k-1}_{L^k_x L^\infty_T} + \|u_2\|^{k-1}_{L^k_x L^\infty_T})\|u_1 - u_2\|_{L^k_x L^\infty_T} \\ &\quad + \|u_1\|^2_{X^s}(\|u_1\|^{k-2}_{L^k_x L^\infty_T} + \|u_2\|^{k-2}_{L^k_x L^\infty_T})\|u_1 - u_2\|_{L^k_x L^\infty_T} \\ &\quad + \|u_2\|^{k-1}_{L^k_x L^\infty_T}(\|u_1\|_{X^s} + \|u_2\|_{X^s})\|u_1 - u_2\|_{X^s}. \end{aligned}$$

This proves the existence in $H^s(\mathbb{R})$. The end of the proof is identical to that of Theorem 4.1.

5 Well-posedness for $k = 3$

Let $k = 3$ and $s > 1/3$ be fixed.

The scheme of the proof is the same as for the case $k \geq 4$ with minor modifications. First, in view of Lemma 4.2, it is clear that Lemma 4.5 holds for $k = 3$ with

$u_0 \in \dot{H}^{s_k}$ replaced by $u_0 \in H^s$. Next we see that the $\dot{\mathcal{B}}^{\frac{3\varepsilon}{4},2}_{(\frac{1}{k}-\frac{\varepsilon}{4})^{-1}}(L_T^{\frac{2}{\varepsilon}})$ -norm which appears in Proposition 4.4 when estimating the nonlinear term g is not bounded by the $\dot{S}^{\varepsilon,1}$-norm for $k=3$. So we modify slightly the space X^s by setting

$$X^s = \dot{X}^0 \cap \dot{X}^s \cap \dot{\mathcal{B}}^{\varepsilon,2}_3(L_T^{\frac{2}{\varepsilon}}).$$

On one hand, it is clear from Sobolev inequalities that

$$\|u\|_{\dot{\mathcal{B}}^{\frac{3\varepsilon}{4},2}_{(\frac{1}{3}-\frac{\varepsilon}{4})^{-1}}(L_T^{\frac{2}{\varepsilon}})} \lesssim \|u\|_{\dot{\mathcal{B}}^{\varepsilon,2}_3(L_T^{\frac{2}{\varepsilon}})} \lesssim \|u\|_{X^s}.$$

On the other hand, the $\dot{\mathcal{B}}^{\varepsilon,2}_3(L_T^{\frac{2}{\varepsilon}})$-norm is acceptable since by (4.12),

$$\begin{aligned}\|V(t)\varphi\|_{\dot{\mathcal{B}}^{\varepsilon,2}_3(L_T^{\frac{2}{\varepsilon}})} &\lesssim \Big(\sum_j 4^{j\varepsilon}\|Q_jV(t)\varphi\|^2_{L^3_xL^\infty_T}\Big)^{1/2} \\ &\lesssim \Big(\sum_j \|Q_j\varphi\|^2_{H^{1/3+2\varepsilon}}\Big)^{1/2} \lesssim \|\varphi\|_{H^s}\end{aligned}$$

for $\varepsilon \ll 1$. From this, it is straightforward to check that the subcritical non-homogeneous versions of Propositions 4.2, 4.3 and 4.4 are valid whenever $k=3$. This essentially proves Theorem 4.3.

Acknowledgments

The author wants to thank Fabrice Planchon for his enthusiastic help and his availability.

Troisième partie

Etude locale des équations de type KdV dissipatives

Chapitre 5

Caractères bien posé et mal posé des équations de Benjamin-Ono dissipatives

Nous étudions le problème de Cauchy pour les équations de Benjamin-Ono dissipatives $u_t + \mathcal{H}u_{xx} + |D|^\alpha u + uu_x = 0$ avec $0 \leq \alpha \leq 2$. Lorsque $0 \leq \alpha < 1$, nous prouvons le caractère mal posé dans $H^s(\mathbb{R})$, $s \in \mathbb{R}$, dans le sens où le flot solution $u_0 \mapsto u$ (s'il existe) n'est pas $\mathcal{C}^2$ à l'origine. Pour $1 < \alpha \leq 2$, nous montrons le caractère globallement bien posé dans $H^s(\mathbb{R})$, $s > -\alpha/4$. Il s'avère que cet indice est optimal.

Well-posedness and ill-posedness results for dissipative Benjamin-Ono equations

Stéphane Vento,
Université Paris-Est,
Laboratoire d'Analyse et de Mathématiques Appliquées,
5 bd. Descartes, Cité Descartes, Champs-Sur-Marne,
77454 Marne-La-Vallée Cedex 2, France

E-mail: stephane.vento@univ-paris-est.fr

Abstract. We study the Cauchy problem for the dissipative Benjamin-Ono equations $u_t + \mathcal{H}u_{xx} + |D|^\alpha u + uu_x = 0$ with $0 \le \alpha \le 2$. When $0 \le \alpha < 1$, we show the ill-posedness in $H^s(\mathbb{R})$, $s \in \mathbb{R}$, in the sense that the flow map $u_0 \mapsto u$ (if it exists) fails to be $\mathcal{C}^2$ at the origin. For $1 < \alpha \le 2$, we prove the global well-posedness in $H^s(\mathbb{R})$, $s > -\alpha/4$. It turns out that this index is optimal.

Keywords : dissipative dispersive equations, well-posedness, ill-posedness
AMS Classification : 35Q55, 35A05, 35M10

1 Introduction, main results and notations

1.1 Introduction

In this work we consider the Cauchy problem for the following dissipative Benjamin-Ono equations

$$\begin{cases} u_t + \mathcal{H}u_{xx} + |D|^\alpha u + uu_x = 0, & t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ u(0,\cdot) = u_0 \in H^s(\mathbb{R}), \end{cases} \tag{dBO}$$

with $0 \le \alpha \le 2$, and where $\mathcal{H}$ is the Hilbert transform defined by

$$\mathcal{H}f(x) = \frac{1}{\pi} \operatorname{pv}\Big(\frac{1}{x} * f\Big)(x) = \mathcal{F}^{-1}\big(-i \ \operatorname{sgn}(\xi)\hat{f}(\xi)\big)(x),$$

and $|D|^\alpha$ is the Fourier multiplier with symbol $|\xi|^\alpha$.

When $\alpha = 0$, (dBO) is the ordinary Benjamin-Ono equation derived by Benjamin [Ben67] and later by Ono [Ono75] as a model for one-dimensional waves in deep water. The Cauchy problem for the Benjamin-Ono equation has been extensively studied these last years. It has been proved in [Sau79] that (BO) is globally well-posed in $H^s(\mathbb{R})$ for $s \geq 3$, and then for $s \geq 3/2$ in [Pon91] and [Iór86]. In [Tao04], Tao get the well-posedness of this equation for $s \geq 1$ by using a gauge transformation (which is a modified version of the Cole-Hopf transformation). Recently, combining a gauge transformation together with a Bourgain's method, Ionescu and Kenig [IK07] finally shown that one could go down to $L^2(\mathbb{R})$, and this seems to be, in some sense, optimal. It is worth noticing that all these results have been obtained by compactness methods. On the other hand, Molinet, Saut and Tzvetkov [MST01] proved that for all $s \in \mathbb{R}$, the flow map $u_0 \mapsto u$ is not of class $\mathcal{C}^2$ from $H^s(\mathbb{R})$ to $H^s(\mathbb{R})$. Furthermore, building suitable families of approximate solutions, Koch and Tzvetkov proved in [KT05] that the flow map is actually not even uniformly continuous on bounded sets of $H^s(\mathbb{R})$, $s > 0$. As an important consequence of this, since a Picard iteration scheme would imply smooth dependance upon the initial data, we see that such a scheme cannot be used to get solutions in any space continuously embedded in $\mathcal{C}([0,T]; H^s(\mathbb{R}))$.

When $\alpha = 2$, (dBO) is the so-called Benjamin-Ono-Burgers equation

$$u_t + (\mathcal{H} - 1)u_{xx} + uu_x = 0. \tag{BOB}$$

Edwin and Robert [ER86] have derived (BOB) by means of formal asymptotic expansions in order to describe wave motions by intense magnetic flux tube in the solar atmosphere. The dissipative effects in that context are due to heat conduction. (BOB) has been studied in many papers, see [Dix91, FL00, Zha00]. Working in Bourgain's spaces containing both dispersive and dissipative effects[1], Otani showed in [Ota05] that (BOB) is globally well-posed in $H^s(\mathbb{R})$, $s > -1/2$. In this paper, we prove that this index is in fact critical since the flow map $u_0 \mapsto u$ is not of class $\mathcal{C}^3$ from $H^s(\mathbb{R})$ to $H^s(\mathbb{R})$, $s < -1/2$. Intriguingly, this index coincides with the critical Sobolev space for the Burgers equation

$$u_t - u_{xx} + uu_x = 0,$$

see [Dix96, Bek96]. This result is in a marked contrast with what occurs for the KdV-Burgers equation which is well-posed above $H^{-1}(\mathbb{R})$, see [MR02].

Now consider the general case $0 \leq \alpha \leq 2$. By running the approach of [MR02] combined with the smoothing relation obtained in [Ota05], we can only get that the

[1]Such spaces were first introduced by Molinet and Ribaud in [MR02] for the KdV-Burgers equation.

problem (dBO) is well-posed in $H^s(\mathbb{R})$ for $3/2 < \alpha \leq 2$ and $s > 1/2 - \alpha/2$. This was done by Otani in [Ota06]. Here we improve this result by showing that (dBO) is globally well-posed in $H^s(\mathbb{R})$, for $1 < \alpha \leq 2$ and $s > -\alpha/4$. It is worth comparing (dBO) with the pure dissipative equation

$$u_t + |D|^\alpha u + uu_x = 0. \tag{5.1}$$

In the Appendix, we show that (5.1) with $1 < \alpha \leq 2$ is well-posed in $H^s(\mathbb{R})$ as soon as $s > 3/2 - \alpha$. The techniques we use are very common in the context of semilinear parabolic problems and can be easily adapted to (dBO). In particular when $\alpha = 2$, this provides an alternative (and simpler) proof of our main result. When $\alpha < 2$, clearly we see that the dispersive part in (dBO) plays a key role in the low regularity of the solution.

We are going to perform a fixed point argument on the integral formulation of (dBO) in the weighted Sobolev space

$$\|u\|_{X_\alpha^{b,s}} = \|\langle i(\tau - \xi|\xi|) + |\xi|^\alpha\rangle^b \langle\xi\rangle^s \mathcal{F}u(\tau,\xi)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}. \tag{5.2}$$

This will be achieved by deriving a bilinear estimate in these spaces. By Plancherel's theorem and duality, it reduces to estimating a weighted convolution of L^2 functions. In some regions where the dispersive effect is too weak to recover the lost derivative in the nonlinear term at low regularity ($s > -\alpha/4$), in particular when considering the high-high interactions, we are led to use a dyadic approach. In [Tao01], Tao systematically studied some nonlinear dispersive equations like KdV, Schrödinger or wave equation by using such a dyadic decomposition and orthogonality. Following the spirit of Tao's works, we shall prove some estimates on dyadic blocks, which may be of independent interest. Indeed, we believe that they could certainly be used for other equations based on a Benjamin-Ono-type dispersion.

Next, we show that our well-posedness results turn out to be sharp. Adapting the arguments used in [MST01] to prove the ill-posedness of (BO), we find that the solution map $u_0 \mapsto u$ (if it exists) cannot be $\mathcal{C}^3$ at the origin from $H^s(\mathbb{R})$ to $H^s(\mathbb{R})$ as soon as $s < -\alpha/4$. See also [Bou97, MR02, MR04b, Ven07b] for situations where this method applies. Note that we need to prove the discontinuity of the third iterative term to obtain the condition $s < -\alpha/4$, whereas the second iterate is usually sufficient to get an optimal result. On the other hand, we prove using similar arguments, that in the case $0 \leq \alpha < 1$, the solution map fails to be $\mathcal{C}^2$ in any $H^s(\mathbb{R})$, $s \in \mathbb{R}$. This is mainly due to the fact that the operator $|D|^\alpha$ is too weak to counterbalance the lost derivative which appears in the nonlinear term $\partial_x u^2$.

1.2 Main results

Let us now formally state our results.

Theorem 5.1. *Let $1 < \alpha \leq 2$ and $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$ with $s > -\alpha/4$. Then for any $T > 0$, there exists a unique solution u of (dBO) in*

$$Z_T = \mathcal{C}([0,T]; H^s(\mathbb{R})) \cap X^{1/2,s}_{\alpha,T}.$$

Moreover, the map $u_0 \mapsto u$ is smooth from $H^s(\mathbb{R})$ to Z_T and u belongs to $\mathcal{C}((0,T], H^\infty(\mathbb{R}))$.

Remark 5.1. *The spaces $X^{b,s}_{\alpha,T}$ are restricted versions of $X^{b,s}_{\alpha}$ defined by the norm (5.2). See Section 1.3 for a precise definition.*

Remark 5.2. *In [Ota06], Otani studied a larger family of dispersive-dissipative equations taking the form*

$$u_t - |D|^{1+a} u_x + |D|^\alpha u + u u_x = 0 \tag{5.3}$$

with $a \geq 0$ and $\alpha > 0$. He showed that (5.3) is globally well-posed in $H^s(\mathbb{R})$ provided $a + \alpha \leq 3$, $\alpha > (3-a)/2$ and $s > -(a+\alpha-1)/2$. If $a = 0$, it is clear that we get a better result, at least when $\alpha < 2$. It will be an interesting challenge to adapt our method of proofs to (5.3) in the case $a > 0$.

Remark 5.3. *Another interesting problem should be to consider the periodic dissipative BO equations*

$$\begin{cases} u_t + \mathcal{H}u_{xx} + |D|^\alpha u + u u_x = 0, & t > 0, x \in \mathbb{T}, \\ u(0,\cdot) = u_0 \in H^s(\mathbb{T}), \end{cases} \tag{5.4}$$

Recall that in [Mol06], Molinet proved the global well-posedness of the periodic BO equation in $L^2(\mathbb{T})$. To our knowledge, equation (5.4) in the case $\alpha > 0$ has never been investigated.

Theorem 5.1 is sharp in the following sense.

Theorem 5.2. *Let $1 \leq \alpha \leq 2$ and $s < -\alpha/4$. There does not exist $T > 0$ such that the Cauchy problem (dBO) admits a unique local solution defined on the interval $[0,T]$ and such that the flow map $u_0 \mapsto u$ is of class $\mathcal{C}^3$ in a neighborhood of the origin from $H^s(\mathbb{R})$ to $H^s(\mathbb{R})$.*

In the case $0 \leq \alpha < 1$, we have the following ill-posedness result.

Theorem 5.3. *Let $0 \leq \alpha < 1$ and $s \in \mathbb{R}$. There does not exist $T > 0$ such that the Cauchy problem (dBO) admits a unique local solution defined on the interval $[0,T]$ and such that the flow map $u_0 \mapsto u$ is of class $\mathcal{C}^2$ in a neighborhood of the origin from $H^s(\mathbb{R})$ to $H^s(\mathbb{R})$.*

Remark 5.4. *At the end-point $\alpha = 1$, our proof of Theorem 5.3 fails. However, Theorem 5.2 provides the ill-posedness in $H^s(\mathbb{R})$, for $s < -1/4$. So, it is still not clear of what happens to (dBO) when $\alpha = 1$ and $s \geq -1/4$.*

The structure of our paper is as follows. We introduce a few notation in the rest of this section. In Section 2, we recall some estimates related to the linear (dBO) equations. Next, we prove the crucial bilinear estimate in Section 3, which leads to the proof of Theorem 5.1 in Section 4. Section 5 is devoted to the ill-posedness results (Theorems 5.2 and 5.3). Finally, we briefly study the dissipative equation (5.1) in the Appendix.

1.3 Notations

When writing $A \lesssim B$ (for A and B nonnegative), we mean that there exists $C > 0$ independent of A and B such that $A \leq CB$. Similarly define $A \gtrsim B$ and $A \sim B$. If $A \subset \mathbb{R}^N$, $|A|$ denotes its Lebesgue measure and χ_A its characteristic function. For $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$, we define its Fourier transform $\mathcal{F}(f)$ (or $\widehat{f}$) by

$$\mathcal{F}f(\xi) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{-i\langle x,\xi\rangle} f(x)dx.$$

The Lebesgue spaces are endowed with the norm

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} = \Big(\int_{\mathbb{R}^N} |f(x)|^p dx \Big)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty$$

with the usual modification for $p = \infty$. We also consider the space-time Lebesgue spaces $L^p_x L^q_t$ defined by

$$\|f\|_{L^p_x L^q_t} = \Big\| \|f\|_{L^q_t(\mathbb{R})} \Big\|_{L^p_x(\mathbb{R})}.$$

For $b, s \in \mathbb{R}$, we define the Sobolev spaces $H^s(\mathbb{R})$ and their space-time versions $H^{b,s}(\mathbb{R}^2)$ by the norms

$$\|f\|_{H^s} = \Big(\int_{\mathbb{R}} \langle \xi \rangle^{2s} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \Big)^{1/2},$$

$$\|u\|_{H^{b,s}} = \Big(\int_{\mathbb{R}^2} \langle \tau \rangle^{2b} \langle \xi \rangle^{2s} |\widehat{u}(\tau,\xi)|^2 d\tau d\xi \Big)^{1/2},$$

with $\langle \cdot \rangle = (1 + |\cdot|^2)^{1/2}$. Let $V(\cdot)$ be the free linear group associated to the linear Benjamin-Ono equation, i.e.

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \mathcal{F}_x(V(t)\varphi)(\xi) = \exp(it\xi|\xi|)\widehat{\varphi}(\xi), \quad \varphi \in \mathcal{S}'.$$

We will mainly work in the $X^{b,s}_\alpha$ space defined in (5.2), and in its restricted version $X^{b,s}_{\alpha,T}$, $T\geq 0$, equipped with the norm

$$\|u\|_{X^{b,s}_{\alpha,T}} = \inf_{w\in X^{b,s}_\alpha}\{\|w\|_{X^{b,s}_\alpha},\ w(t)=u(t) \text{ on } [0,T]\}.$$

Note that since $\mathcal{F}(V(-t)u)(\tau,\xi)=\widehat{u}(\tau+\xi|\xi|,\xi)$, we can re-express the norm of $X^{b,s}_\alpha$ as

$$\begin{aligned}\|u\|_{X^{b,s}_\alpha} &= \big\|\langle i\tau+|\xi|^\alpha\rangle^b\langle\xi\rangle^s\widehat{u}(\tau+\xi|\xi|,\xi)\big\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\\ &= \big\|\langle i\tau+|\xi|^\alpha\rangle^b\langle\xi\rangle^s\mathcal{F}(V(-t)u)(\tau,\xi)\big\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\\ &\sim \|V(-t)u\|_{H^{b,s}}+\|u\|_{L^2_tH^{s+\alpha b}_x}.\end{aligned}$$

Finally, we denote by S_α the semigroup associated with the free evolution of (dBO),

$$\forall t\geq 0,\ \mathcal{F}_x(S_\alpha(t)\varphi)(\xi)=\exp[it\xi|\xi|-|\xi|^\alpha t]\widehat{\varphi}(\xi),\ \varphi\in\mathcal{S}',$$

and we extend S_α to a linear operator defined on the whole real axis by setting

$$\forall t\in\mathbb{R},\ \mathcal{F}_x(S_\alpha(t)\varphi)(\xi)=\exp[it\xi|\xi|-|\xi|^\alpha|t|]\widehat{\varphi}(\xi),\ \varphi\in\mathcal{S}'. \tag{5.5}$$

2 Linear estimates

In this section, we collect together several linear estimates on the operators S_α introduced in (5.5) and L_α defined by

$$L_\alpha : f\mapsto \chi_{\mathbb{R}_+}(t)\psi(t)\int_0^t S_\alpha(t-t')f(t')dt'.$$

Recall that (dBO) is equivalent to its integral formulation

$$u(t)=S_\alpha(t)u_0-\frac{1}{2}\int_0^t S_\alpha(t-t')\partial_x(u^2(t'))dt'. \tag{5.6}$$

It will be convenient to replace the local-in-time integral equation (5.6) with a global-in-time truncated integral equation. Let ψ be a cutoff function such that

$$\psi\in\mathcal{C}^\infty_0(\mathbb{R}),\quad \operatorname{supp}\psi\subset[-2,2],\quad \psi\equiv 1 \text{ on } [-1,1],$$

and define $\psi_T(\cdot)=\psi(\cdot/T)$ for all $T>0$. We can replace (5.6) on the time interval $[0,T]$, $T<1$ by the equation

$$u(t)=\psi(t)\Big[S_\alpha(t)u_0-\frac{\chi_{\mathbb{R}_+}(t)}{2}\int_0^t S_\alpha(t-t')\partial_x(\psi_T^2(t')u^2(t'))dt'\Big]. \tag{5.7}$$

Proofs of the results stated here can be obtained by a slight modification of the linear estimates derived in [MR02].

Lemma 5.1. *For all $s \in \mathbb{R}$ and all $\varphi \in H^s(\mathbb{R})$,*

$$\|\psi(t)S_\alpha(t)\varphi\|_{X_\alpha^{1/2,s}} \lesssim \|\varphi\|_{H^s}. \tag{5.8}$$

Lemma 5.2. *Let $s \in \mathbb{R}$. For all $0 < \delta < 1/2$ and all $v \in X_\alpha^{-1/2+\delta,s}$,*

$$\Big\|\chi_{\mathbb{R}_+}(t)\psi(t)\int_0^t S_\alpha(t-t')v(t')dt'\Big\|_{X_\alpha^{1/2,s}} \lesssim \|v\|_{X_\alpha^{-1/2+\delta,s}}. \tag{5.9}$$

To globalize our solution, we will need the next lemma.

Lemma 5.3. *Let $s \in \mathbb{R}$ and $\delta > 0$. Then for any $f \in X_\alpha^{-1/2+\delta,s}$,*

$$t \longmapsto \int_0^t S_\alpha(t-t')f(t')dt' \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+; H^{s+\alpha\delta}).$$

Moreover, if (f_n) is a sequence satisfying $f_n \to 0$ in $X_\alpha^{-1/2+\delta,s}$, then

$$\Big\|\int_0^t S_\alpha(t-t')f_n(t')dt'\Big\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+;H^{s+\alpha\delta})} \longrightarrow 0.$$

3 Bilinear estimates

3.1 Dyadic blocks estimates

We introduce Tao's $[k;Z]$-multipliers theory [Tao01] and derive the dyadic blocks estimates for the Benjamin-Ono equation.

Let Z be any abelian additive group with an invariant measure $d\eta$. For any integer $k \geq 2$ we define the hyperplane

$$\Gamma_k(Z) = \{(\eta_1, ..., \eta_k) \in Z^k : \eta_1 + ... + \eta_k = 0\}$$

which is endowed with the measure

$$\int_{\Gamma_k(Z)} f = \int_{Z^{k-1}} f(\eta_1, ..., \eta_{k-1}, -(\eta_1 + ... + \eta_{k-1}))d\eta_1...d\eta_{k-1}.$$

A $[k;Z]$-multiplier is defined to be any function $m : \Gamma_k(Z) \to \mathbb{C}$. The multiplier norm $\|m\|_{[k;Z]}$ is defined to be the best constant such that the inequality

$$\Big|\int_{\Gamma_k(Z)} m(\eta)\prod_{j=1}^k f_j(\eta_j)\Big| \leq \|m\|_{[k;Z]}\prod_{j=1}^k \|f_j\|_{L^2(Z)} \tag{5.10}$$

holds for all test functions $f_1, ..., f_k$ on Z. In other words,

$$\|m\|_{[k;Z]} = \sup_{\substack{f_j \in \mathcal{S}(Z) \\ \|f_j\|_{L^2(Z)} \leq 1}} \Big|\int_{\Gamma_k(Z)} m(\eta)\prod_{j=1}^k f_j(\eta_j)\Big|.$$

In his paper [Tao01], Tao used the following notations. Capitalized variables N_j, L_j $(j = 1, ..., k)$ are presumed to be dyadic, i.e. range over numbers of the form 2^ℓ, $\ell \in \mathbb{Z}$. In this paper, we only consider the case $k = 3$, which corresponds to the quadratic nonlinearity in the equation. It will be convenient to define the quantities $N_{max} \geq N_{med} \geq N_{min}$ to be the maximum, median and minimum of N_1, N_2, N_3 respectively. Similarly, define $L_{max} \geq L_{med} \geq L_{min}$ whenever $L_1, L_2, L_3 > 0$. The quantities N_j will measure the magnitude of frequencies of our waves, while L_j measures how closely our waves approximate a free solution.

Here we consider $[3; \mathbb{R} \times \mathbb{R}]$-multipliers and we parameterize $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ by $\eta = (\tau, \xi)$ endowed with the Lebesgue measure $d\tau d\xi$. Define

$$h_j(\xi_j) = \xi_j|\xi_j|, \quad \lambda_j = \tau_j - h_j(\xi_j), \quad j = 1, 2, 3,$$

and the resonance function

$$h(\xi) = h_1(\xi_1) + h_2(\xi_2) + h_3(\xi_3).$$

By a dyadic decomposition of the variables ξ_j, λ_j, $h(\xi)$, we will be led to estimate

$$\|X_{N_1,N_2,N_3,H,L_1,L_2,L_3}\|_{[3;\mathbb{R}\times\mathbb{R}]} \tag{5.11}$$

where

$$X_{N_1,N_2,N_3,H,L_1,L_2,L_3} = \chi_{|h(\xi)|\sim H} \prod_{j=1}^{3} \chi_{|\xi_j|\sim N_j} \chi_{|\lambda_j|\sim L_j}. \tag{5.12}$$

From the identities

$$\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 0 \tag{5.13}$$

and

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + h(\xi) = 0$$

on the support of the multiplier, we see that (5.12) vanishes unless

$$N_{max} \sim N_{med} \tag{5.14}$$

and

$$L_{max} \sim \max(H, L_{med}). \tag{5.15}$$

Lemma 5.4. *On the support of $X_{N_1,N_2,N_3,H,L_1,L_2,L_3}$, one has*

$$H \sim N_{max} N_{min}. \tag{5.16}$$

Proof. Recall that

$$h(\xi) = \xi_1|\xi_1| + \xi_2|\xi_2| + \xi_3|\xi_3|.$$

By symmetry, we can assume $|\xi_3| \sim N_{min}$. This forces by (5.13) $\xi_1\xi_2 < 0$. Suppose for example $\xi_1 > 0$ and $\xi_2 < 0$ (the other case being similar). Then if $\xi_3 > 0$,

$$h(\xi) = \xi_1^2 - \xi_2^2 + \xi_3^2 = \xi_1^2 - (\xi_1 + \xi_3)^2 + \xi_3^2 = -2\xi_1\xi_3$$

and in this case $|h(\xi)| \sim N_{max}N_{min}$. Now if $\xi_3 < 0$, then

$$h(\xi) = \xi_1^2 - \xi_2^2 - \xi_3^2 = (\xi_2 + \xi_3)^2 - \xi_2^2 - \xi_3^2 = 2\xi_2\xi_3$$

and it follows again that $|h(\xi)| \sim N_{max}N_{min}$. □

We are now ready to state the fundamental dyadic blocks estimates for the Benjamin-Ono equation.

Proposition 5.1. *Let $N_1, N_2, N_3, H, L_1, L_2, L_3 > 0$ satisfying (5.14), (5.15), (5.16).*

1. *In the high modulation case $L_{max} \sim L_{med} \gg H$, we have*

$$(5.11) \lesssim L_{min}^{1/2} N_{min}^{1/2}. \tag{5.17}$$

2. *In the low modulation case $L_{max} \sim H$,*

   (a) *((++) coherence) if $N_{max} \sim N_{min}$, then*

$$(5.11) \lesssim L_{min}^{1/2} L_{med}^{1/4}, \tag{5.18}$$

   (b) *((+-) coherence) if $N_2 \sim N_3 \gg N_1$ and $H \sim L_1 \gtrsim L_2, L_3$, we have for any $\gamma > 0$*

$$(5.11) \lesssim L_{min}^{1/2} \min(N_{min}^{1/2}, N_{max}^{1/2-1/2\gamma} N_{min}^{-1/2\gamma} L_{med}^{1/2\gamma}). \tag{5.19}$$

   Similarly for permutations of the indexes $\{1, 2, 3\}$.

   (c) *In all other cases, the multiplier (5.12) vanishes.*

Proof. First we consider the high modulation case $L_{max} \sim L_{med} \gg H$. Suppose for the moment that $L_1 \geq L_2 \geq L_3$ and $N_1 \geq N_2 \geq N_3$. By using the comparison principle (Lemma 3.1 in [Tao01]), we have

$$(5.11) \lesssim \|\chi_{|\xi_3| \sim N_3} \chi_{|\lambda_3| \sim L_3}\|_{[3;\mathbb{R}\times\mathbb{R}]}.$$

By Lemma 3.14 and Lemma 3.6 in [Tao01],

$$(5.11) \lesssim \left\| \|\chi_{|\lambda_3| \sim L_3}\|_{[3;\mathbb{R}]} \chi_{|\xi_3| \sim N_3} \right\|_{[3;\mathbb{R}]} \lesssim L_3^{1/2} N_3^{1/2}.$$

It is clear from symmetry that (5.17) holds for any choice of L_j and N_j, $j = 1, 2, 3$.

Now we turn to the low modulation case $H \sim L_{max}$. Suppose for the moment that $N_1 \geq N_2 \geq N_3$. The ξ_3 variable is currently localized to the annulus $\{|\xi_3| \sim N_3\}$. By a finite partition of unity we can restrict it further to a ball $\{|\xi_3 - \xi_3^0| \ll N_3\}$ for some $|\xi_3^0| \sim N_3$. Then by box localization (Lemma 3.13 in [Tao01]) we may localize ξ_1, ξ_2 similarly to regions $\{|\xi_1 - \xi_1^0| \ll N_3\}$ and $\{|\xi_2 - \xi_2^0| \ll N_3\}$ where

$|\xi_j^0| \sim N_j$. We may assume that $|\xi_1^0 + \xi_2^0 + \xi_3^0| \ll N_3$ since we have $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 0$. We summarize this symmetrically as

$$(5.11) \lesssim \left\| \chi_{|h(\xi)|\sim H} \prod_{j=1}^{3} \chi_{|\xi_j - \xi_j^0| \ll N_{min}} \chi_{|\lambda_j| \sim L_j} \right\|_{[3;\mathbb{R}\times\mathbb{R}]}$$

for some ξ_j^0 satisfying

$$|\xi_j^0| \sim N_j \text{ for } j = 1,2,3; \quad |\xi_1^0 + \xi_2^0 + \xi_3^0| \ll N_{min}.$$

Without loss of generality, we assume $L_1 \geq L_2 \geq L_3$. By Lemma 3.6, Lemma 3.1 and Corollary 3.10 in [Tao01], we get

$$\begin{aligned}(5.11) &\lesssim \left\| \chi_{|h(\xi)|\sim H} \prod_{j=2}^{3} \chi_{|\xi_j - \xi_j^0| \ll N_{min}} \chi_{|\lambda_j| \sim L_j} \right\|_{[3;\mathbb{R}\times\mathbb{R}]} \\ &\lesssim |\{(\tau_2, \xi_2) : |\xi_2 - \xi_2^0| \ll N_{min}, |\tau_2 - h_2(\xi_2)| \sim L_2, \\ &\qquad |\xi - \xi_2 - \xi_3^0| \ll N_{min}, |\tau - \tau_2 - h_3(\xi - \xi_2)| \sim L_3\}|^{1/2}\end{aligned}$$

for some $(\tau, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. For fixed ξ_2, the set of possible τ_2 ranges in an interval of length $O(L_3)$ and vanishes unless

$$h_2(\xi_2) + h_3(\xi - \xi_2) = \tau + O(L_2).$$

On the other hand, inequality $|\xi - \xi_2 - \xi_3^0| \ll N_{min}$ implies $|\xi + \xi_1^0| \ll N_{min}$, hence

$$(5.11) \lesssim L_3^{1/2} |\Omega_\xi|^{1/2}$$

for some ξ such that $|\xi + \xi_1^0| \ll N_{min}$ (in particular $|\xi| \sim N_1$) and with

$$\Omega_\xi = \{\xi_2 : |\xi_2 - \xi_2^0| \ll N_{min}, h_2(\xi_2) + h_3(\xi - \xi_2) = \tau + O(L_2)\}.$$

Let us write $\Omega_\xi = \Omega_\xi^1 \cup \Omega_\xi^2$ with

$$\begin{aligned}\Omega_\xi^1 &= \{\xi_2 \in \Omega_\xi : \xi_2(\xi - \xi_2) > 0\} \\ \Omega_\xi^2 &= \{\xi_2 \in \Omega_\xi : \xi_2(\xi - \xi_2) < 0\}.\end{aligned}$$

We only need to consider the three cases $N_1 \sim N_2 \sim N_3$, $N_2 \sim N_3 \gg N_1$ and $N_1 \sim N_2 \gg N_3$ (the case $N_1 \sim N_3 \gg N_2$ follows by symmetry).

Estimate of $|\Omega_\xi^1|$: In Ω_ξ^1 we can assume $\xi_2 > 0$ and $\xi - \xi_2 > 0$ (the other case being similar). Then we have

$$h_2(\xi_2) + h_3(\xi - \xi_2) = \xi_2^2 + (\xi - \xi_2)^2 = 2\left(\xi_2 - \frac{\xi}{2}\right)^2 + \frac{\xi^2}{2}$$

and thus

$$2\left(\xi_2-\frac{\xi}{2}\right)^2+\frac{\xi^2}{2}=\tau+O(L_2). \tag{5.20}$$

If $N_1\sim N_2\sim N_3$, we see from (5.20) that ξ_2 variable is contained in the union of two intervals of length $O(L_2^{1/2})$ at worst. Therefore $|\Omega^1_\xi|\lesssim L_2^{1/2}$ in this case.
If $N_1\sim N_2\gg N_3$, then

$$\begin{aligned}\left|\left(\xi_2-\frac{\xi}{2}\right)+\frac{\xi_1^0}{2}\right| &\le \left|\xi_2-\xi_2^0-\frac{\xi+\xi_1^0}{2}-\xi_3^0\right|+|\xi_1^0+\xi_2^0+\xi_3^0|\\ &\le |\xi_2-\xi_2^0|+\frac{1}{2}|\xi+\xi_1^0|+|\xi_3^0|+|\xi_1^0+\xi_2^0+\xi_3^0|\\ &\lesssim N_3\end{aligned}$$

and we get $|\xi_2-\frac{\xi}{2}|\sim N_1$. From (5.20), we see that we must have $N_1^2=O(L_2)$, which is in contradiction with $L_2\lesssim L_1\sim N_{max}N_{min}$. We deduce that the multiplier vanishes in this region.
If $N_2\sim N_3\gg N_1$, then we obviously have $|\xi_2-\frac{\xi}{2}|\sim N_2$ and, in the same way, the multiplier vanishes.

Estimate of $|\Omega^2_\xi|$: We can assume $\xi_2>0$ and $\xi-\xi_2<0$. It follows that

$$h_2(\xi_2)+h_3(\xi-\xi_2)=\xi_2^2-(\xi-\xi_2)^2=2\xi\left(\xi_2-\frac{\xi}{2}\right)=\tau+O(L_2). \tag{5.21}$$

If $N_1\sim N_2\sim N_3$, we see from (5.21) that ξ_2 variable is contained in the union of two intervals of length $O(N_1^{-1}L_2)$ at worst. But we have $L_2\lesssim L_1\sim N_1^2$ and thus $|\Omega^2_\xi|\lesssim L_2^{1/2}$ in this region.
If $N_1\sim N_2\gg N_3$, we have $|\xi_2-\frac{\xi}{2}|\sim N_1$ as previously and thus $N_1^2=O(L_2)$, the multiplier vanishes.
If $N_2\sim N_3\gg N_1$, then $|\xi_2-\frac{\xi}{2}|\sim N_2$ and for any $\gamma>0$, we have $|\xi_2-\frac{\xi}{2}|\sim N_2^{1-\gamma}|\xi_2-\frac{\xi}{2}|^\gamma$. Therefore we see from (5.21) that ξ_2 variable is contained in the union of two intervals of length $O(N_2^{1-1/\gamma}N_1^{-1/\gamma}L_2^{1/\gamma})$ at worst, and from $|\xi_2-\xi_2^0|\ll N_{min}$ we see that $|\Omega^2_\xi|\lesssim N_{min}^{1/2}$, and (5.19) follows. □

3.2 Bilinear estimate

In this section we prove the following crucial bilinear estimate.

Theorem 5.4. *Let $1<\alpha\le 2$ and $s>-\alpha/4$. For all $T>0$, there exist $\delta,\nu>0$ such that for all $u,v\in X_\alpha^{1/2,s}$ with compact support (in time) in $[-T,+T]$,*

$$\|\partial_x(uv)\|_{X_\alpha^{-1/2+\delta,s}}\lesssim T^\nu\|u\|_{X_\alpha^{1/2,s}}\|v\|_{X_\alpha^{1/2,s}}. \tag{5.22}$$

To get the required contraction factor T^ν in our estimates, the next lemma is very useful (see [Ota06]).

Lemma 5.5. *Let $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ with compact support (in time) in $[-T, +T]$. For any $\theta > 0$, there exists $\nu = \nu(\theta) > 0$ such that*

$$\left\| \mathcal{F}^{-1}\Big(\frac{\widehat{f}(\tau,\xi)}{\langle \tau - \xi|\xi| \rangle^{\theta}} \Big) \right\|_{L^2_{xt}} \lesssim T^\nu \|f\|_{L^2_{xt}}.$$

Proof of Theorem 5.4. By duality, Plancherel and Lemma 5.5, it suffices to show that

$$\left\| \frac{\xi_3 \langle \xi_3\rangle^s \langle \xi_1\rangle^{-s} \langle \xi_2\rangle^{-s}}{\langle |\lambda_1| + |\xi_1|^\alpha\rangle^{1/2} \langle |\lambda_2| + |\xi_2|^\alpha\rangle^{1/2} \langle |\lambda_3| + |\xi_3|^\alpha\rangle^{1/2-\delta}} \right\|_{[3;\mathbb{R}\times\mathbb{R}]} \lesssim 1.$$

By a dyadic decomposition of the variables ξ_j, λ_j, $h(\xi)$, we may assume $|\xi_j| \sim N_j$, $|\lambda_j| \sim L_j$ and $|h(\xi)| \sim H$. By the translation invariance of the $[k, Z]$-multiplier norm, we can always restrict our estimate on $L_j \gtrsim 1$ and $N_{max} \gtrsim 1$. The comparison principle and orthogonality reduce our estimate to show that

$$\sum_{N_{max}\sim N_{med}\sim N} \sum_{L_1,L_2,L_3\gtrsim 1} \frac{N_3\langle N_3\rangle^s \langle N_1\rangle^{-s} \langle N_2\rangle^{-s}}{(L_1 + \langle N_1\rangle^\alpha)^{1/2} (L_2 + \langle N_2\rangle^\alpha)^{1/2} (L_3 + \langle N_3\rangle^\alpha)^{1/2-\delta}} \times \|X_{N_1,N_2,N_3,L_{max},L_1,L_2,L_3}\|_{[3;\mathbb{R}\times\mathbb{R}]} \tag{5.23}$$

and

$$\sum_{N_{max}\sim N_{med}\sim N} \sum_{L_{max}\sim L_{med}} \sum_{H \ll L_{max}} \frac{N_3\langle N_3\rangle^s \langle N_1\rangle^{-s} \langle N_2\rangle^{-s}}{(L_1 + \langle N_1\rangle^\alpha)^{1/2} (L_2 + \langle N_2\rangle^\alpha)^{1/2} (L_3 + \langle N_3\rangle^\alpha)^{1/2-\delta}} \times \|X_{N_1,N_2,N_3,H,L_1,L_2,L_3}\|_{[3;\mathbb{R}\times\mathbb{R}]} \tag{5.24}$$

are bounded, for all $N \gtrsim 1$.

We first show that (5.24) $\lesssim 1$. For $s > -1/2$, one has

$$N_3\langle N_3\rangle^s \langle N_1\rangle^{-s} \langle N_2\rangle^{-s} \lesssim \langle N_{min}\rangle^{-s} N_{max}$$

and we get from (5.17),

$$\begin{aligned}
(5.24) &\lesssim \sum_{N_{max}\sim N} \sum_{L_{max}\gg N N_{min}} \frac{\langle N_{min}\rangle^{-s} N L_{min}^{1/2} N_{min}^{1/2}}{L_{min}^{1/2} (L_{max} + N^\alpha)^{1/2-\delta} (L_{max} + \langle N_{min}\rangle^\alpha)^{1/2-\delta} L_{max}^{\delta}} \\
&\lesssim \sum_{N_{min}>0} \frac{N_{min}^{1/2} \langle N_{min}\rangle^{-s} N}{(N N_{min} + N^\alpha)^{1/2-\delta} (N N_{min} + \langle N_{min}\rangle^\alpha)^{1/2-\delta}}.
\end{aligned}$$

When $N_{min} \lesssim 1$, we get

$$\begin{aligned}
(5.24) &\lesssim \sum_{N_{min}\lesssim 1} \frac{N_{min}^{1/2} N}{N^{\alpha/2-\alpha\delta}(NN_{min})^{1/2-\delta}} \\
&\lesssim \sum_{N_{min}\lesssim 1} N_{min}^{\delta} N^{(1-\alpha)/2+\delta(\alpha+1)} \\
&\lesssim 1
\end{aligned}$$

for $\delta \ll 1$ and $\alpha > 1$. When $N_{min} \gtrsim 1$, then

$$\begin{aligned}
(5.24) &\lesssim \sum_{N_{min}\gtrsim 1} \frac{N_{min}^{1/2-s} N}{(NN_{min})^{1/2-\delta-\varepsilon} N^{\alpha\varepsilon}(NN_{min})^{1/2-\delta}} \\
&\lesssim \sum_{N_{min}\gtrsim 1} N_{min}^{-1/2-s+2\delta+\varepsilon} N^{2\delta-\varepsilon(\alpha-1)} \\
&\lesssim 1
\end{aligned}$$

for $\varepsilon = 2\delta/(\alpha-1) > 0$, $\delta \ll 1$ and $s > -1/2$.

Now we show that $(5.23) \lesssim 1$. We first deal with the contribution where (5.18) holds. In this case $N_{min} \sim N_{max}$ and we get

$$\begin{aligned}
(5.23) &\lesssim \sum_{L_{max}\sim N^2} \frac{N^{1-s} L_{min}^{1/2} L_{med}^{1/4}}{L_{min}^{1/2}(L_{med}+N^{\alpha})^{1/2}(L_{max}+N^{\alpha})^{1/2-2\delta} L_{max}^{\delta}} \\
&\lesssim \frac{N^{1-s}}{N^{\alpha/4} N^{1-4\delta}} \\
&\lesssim N^{-s-\alpha/4+4\delta} \lesssim 1
\end{aligned}$$

for $s > -\alpha/4$ and $\delta \ll 1$.

Now we consider the contribution where (5.19) applies. By symmetry it suffices to treat the two cases

$$\begin{aligned}
&N_1 \sim N_2 \gg N_3, \quad H \sim L_3 \gtrsim L_1, L_2, \\
&N_2 \sim N_3 \gg N_1, \quad H \sim L_1 \gtrsim L_2, L_3.
\end{aligned}$$

In the first case, estimate (5.19) applied with $\gamma = 1$ yields

$$(5.11) \lesssim L_{min}^{1/2} \min(N_3^{1/2}, N_3^{-1/2} L_{med}^{1/2}) \lesssim L_{min}^{1/2} N_3^{1/4} N_3^{-1/4} L_{med}^{1/4} \sim L_{min}^{1/2} L_{med}^{1/4}$$

and thus

$$\begin{aligned}
(5.23) &\lesssim \sum_{N_3>0}\sum_{L_{max}\sim NN_3} \frac{N_3\langle N_3\rangle^s N^{-2s} L_{min}^{1/2} L_{med}^{1/4}}{L_{min}^{1/2}(L_{med}+N^\alpha)^{1/2}(L_{max}+\langle N_{min}\rangle^\alpha)^{1/2-2\delta} L_{max}^\delta} \\
&\lesssim \sum_{N_3>0} \frac{N_3\langle N_3\rangle^s N^{-2s}}{N^{\alpha/4}(NN_3)^{1/2-2\delta}} \\
&\lesssim \sum_{N_3>0} N_3^{1/2+2\delta}\langle N_3\rangle^s N^{-2s-\alpha/4-1/2+2\delta}.
\end{aligned}$$

Since $-2s-\alpha/4-1/2+2\delta<0$, we may write

$$\begin{aligned}
(5.23) &\lesssim \sum_{N_3>0} N_3^{1/2+2\delta}\langle N_3\rangle^{-s-\alpha/4-1/2+2\delta} \\
&\lesssim \sum_{N_3\lesssim 1} N_3^{1/2+2\delta} + \sum_{N_3\gtrsim 1} N_3^{-s-\alpha/4+4\delta} \\
&\lesssim 1
\end{aligned}$$

for $\delta \ll 1$ and $s > -\alpha/4$.

Finally consider the case $N_2 \sim N_3 \gg N_1$, $H \sim L_1 \gtrsim L_2, L_3$. Let $0<\gamma\ll 1$. If we assume $N_{min}^{1/2} \lesssim N_{max}^{1/2-1/2\gamma} N_{min}^{-1/2\gamma} L_{med}^{1/2\gamma}$, i.e. $L_{med} \gtrsim N_{max}^{1-\gamma} N_{min}^{1+\gamma}$, then we get from (5.19) that

$$\begin{aligned}
(5.23) &\lesssim \sum_{N_1>0}\sum_{L_{max}\sim NN_1} \frac{\langle N_1\rangle^{-s} N L_{min}^{1/2} N_1^{1/2}}{L_{min}^{1/2}(L_{med}+N^\alpha)^{1/2-\delta} L_{max}^{1/2-\delta} L_{max}^\delta} \\
&\lesssim \sum_{N_1>0} \frac{N_1^{1/2}\langle N_1\rangle^{-s} N}{(N^{1-\gamma}N_1^{1+\gamma}+N^\alpha)^{1/2-\delta}(NN_1)^{1/2-\delta}} \\
&\lesssim \sum_{N_1>0} \frac{N_1^{\delta}\langle N_1\rangle^{-s} N^{1/2+\delta}}{(N^{1-\gamma}N_1^{1+\gamma}+N^\alpha)^{1/2-\delta}}.
\end{aligned}$$

If $N_1 \lesssim 1$, then

$$(5.23) \lesssim \sum_{N_1\lesssim 1} N_1^\delta N^{(1-\alpha)/2+\delta(1+\alpha)} \lesssim 1$$

for $\delta \ll 1$ and $\alpha > 1$. If $N_1 \gtrsim 1$, then

$$\begin{aligned}
(5.23) &\lesssim \sum_{N_1\gtrsim 1} \frac{N_1^{-s+\delta} N^{1/2+\delta}}{(N^{1-\gamma}N_1^{1+\gamma})^{1/2-\delta-\varepsilon} N^{\alpha\varepsilon}} \\
&\lesssim \sum_{N_1\gtrsim 1} N_1^{-s-1/2+(1+\gamma)(\delta+\varepsilon)+\delta-\gamma/2} N^{\gamma(1/2-\delta)+2\delta-\varepsilon(\alpha-1+\gamma)} \\
&\lesssim 1
\end{aligned}$$

for $\delta, \gamma \ll 1$, $s > -1/2$ and $\varepsilon = [2\delta + \gamma(1/2-\delta)]/(\alpha - 1 + \gamma) > 0$.
If we assume $N_{min}^{1/2} \gtrsim N_{max}^{1/2-1/2\gamma} N_{min}^{-1/2\gamma} L_{med}^{1/2\gamma}$, i.e. $L_{med} \lesssim N_{max}^{1-\gamma} N_{min}^{1+\gamma}$, we get

$$\begin{aligned}
(5.23) &\lesssim \sum_{N_1>0} \sum_{L_{max}\sim NN_1} \frac{\langle N_1\rangle^{-s} N L_{min}^{1/2} N^{1/2-1/2\gamma} N_1^{-1/2\gamma} L_{med}^{1/2\gamma}}{L_{min}^{1/2}(L_{med}+N^\alpha)^{1/2-\delta} L_{max}^{1/2-\delta} L_{max}^{\delta}} \\
&\lesssim \sum_{N_1>0} \sum_{L_{med}\lesssim N^{1-\gamma}N_1^{1+\gamma}} \frac{N_1^{-1/2\gamma-1/2+\delta}\langle N_1\rangle^{-s} N^{1-1/2\gamma+\delta} L_{med}^{1/2\gamma}}{(L_{med}+N^\alpha)^{1/2-\delta}}.
\end{aligned}$$

When $N_1 \lesssim 1$, we have

$$\begin{aligned}
(5.23) &\lesssim \sum_{N_1\lesssim 1} N_1^{-1/2\gamma-1/2+\delta} N^{1-1/2\gamma+\delta} N^{-\alpha/2+\alpha\delta} (N^{1-\gamma}N_1^{1+\gamma})^{1/2\gamma} \\
&\lesssim \sum_{N_1\lesssim 1} N_1^{\delta} N^{(1-\alpha)/2+\delta(1+\alpha)} \lesssim 1
\end{aligned}$$

for $\delta \ll 1$ and $\alpha > 1$. When $N_1 \gtrsim 1$, then

$$\begin{aligned}
(5.23) &\lesssim \sum_{N_1\gtrsim 1} N_1^{-s-1/2-1/2\gamma+\delta} N^{1-1/2\gamma+\delta} (N^{1-\gamma}N_1^{1+\gamma})^{1/2\gamma-1/2+\delta+\varepsilon} N^{-\alpha\varepsilon} \\
&\lesssim \sum_{N_1\gtrsim 1} N_1^{-s-1/2+(1+\gamma)(\delta+\varepsilon)+\delta-\gamma/2} N^{\gamma(1/2-\delta)+2\delta-\varepsilon(\alpha-1+\gamma)} \\
&\lesssim 1
\end{aligned}$$

as previously. This completes the proof of Theorem 5.4. □

4 Proof of Theorem 5.1

In this section, we sketch the proof of Theorem 5.1 (see for instance [MR02] for the details).

Actually, local existence of a solution is a consequence of the following modified version of Theorem 5.4.

Proposition 5.2. *Given $s_c^+ > -\alpha/4$, there exist $\nu, \delta > 0$ such that for any $s \geq s_c^+$ and any $u, v \in X_\alpha^{1/2,s}$ with compact support in $[-T, +T]$,*

$$\|\partial_x(uv)\|_{X_\alpha^{-1/2+\delta,s}} \lesssim T^\nu (\|u\|_{X_\alpha^{1/2,s_c^+}} \|v\|_{X_\alpha^{1/2,s}} + \|u\|_{X_\alpha^{1/2,s}} \|v\|_{X_\alpha^{1/2,s_c^+}}). \tag{5.25}$$

Estimate (5.25) is obtained thanks to (5.22) and the triangle inequality

$$\forall s \geq s_c^+,\ \langle\xi\rangle^s \leq \langle\xi\rangle^{s_c^+}\langle\xi_1\rangle^{s-s_c^+} + \langle\xi\rangle^{s_c^+}\langle\xi-\xi_1\rangle^{s-s_c^+}.$$

Let $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$ with $s > -\alpha/4$. Define $F(u)$ as

$$F(u) = \psi(t)\Big[S_\alpha(t)u_0 - \frac{\chi_{\mathbb{R}_+}(t)}{2}\int_0^t S_\alpha(t-t')\partial_x(\psi_T^2(t')u^2(t'))dt'\Big].$$

We shall prove that for $T \ll 1$, F is contraction in a ball of the Banach space

$$Z = \{u \in X_\alpha^{1/2,s} : \ \|u\|_Z = \|u\|_{X_\alpha^{1/2,s_c^+}} + \gamma\|u\|_{X_\alpha^{1/2,s}} < +\infty\},$$

where γ is defined for all nontrivial φ by

$$\gamma = \frac{\|\varphi\|_{H^{s_c^+}}}{\|\varphi\|_{H^s}}.$$

Combining (5.8), (5.9) as well as (5.25), it is easy to derive that

$$\|F(u)\|_Z \leq C(\|u_0\|_{H^{s_c^+}} + \gamma\|u_0\|_{H^s}) + CT^\nu\|u\|_Z^2$$

and

$$\|F(u) - F(v)\|_Z \leq CT^\nu\|u-v\|_Z\|u+v\|_Z$$

for some $C, \nu > 0$. Thus, taking $T = T(\|u_0\|_{H^{s_c^+}})$ small enough, we deduce that F is contractive on the ball of radius $4C\|u_0\|_{H^{s_c^+}}$ in Z. This proves the existence of a solution u to $u = F(u)$ in $X_{\alpha,T}^{1/2,s}$.

Following similar arguments of [MR02], it is not too difficult to see that if $u_1, u_2 \in X_{\alpha,T}^{1/2,s}$ are solutions to (5.7) and $0 < \delta < T/2$, then there exists $\nu > 0$ such that

$$\|u_1 - u_2\|_{X_{\alpha,\delta}^{1/2,s}} \lesssim T^\nu\big(\|u_1\|_{X_{\alpha,T}^{1/2,s}} + \|u_2\|_{X_{\alpha,T}^{1/2,s}}\big)\|u_1 - u_2\|_{X_{\alpha,\delta}^{1/2,s}},$$

which leads to $u_1 \equiv u_2$ on $[0,\delta]$, and then on $[0,T]$ by iteration. This proves the uniqueness of the solution.

It is straightforward to check that $S_\alpha(\cdot)u_0 \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+; H^s(\mathbb{R})) \cap \mathcal{C}(\mathbb{R}_+^*; H^\infty(\mathbb{R}))$. Then it follows from Theorem 5.4, Lemma 5.3 and the local existence of the solution that

$$u \in \mathcal{C}([0,T]; H^s(\mathbb{R})) \cap \mathcal{C}((0,T]; H^{s+\alpha\delta}(\mathbb{R}))$$

for some $T = T(\|u_0\|_{H^{s_c^+}})$. By induction, we have $u \in \mathcal{C}((0,T]; H^\infty(\mathbb{R}))$. Taking the L^2-scalar product of (dBO) with u, we obtain that $t \mapsto \|u(t)\|_{H^{s_c^+}}$ is nonincreasing on $(0,T]$. Since the existence time of the solution depends only on the norm $\|u_0\|_{H^{s_c^+}}$, this implies that the solution can be extended globally in time.

5 Ill-posedness results

This section is devoted to the proof of Theorems 5.2 and 5.3. We adopt the notation $p(\xi) = \xi|\xi|$.

Assume that u is a solution to (dBO) such that the solution map $u_0 \mapsto u$ is of class $\mathcal{C}^k$ ($k = 2$ or $k = 3$) at the origin from $H^s(\mathbb{R})$ to $H^s(\mathbb{R})$. The relation

$$F(u, \varphi) := u(t, \varphi) - S_\alpha(t)\varphi + \frac{1}{2}\int_0^t S_\alpha(t-t')\partial_x(u^2(t', \varphi))dt' \equiv 0$$

combined with implicit function theorem gives

$$\begin{aligned}
u_1(t,x) &:= \frac{\partial u}{\partial \varphi}(t,x,0)[h] = S_\alpha(t)h \\
u_2(t,x) &:= \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}(t,x,0)[h,h] = \int_0^t S_\alpha(t-t')\partial_x(u_1(t'))^2 dt' \\
u_3(t,x) &:= \frac{\partial^3 u}{\partial \varphi^3}(t,x,0)[h,h,h] = \int_0^t S_\alpha(t-t')\partial_x(u_1(t')u_2(t'))dt' \\
&\quad \text{etc}
\end{aligned}$$

Since the solution map is $\mathcal{C}^k$, we must have

$$\|u_k(t)\|_{H^s} \lesssim \|h\|_{H^s}^k, \quad \forall h \in H^s(\mathbb{R}). \tag{5.26}$$

In the sequel, we will show that (5.26) fails in the case $0 \le \alpha < 1$ and $k = 2$, and in the case $1 \le \alpha \le 2$, $k = 3$ and $s < -\alpha/4$.

5.1 The case $0 \le \alpha < 1$

It suffices to show the following lemma.

Lemma 5.6. *Let $0 \le \alpha < 1$ and $s \in \mathbb{R}$. There exists a sequence of functions $\{h_N\} \subset H^s(\mathbb{R})$ such that for all $T > 0$,*

$$\|h_N\|_{H^s} \lesssim 1,$$

and

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{[0,T]} \left\| \int_0^t S_\alpha(t-t')\partial_x(S_\alpha(t')h_N)^2 dt' \right\|_{H^s} = +\infty.$$

Proof. We define h_N by its Fourier transform[1]

$$\widehat{h_N}(\xi) = \gamma^{-1/2}\chi_{I_1}(\xi) + \gamma^{-1/2}N^{-s}\chi_{I_2}(\xi)$$

[1] As noticed in [MST01], h_N is not a real-valued function but the analysis works as well for $\Re e\, h_N$ instead of h_N.

with $I_1 = [\gamma/2, \gamma]$, $I_2 = [N, N+\gamma]$ and $N \gg 1$, $\gamma \ll N$ to be chosen later. Then it is clear that $\|h_N\|_{H^s} \sim 1$. Computing the Fourier transform of $u_2(t)$ leads to

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_x(u_2(t))(\xi) &= c\xi \int_0^t e^{i(t-t')p(\xi)} e^{-(t-t')|\xi|^\alpha} (e^{it'p(\xi)} e^{-t'|\xi|^\alpha} \widehat{h_N})^{*2}(\xi) dt' \\
&= c\xi e^{itp(\xi)} e^{-t|\xi|^\alpha} \int_{\mathbb{R}} \widehat{h_N}(\xi_1)\widehat{h_N}(\xi-\xi_1) \\
&\quad \times \int_0^t e^{it'(p(\xi_1)+p(\xi-\xi_1)-p(\xi))} e^{-t'(|\xi_1|^\alpha+|\xi-\xi_1|^\alpha-|\xi|^\alpha)} dt' d\xi_1 \\
&= c\xi e^{itp(\xi)} e^{-t|\xi|^\alpha} \int_{\mathbb{R}} \widehat{h_N}(\xi_1)\widehat{h_N}(\xi-\xi_1) \\
&\quad \times \frac{e^{it(p(\xi_1)+p(\xi-\xi_1)-p(\xi))} e^{-t(|\xi_1|^\alpha+|\xi-\xi_1|^\alpha-|\xi|^\alpha)} - 1}{i(p(\xi_1)+p(\xi-\xi_1)-p(\xi)) - (|\xi_1|^\alpha+|\xi-\xi_1|^\alpha-|\xi|^\alpha)} d\xi_1.
\end{aligned}$$

Set

$$\chi(\xi,\xi_1) = i(p(\xi_1)+p(\xi-\xi_1)-p(\xi)) - (|\xi_1|^\alpha+|\xi-\xi_1|^\alpha-|\xi|^\alpha).$$

By support considerations, we have $\|u_2(t)\|_{H^s} \geq \|v_2(t)\|_{H^s}$ with

$$\mathcal{F}_x(v_2(t))(\xi) = cN^{-s}\gamma^{-1}\xi e^{itp(\xi)} e^{-t|\xi|^\alpha} \int_{K_\xi} \frac{e^{t\chi(\xi,\xi_1)} - 1}{\chi(\xi,\xi_1)} d\xi_1 \tag{5.27}$$

and

$$K_\xi = \{\xi_1 : \xi_1 \in I_1, \xi-\xi_1 \in I_2\} \cup \{\xi_1 : \xi_1 \in I_2, \xi-\xi_1 \in I_1\}.$$

We easily see that if $\xi_1 \in K_\xi$, then $\xi \in [N+\gamma/2, N+2\gamma]$ and

$$p(\xi_1)+p(\xi-\xi_1)-p(\xi) = 2\xi_1(\xi_1-\xi) \sim \gamma N,$$

$$|\xi_1|^\alpha + |\xi-\xi_1|^\alpha - |\xi|^\alpha \lesssim N^\alpha.$$

We deduce that for $\gamma = N^{\alpha-1} \ll N$, we have $|\chi(\xi,\xi_1)| \sim N^\alpha$. Now define

$$t_N = (N+2\gamma)^{-\alpha-\varepsilon} \sim N^{-\alpha-\varepsilon}$$

so that $e^{-t_N|\xi|^\alpha} \gtrsim 1$. By a Taylor expansion of the exponential function,

$$\frac{e^{t_N\chi(\xi,\xi_1)} - 1}{\chi(\xi,\xi_1)} = t_N + R(t_N,\xi,\xi_1) \tag{5.28}$$

with

$$|R(t_N,\xi,\xi_1)| \lesssim \sum_{k\geq 2} \frac{t_N^k |\chi(\xi,\xi_1)|^{k-1}}{k!} \lesssim N^{-\alpha-2\varepsilon}.$$

Therefore the main contribution of (5.28) in (5.27) is given by t_N, and since $|K_\xi| \sim \gamma$, it follows that

$$\begin{aligned}|\mathcal{F}_x(v_2(t_N))(\xi)| &\gtrsim N^{-s+1}\gamma^{-1}e^{-(N+2\gamma)^{-\varepsilon}}\gamma N^{-\alpha-\varepsilon}\chi_{[N+\gamma/2,N+2\gamma]}(\xi)\\ &\gtrsim N^{-s+1-\alpha-\varepsilon}\chi_{[N+\gamma/2,N+2\gamma]}(\xi).\end{aligned}$$

We get the lower bound for the H^s-norm of $u_2(t_N)$

$$\|u_2(t_N)\|_{H^s} \gtrsim N^{-s+1-\alpha-\varepsilon}\Big(\int_{N+\gamma/2}^{N+2\gamma}(1+|\xi|^2)^s d\xi\Big)^{1/2} \sim N^{1-\alpha-\varepsilon}\gamma^{1/2} \sim N^{(1-\alpha)/2-\varepsilon},$$

which leads to

$$\lim_{N\to\infty}\sup_{[0,T]}\|u_2(t)\|_{H^s} = +\infty$$

for $\varepsilon \ll 1$ and $\alpha < 1$, as desired. □

5.2 The case $1 \le \alpha \le 2$

Let $1 \le \alpha \le 2$ and $s < -\alpha/4$. As previously, it suffices to find a suitable sequence $\{h_N\}$ such that $\|h_N\|_{H^s} \lesssim 1$ and

$$\lim_{N\to\infty}\sup_{[0,T]}\|u_3(t)\|_{H^s} = +\infty.$$

With this purpose, we define the real-valued function h_N by

$$\widehat{h_N}(\xi) = N^{-s}\gamma^{-1/2}(\chi_{I_N}(\xi) + \chi_{I_N}(-\xi)) \tag{5.29}$$

with $I_N = [N, N+2\gamma]$, $N \gg 1$ and $\gamma \ll N$ to be chosen later. We have

$$\mathcal{F}_x(u_3(t))(\xi) = c\xi\int_0^t e^{i(t-t')p(\xi)}e^{-(t-t')|\xi|^\alpha}\mathcal{F}_x(S_\alpha(t')h_N) * \mathcal{F}_x(u_2(t'))(\xi)dt'$$

and

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_x(S_\alpha(t')h_N) * \mathcal{F}_x(u_2(t'))(\xi) = c\int_{\mathbb{R}^2}&\widehat{h_N}(\xi_1)\widehat{h_N}(\xi_2-\xi_1)\widehat{h_N}(\xi-\xi_2)\xi_2\\ &\times e^{it'(p(\xi-\xi_2)+p(\xi_2))}e^{-t'(|\xi-\xi_2|^\alpha+|\xi_2|^\alpha)}\frac{e^{t\chi(\xi_2,\xi_1)}-1}{\chi(\xi_2,\xi_1)}d\xi_1 d\xi_2.\end{aligned}$$

Hence, we can write $u_3 = v_3 - w_3$ with

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_x(v_3(t))(\xi) &= c\xi e^{itp(\xi)}e^{-t|\xi|^\alpha}\int_{\mathbb{R}^2}\widehat{h_N}(\xi_1)\widehat{h_N}(\xi_2-\xi_1)\widehat{h_N}(\xi-\xi_2)\frac{\xi_2}{\chi(\xi_2,\xi_1)}\\ &\quad\times\int_0^t e^{it'(p(\xi_1)+p(\xi_2-\xi_1)+p(\xi-\xi_2)-p(\xi))}e^{-t(|\xi_1|^\alpha+|\xi_2-\xi_1|^\alpha+|\xi-\xi_2|^\alpha-|\xi|^\alpha)}dt'd\xi_1 d\xi_2\\ &= c\xi e^{itp(\xi)}e^{-t|\xi|^\alpha}\int_{\mathbb{R}^2}\widehat{h_N}(\xi_1)\widehat{h_N}(\xi_2-\xi_1)\widehat{h_N}(\xi-\xi_2)\frac{\xi_2}{\chi(\xi_2,\xi_1)}\frac{e^{t\lambda(\xi,\xi_1,\xi_2)}-1}{\lambda(\xi,\xi_1,\xi_2)}d\xi_1 d\xi_2\end{aligned}$$

and

$$\mathcal{F}_x(w_3(t))(\xi) = c\xi e^{itp(\xi)}e^{-t|\xi|^\alpha}\int_{\mathbb{R}^2}\widehat{h_N}(\xi_1)\widehat{h_N}(\xi_2-\xi_1)\widehat{h_N}(\xi-\xi_2)\frac{\xi_2}{\chi(\xi_2,\xi_1)}$$
$$\times\int_0^t e^{t'\chi(\xi,\xi_2)}dt'd\xi_1 d\xi_2$$
$$= c\xi e^{itp(\xi)}e^{-t|\xi|^\alpha}\int_{\mathbb{R}^2}\widehat{h_N}(\xi_1)\widehat{h_N}(\xi_2-\xi_1)\widehat{h_N}(\xi-\xi_2)\frac{\xi_2}{\chi(\xi_2,\xi_1)}\frac{e^{t\chi(\xi,\xi_2)}-1}{\chi(\xi,\xi_2)}d\xi_1 d\xi_2$$

where we set

$$\lambda(\xi,\xi_1,\xi_2) = i(p(\xi_1)+p(\xi_2-\xi_1)+p(\xi-\xi_2)-p(\xi))-(|\xi_1|^\alpha+|\xi_2-\xi_1|^\alpha+|\xi-\xi_2|^\alpha-|\xi|^\alpha).$$

Let $t_N = (N+4\gamma)^{-\alpha-\varepsilon}$ for some $0<\varepsilon\ll 1$. We get

$$|\mathcal{F}_x(v_3(t_N))(\xi)|\chi_{[N+3\gamma,N+4\gamma]}(\xi) \gtrsim N^{-3s+1}\gamma^{-3/2}\Big|\int_{K_\xi}\frac{\xi_2}{\chi(\xi_2,\xi_1)}\frac{e^{t_N\lambda(\xi,\xi_1,\xi_2)}-1}{\lambda(\xi,\xi_1,\xi_2)}d\xi_1, d\xi_2\Big|$$

where $K_\xi = K_\xi^1\cup K_\xi^2\cup K_\xi^3$ and

$$\begin{aligned}
K_\xi^1 &= \{(\xi_1,\xi_2): \xi_1\in I_N, \xi_2-\xi_1\in I_N, \xi-\xi_2\in -I_N\},\\
K_\xi^2 &= \{(\xi_1,\xi_2): \xi_1\in I_N, \xi_2-\xi_1\in -I_N, \xi-\xi_2\in I_N\},\\
K_\xi^3 &= \{(\xi_1,\xi_2): \xi_1\in -I_N, \xi_2-\xi_1\in I_N, \xi-\xi_2\in I_N\}.
\end{aligned}$$

If $\xi\in[N+3\gamma,N+4\gamma]$ and $(\xi_1,\xi_2)\in K_\xi$, we easily see that

$$\Big|\frac{\xi_2}{\chi(\xi_2,\xi_1)}\Big| \sim N^{-1}$$

and

$$p(\xi_1)+p(\xi_2-\xi_1)+p(\xi-\xi_2)-p(\xi)\sim\gamma^2,$$
$$|\xi_1|^\alpha+|\xi_2-\xi_1|^\alpha+|\xi-\xi_2|^\alpha-|\xi|^\alpha\sim N^\alpha.$$

Thus we are led to choose $\gamma = N^{\alpha/2}\ll N$ for $N\gg 1$ so that $|\lambda(\xi,\xi_1,\xi_2)|\sim N^\alpha$. Then it follows that

$$\Big|\frac{e^{t_N\lambda(\xi,\xi_1,\xi_2)}-1}{\lambda(\xi,\xi_1,\xi_2)}\Big| = |t_N| + O(N^{-\alpha-2\varepsilon}).$$

Consequently,

$$\begin{aligned}
|\mathcal{F}_x(v_3(t_N))(\xi)|\chi_{[N+3\gamma,N+4\gamma]}(\xi) &\gtrsim N^{-3s+1}\gamma^{-3/2}N^{-1}\gamma^2 N^{-\alpha-\varepsilon}\chi_{[N+3\gamma,N+4\gamma]}(\xi)\\
&\sim N^{-3s-\alpha-\varepsilon}\gamma^{1/2}\chi_{[N+3\gamma,N+4\gamma]}(\xi)\\
&\sim N^{-3s-3\alpha/4-\varepsilon}\chi_{[N+3\gamma,N+4\gamma]}(\xi),
\end{aligned}$$

since $|K_\xi| \sim \gamma^2$.

Concerning w_3, we verify that for $(\xi_1, \xi_2) \in K_\xi$, we have $|\chi(\xi, \xi_2)| \gtrsim \gamma N$ and then

$$\begin{aligned}|\mathcal{F}_x(w_3(t_N))(\xi)|\chi_{[N+3\gamma,N+4\gamma]}(\xi) &\lesssim N^{-3s+1}\gamma^{-3/2}\gamma^2 N^{-1}(\gamma N)^{-1}\chi_{[N+3\gamma,N+4\gamma]}(\xi)\\ &\sim N^{-3s-1}\gamma^{-1/2}\chi_{[N+3\gamma,N+4\gamma]}(\xi)\\ &\sim N^{-3s-1-\alpha/4}\chi_{[N+3\gamma,N+4\gamma]}(\xi)\end{aligned}$$

Since $-3s-1-\alpha/4 < -3s-3\alpha/4-\varepsilon$ for $\alpha < 2$, we deduce that the main contribution in the H^s-norm of u_3 is given by $\|v_3\|_{H^s}$, that is,

$$\|u_3(t_N)\|_{H^s} \gtrsim N^{-3s-3\alpha/4-\varepsilon}\gamma^{1/2}N^s \sim N^{-2s-\alpha/2-\varepsilon},$$

and we find the condition

$$-2s - \alpha/2 > 0, \quad \text{i.e.} \quad s < -\alpha/4.$$

When $\alpha = 2$, the contributions of v_3 and w_3 are equivalent, and we must proceed with a bit more care, by considering directly the difference $u_3 = v_3 - w_3$. More precisely, for $\gamma = \varepsilon N \ll N$, we have

$$|\lambda(\xi, \xi_1, \xi_2)| \sim |\chi(\xi, \xi_2)| \sim N^2.$$

Noticing that

$$\lambda(\xi, \xi_1, \xi_2) - \chi(\xi, \xi_2) = \chi(\xi_2, \xi_1),$$

we deduce

$$\Big|\frac{e^{t_N\lambda(\xi,\xi_1,\xi_2)}-1}{\lambda(\xi,\xi_1,\xi_2)} - \frac{e^{t_N\chi(\xi,\xi_2)}-1}{\chi(\xi,\xi_2)}\Big| = t_N^2|\chi(\xi_2,\xi_1)| + O(t_N^3N^2|\chi(\xi_2,\xi_1)|)$$

Setting again $t_N = N^{-2-\varepsilon}$, and since $|\xi_2| \sim N$, it follows that

$$|\mathcal{F}_x(u_3(t_N))(\xi)|\chi_{[N+3\gamma,N+4\gamma]} \gtrsim N^{-3s+1}\gamma^{-3/2}\gamma^2 N N^{-4-2\varepsilon}\chi_{[N+3\gamma,N+4\gamma]}(\xi)$$

and thus

$$\|u_3(t_N)\|_{H^s} \gtrsim N^{-2s-2-2\varepsilon}\gamma \sim N^{-2s-1-2\varepsilon},$$

which tends to infinity as soon as $-2s-1 > 0$, i.e. $s < -1/2$.

6 Appendix

We prove here that the pure dissipative equation

$$u_t + |D|^\alpha u + uu_x = 0 \tag{5.30}$$

for $1 < \alpha \le 2$ is well-posed in $H^s(\mathbb{R})$, $s > s_\alpha$ where

$$s_\alpha = \frac{3}{2} - \alpha,$$

and that the solution map fails to be smooth when $s < s_\alpha$. The method of proof is classical and is based on the smoothing properties of the generalized heat kernel

$$G_\alpha(t,x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi}e^{-t|\xi|^\alpha}d\xi, \quad t > 0.$$

Theorem 5.5. *Let $1 < \alpha \le 2$, $s > s_\alpha$ and $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$. Then there exist $T > 0$ and a unique solution $u \in \mathcal{C}([0,T]; H^s(\mathbb{R}))$ of (5.30) such that*

$$\sup_{t\in[0,T]} \|u(t)\|_{H^s} < \infty \quad \textit{if} \quad 1 < \alpha \le 3/2, \tag{5.31}$$

$$\sup_{t\in[0,T]} \|u(t)\|_{H^s} + \sup_{t\in[0,T]} t^\beta \|u(t)\|_{L^{2/(\alpha-1)}} < \infty \quad \textit{if} \quad 3/2 < \alpha \le 2 \tag{5.32}$$

where $\beta = -s/\alpha + (2-\alpha)/2\alpha$. The flow map $u_0 \mapsto u$ from $H^s(\mathbb{R})$ into the class defined by (5.31)-(5.32) is locally Lipschitz. Moreover, if $\|u_0\|_{H^s}$ is small enough, the solution can be extended to any time interval.

Proof. Observe that for any $p \in [1,\infty]$ and $\rho \ge 0$, we have

$$\||D|^\rho G_\alpha(t)\|_{L^p} = ct^{-(1-1/p)/\alpha - \rho/\alpha}. \tag{5.33}$$

We use the Picard iteration theorem to show that the map F defined as

$$F(u) = G_\alpha(t) * u_0 - \frac{1}{2}\int_0^t G_\alpha(t-t') * \partial_x u^2(t')dt'$$

has a fixed point in some suitable Banach space.

We first consider the case $1 < \alpha \le 3/2$, and we choose $s_\alpha < s < 1/2$. Set $X_T = \mathcal{C}([0,T]; H^s(\mathbb{R}))$ endowed with the norm $\|u\|_{X_T} = \sup_{[0,T]}\|u(t)\|_{H^s}$. By Young inequality and (5.33), we have

$$\|G_\alpha(t) * u_0\|_{H^s} \lesssim \|G_\alpha(t)\|_{L^1}\|u_0\|_{H^s} \lesssim \|u_0\|_{H^s}. \tag{5.34}$$

Using the fractional Leibniz rule, we get

$$\begin{aligned}\int_0^t \|G_\alpha(t-t') * \partial_x u^2(t')\|_{H^s}dt' &\lesssim \int_0^t \|\partial_x G_\alpha(t-t')\|_{L^{(s+\frac{1}{2})^{-1}}} \|\langle D\rangle^s u^2(t')\|_{L^{1/(1-s)}}dt' \\ &\lesssim \int_0^t (t-t')^{s/\alpha - 3/2\alpha}\|u(t')\|_{L^{(\frac{1}{2}-s)^{-1}}}\|u(t')\|_{H^s}dt'.\end{aligned}$$

Since $0 < s < 1/2$, we can take advantage of the Sobolev embedding $H^s(\mathbb{R}) \hookrightarrow L^{(\frac{1}{2}-s)^{-1}}(\mathbb{R})$. Since $s/\alpha - 3/2\alpha > -1$, we conclude

$$\int_0^t \|G_\alpha(t-t') * \partial_x u^2(t')\|_{H^s} dt' \lesssim T^\nu \|u\|_{X_T}^2 \tag{5.35}$$

with $\nu = 1 + s/\alpha - 3/2\alpha > 0$. Gathering (5.34) and (5.35) we infer

$$\|F(u)\|_{X_T} \lesssim \|u_0\|_{H^s} + T^\nu \|u\|_{X_T}^2$$

and in the same way,

$$\|F(u) - F(v)\|_{X_T} \lesssim T^\nu (\|u\|_{X_T} + \|v\|_{X_T}) \|u - v\|_{X_T}.$$

This proves that for $T \ll 1$, F is contractive in a ball of X_T.

Now we solve (5.30) in the case $3/2 < \alpha \leq 2$ and $s_\alpha < s < 0$. Define $Y_T = \mathcal{C}([0,T]; H^s(\mathbb{R})) \cap \mathcal{C}^\beta([0,T]; L^{2/(\alpha-1)}(\mathbb{R}))$ equipped with the norm

$$\|u\|_{Y_T} = \sup_{t\in[0,T]} \|u(t)\|_{H^s} + \sup_{t\in[0,T]} t^\beta \|u(t)\|_{L^{2/(\alpha-1)}}.$$

By Young inequality, we get

$$\|G_\alpha(t) * u_0\|_{L^{2/(\alpha-1)}} = \|\langle D\rangle^{-s} G_\alpha(t) * \langle D\rangle^s u_0\|_{L^{2/(\alpha-1)}} \lesssim \|\langle D\rangle^{-s} G_\alpha(t)\|_{L^{2/\alpha}} \|u_0\|_{H^s},$$

and it follows from (5.33) that

$$t^\beta \|\langle D\rangle^{-s} G_\alpha(t)\|_{L^{2/\alpha}} \lesssim t^\beta (t^{-(2-\alpha)/2\alpha} + t^{-(2-\alpha)/2\alpha + s/\alpha}) \lesssim \langle T\rangle^{-s/\alpha}.$$

Now we deal with the nonlinear term. Using the Sobolev embedding $L^{(\frac{1}{2}-s)^{-1}}(\mathbb{R}) \hookrightarrow H^s(\mathbb{R})$ valid for any $-1/2 < s < 0$, we obtain

$$\begin{aligned}
\int_0^t \|G_\alpha(t-t') * \partial_x u^2(t')\|_{H^s} dt' &\lesssim \int_0^t \|\partial_x G_\alpha(t-t')\|_{L^{(\frac{5}{2}-s-\alpha)^{-1}}} \|u^2(t')\|_{L^{1/(\alpha-1)}} dt' \\
&\lesssim \int_0^t (t-t')^{-s/\alpha - 1 + 1/2\alpha} t'^{-2\beta} t'^{2\beta} \|u(t')\|_{L^{2/(\alpha-1)}}^2 dt' \\
&\lesssim T^\nu \|u\|_{Y_T}^2
\end{aligned}$$

with $\nu = -s/\alpha + 1/2\alpha - 2\beta > 0$. By similar calculations, we get

$$\begin{aligned}
t^\beta \int_0^t \|G_\alpha(t-t') * \partial_x u^2(t')\|_{L^{2/(\alpha-1)}} dt' &\lesssim t^\beta \int_0^t \|\partial_x G_\alpha(t-t')\|_{L^{2/(3-\alpha)}} \|u^2(t')\|_{L^{1/(\alpha-1)}} dt' \\
&\lesssim t^\beta \int_0^t (t-t')^{-(\alpha+1)/2\alpha} t'^{-2\beta} dt' \|u\|_{Y_T}^2 \\
&\lesssim T^\nu \|u\|_{Y_T}^2
\end{aligned}$$

with $\nu = 1 - (\alpha+1)/2\alpha - \beta > 0$. Finally, one has

$$\|F(u)\|_{Y_T} \lesssim \langle T\rangle^\nu \|u_0\|_{H^s} + T^\nu \|u\|_{Y_T}^2$$

and the claim follows. $\square$

Remark 5.5. *Let* $U_\alpha(t) = \mathcal{F}_\xi^{-1}(e^{it\xi|\xi|}e^{-t|\xi|^\alpha})$ *be the fundamental solution of the linear (dBO) equation. Using that* $|\mathcal{F}_x U_\alpha(t)| = |\mathcal{F}_x G_\alpha(t)|$ *as well as the well-known estimate* $\|f\|_{L^p} \lesssim \|\hat{f}\|_{L^{p'}}$, $p \geq 2$, $1/p + 1/p' = 1$, *we easily check that Theorem 5.5 also holds for (dBO) equation.*

Finally, we show that Theorem 5.5 is sharp.

Theorem 5.6. *Let* $1 < \alpha \leq 2$ *and* $s < s_\alpha$. *Then the solution map* $u_0 \mapsto u$ *associated with (5.30) (if it exists) is not of class* $\mathcal{C}^2$ *from* $H^s(\mathbb{R})$ *to* $\mathcal{C}([0,T]; H^s(\mathbb{R}))$.

Proof. The proof is similar to that of Theorems 5.2 and 5.3. Define h_N as in (5.29) and consider the high-high interactions in the convolution product $(e^{-t|\xi|^\alpha}h_N) * (e^{-t|\xi|^\alpha}h_N)$. We get that for $\xi \in [2N, 2N+4\gamma]$, $\gamma = N^{1-\varepsilon}$ and $t_N \sim N^{-\alpha-\varepsilon}$,

$$|\mathcal{F}_x(u_2(t_N))(\xi)| \gtrsim N^{-2s-\alpha+1-\varepsilon}\chi_{[2N,2N+4\gamma]}(\xi)$$

where u_2 is defined by

$$u_2(t) = \int_0^t G_\alpha(t-t') * \partial_x(G_\alpha(t') * h_N)^2 dt'.$$

We conclude that

$$\|u_2(t_N)\|_{H^s} \gtrsim N^{-s-\alpha+1-\varepsilon}\gamma^{1/2} \gtrsim N^{-s+3/2-\alpha-3\varepsilon/2} \to +\infty$$

as soon as $s < 3/2 - \alpha$. □

Acknowledgments

The author wishes to express his gratitude to Francis Ribaud for his encouragement and precious advice.

Chapitre 6

Caractère bien posé des équations de KdV dissipatives

Cet article est consacré au caractère bien posé des équations KdV dissipatives $u_t + u_{xxx} + |D_x|^{2\alpha}u + uu_x = 0$, $0 < \alpha \leq 1$. Une estimation bilinéaire est obtenue dans des espaces de type Bourgain, ce qui implique le caractère globallement bien posé dans $H^s(\mathbb{R})$, $s > -3/4$ pour $\alpha \leq 1/2$ et $s > -3/(5-2\alpha)$ pour $\alpha > 1/2$.

Global well-posedness for dissipative Korteweg-de Vries equations

Stéphane Vento,
Université Paris-Est,
Laboratoire d'Analyse et de Mathématiques Appliquées,
5 bd. Descartes, Cité Descartes, Champs-Sur-Marne,
77454 Marne-La-Vallée Cedex 2, France

E-mail: stephane.vento@univ-paris-est.fr

Abstract. This paper is devoted to the well-posedness for dissipative KdV equations $u_t + u_{xxx} + |D_x|^{2\alpha}u + uu_x = 0$, $0 < \alpha \leq 1$. A bilinear estimate is obtained in Bourgain's type spaces, which provides global well-posedness in $H^s(\mathbb{R})$, $s > -3/4$ for $\alpha \leq 1/2$ and $s > -3/(5-2\alpha)$ for $\alpha > 1/2$.

Keywords: KdV-like equations, Bourgain spaces, Cauchy problem
AMS Classification: 35Q53, 35A05, 35M10

1 Introduction

We study the initial value problem (IVP) for the dissipative KdV equations

$$\begin{cases} u_t + u_{xxx} + |D_x|^{2\alpha}u + uu_x = 0, & t \in \mathbb{R}_+, x \in \mathbb{R}, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{6.1}$$

with $0 < \alpha \leq 1$ and where $|D_x|^{2\alpha}$ denotes the Fourier multiplier with symbol $|\xi|^{2\alpha}$. These equations can be viewed as a combinaison of the KdV equation

$$u_t + u_{xxx} + uu_x = 0 \tag{6.2}$$

and Burgers equation

$$u_t - u_{xx} + uu_x = 0, \tag{6.3}$$

involving both nonlinear dispersion and dissipation effects.

The Cauchy problem for the KdV equation has been studied by many authors. In [Bou93b], Bourgain introduced new functional spaces adapted to the linear symbol $\tau - \xi^3$ and showed that the IVP associated to (6.2) is locally well-posed in $L^2(\mathbb{R})$. Due to the second conservation law, this result extends globally in time. Then, working in these spaces, Kenig, Ponce and Vega obtained local well-posedness in Sobolev spaces $H^s(\mathbb{R})$ for $s > -5/8$ in [KPV93a] and for $s > -3/4$ in [KPV96]. More recently, global well-posedness was obtained for $s > -3/4$ in [CKS$^+$03]. It is worth noticing that the index $-3/4$ is far away from the index $-3/2$ suggested by standard scaling argument. However, $-3/4$ is indeed the critical index for well-posedness. In fact, the solution map $u_0 \mapsto u$ fails to be $\mathcal{C}^3$ in $H^s(\mathbb{R})$, $s < -3/4$ (see [Bou97]) and $\mathcal{C}^2$ in homogeneous spaces $\dot{H}^s(\mathbb{R})$, $s < -3/4$ (see [Tzv99]). Moreover, the bilinear estimate in $X^{b,s}$ spaces used in [KPV96] to prove local well-posedness is sharp with respect of s (see also [NTT01]).

Concerning the Cauchy problem for the Burgers equation, the situation is quite different. By using the strong smoothing effect of the semigroup related to the heat equation, one can solve (6.3) in the Sobolev space given by an heuristic scaling argument. In [Dix96], Dix proved local well-posedness of (6.3) in $H^s(\mathbb{R})$ for $s > -1/2$. Then, this result was extended to the case $s = -1/2$ in [Bek96]. Below this critical index, it has been showed in [Dix96] that uniqueness fails.

When $\alpha = 1/4$, equation (6.1) models the evolution of the free surface for shallow water waves damped by viscosity, see [OS70]. When $\alpha = 1$, (6.1) is the so-called KdV-Burgers equation which models the propagation of weakly nonlinear dispersive long waves in some contexts when dissipative effects occur (see [OS70]). In [MR01], Molinet and Ribaud treat the KdV-B equation by working in the usual Bourgain space related to the KdV equation, considering only the dispersive part of the equation. They were able to prove global well-posedness for KdV-B in $H^s(\mathbb{R})$, $s > -3/4 - 1/24$, getting a lower index than the critical indexes for (6.2) and (6.3). Then, the same authors improved this result in [MR02] by going down to $H^s(\mathbb{R})$, $s > -1$. The main new ingredient is the introduction of a new Bourgain space containing both dispersive and dissipative parts of the equation. For $s < -1$, the problem is ill-behaved in the sense that the flow map $u_0 \mapsto u$ is not $\mathcal{C}^2$ in $H^s(\mathbb{R})$.

Concerning the case $0 < \alpha < 1$ in (6.1), Molinet and Ribaud established in [MR01] the global well-posedness for data in $H^s(\mathbb{R})$, $s > -3/4$, whatever the value of α. On the other hand, ill-posedness is known for (6.1) in $\dot{H}^s(\mathbb{R})$, $s < (\alpha-3)/(2(2-\alpha))$, see [MR02].

In this paper we improve the results obtained in [MR01]. We show that the Cauchy problem (6.1) is globally well-posed in $H^s(\mathbb{R})$, $s > s_\alpha$ with

$$s_\alpha = \begin{cases} -3/4 & \text{if } 0 < \alpha \le 1/2, \\ -\frac{3}{5-2\alpha} & \text{if } 1/2 < \alpha \le 1 \end{cases} .$$

Of course the case $\alpha \leq 1/2$ is well-known, but our general proofs contain this result. In suitable $X^{b,s}$ spaces, we are going to perform a fixed point argument on the integral formulation of (6.1). This will be achieved by deriving a bilinear estimate in these spaces. By Plancherel's theorem and duality, it reduces to estimating a weighted convolution of L^2 functions. To recover the lost derivative in the nonlinear term $\partial_x(u^2)$, we take advantage of the well-known algebraic smoothing relation (6.13) combined with several methods. On one hand, we use Strichartz's type estimates and some techniques introduced in [KPV96]. On the other hand, these techniques are not sufficient in certain regions to go down below $-3/4$ and we are led to use a dyadic decomposition. In [Tao01], Tao studied some nonlinear dispersive equations like KdV, Schrödinger or wave equation by using such a dyadic decomposition and orthogonality. He obtained sharp estimates on dyadic blocs, which leads to multilinear estimates in the $X^{b,s}$ spaces, usable in many contexts. Note that very recently, such a method was exploited in [CLM07] for the dissipative modified-KdV equation $u_t + u_{xxx} + |D_x|^{2\alpha}u + u^2u_x = 0$.

1.1 Notations

For two positive reals A and B, we write $A \lesssim B$ if there exists a constant $C > 0$ such that $A \leq CB$. When this constant is supposed to be sufficiently small, we write $A \ll B$. Similarly, we use the notations $A \gtrsim B$, $A \sim B$ and $A \gg B$. When $x \in \mathbb{R}$, x^+ denotes its positive part $\max(0, x)$. For $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$, we define its Fourier transform $\mathcal{F}(f)$ (or $\widehat{f}$) by

$$\mathcal{F}f(\xi) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{-i\langle x,\xi\rangle} f(x)dx.$$

The Lebesgue spaces are endowed with the norm

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} = \Big(\int_{\mathbb{R}^N} |f(x)|^p dx\Big)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty$$

with the usual modification for $p = \infty$. We also consider the space-time Lebesgue spaces $L^p_x L^q_t$ defined by

$$\|f\|_{L^p_x L^q_t} = \Big\| \|f\|_{L^q_t(\mathbb{R})} \Big\|_{L^p_x(\mathbb{R})}.$$

For $b, s \in \mathbb{R}$, we define the Sobolev spaces $H^s(\mathbb{R})$ and their space-time versions $H^{b,s}(\mathbb{R}^2)$ by the norms

$$\|f\|_{H^s} = \Big(\int_{\mathbb{R}} \langle\xi\rangle^{2s} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi\Big)^{1/2},$$

$$\|u\|_{H^{b,s}} = \Big(\int_{\mathbb{R}^2} \langle\tau\rangle^{2b} \langle\xi\rangle^{2s} |\widehat{u}(\tau,\xi)|^2 d\tau d\xi\Big)^{1/2},$$

with $\langle\cdot\rangle = (1+|\cdot|^2)^{1/2}$.

Let $U(t)\varphi$ denote the solution of the Airy equation

$$\begin{cases} u_t + u_{xxx} = 0 \\ u(0) = \varphi \end{cases},$$

that is,

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \mathcal{F}_x(U(t)\varphi)(\xi) = \exp(i\xi^3 t)\widehat{\varphi}(\xi), \quad \varphi \in \mathcal{S}'.$$

In [MR02], Molinet and Ribaud introduced the function spaces $X_\alpha^{b,s}$ related to the linear symbol $i(\tau-\xi^3)+|\xi|^{2\alpha}$ and defined by the norm

$$\|u\|_{X_\alpha^{b,s}} = \left\|\langle i(\tau-\xi^3)+|\xi|^{2\alpha}\rangle^b \langle\xi\rangle^s \widehat{u}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}.$$

Note that since $\mathcal{F}(U(-t)u)(\tau,\xi) = \widehat{u}(\tau+\xi^3,\xi)$, we can re-express the norm of $X_\alpha^{b,s}$ as

$$\begin{aligned} \|u\|_{X_\alpha^{b,s}} &= \left\|\langle i\tau+|\xi|^{2\alpha}\rangle^b \langle\xi\rangle^s \widehat{u}(\tau+\xi^3,\xi)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \\ &= \left\|\langle i\tau+|\xi|^{2\alpha}\rangle^b \langle\xi\rangle^s \mathcal{F}(U(-t)u)(\tau,\xi)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \\ &\sim \|U(-t)u\|_{H^{b,s}} + \|u\|_{L_t^2 H_x^{s+2\alpha b}}. \end{aligned}$$

We will also work in the restricted spaces $X_{\alpha,T}^{b,s}$, $T \geq 0$, equipped with the norm

$$\|u\|_{X_{\alpha,T}^{b,s}} = \inf_{w \in X_\alpha^{b,s}} \{\|w\|_{X_\alpha^{b,s}},\ w(t) = u(t) \text{ on } [0,T]\}.$$

Finally, we denote by W_α the semigroup associated with the free evolution of (6.1),

$$\forall t \geq 0,\ \mathcal{F}_x(W_\alpha(t)\varphi)(\xi) = \exp[-|\xi|^{2\alpha}t + i\xi^3 t]\widehat{\varphi}(\xi),\ \varphi \in \mathcal{S}',$$

and we extend W_α to a linear operator defined on the whole real axis by setting

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \mathcal{F}_x(W_\alpha(t)\varphi)(\xi) = \exp[-|\xi|^{2\alpha}|t| + i\xi^3 t]\widehat{\varphi}(\xi),\ \varphi \in \mathcal{S}'. \tag{6.4}$$

1.2 Main results

Let us first state our crucial bilinear estimate.

Theorem 6.1. *Given $s > s_\alpha$, there exist $\nu, \delta > 0$ such that for any $u, v \in X_\alpha^{1/2,s}$ with compact support in $[-T,+T]$,*

$$\|\partial_x(uv)\|_{X_\alpha^{-1/2+\delta,s}} \lesssim T^\nu \|u\|_{X_\alpha^{1/2,s}} \|v\|_{X_\alpha^{1/2,s}}. \tag{6.5}$$

Let ψ be a cutoff function such that

$$\psi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}), \quad \operatorname{supp}\psi \subset [-2,2], \quad \psi \equiv 1 \text{ on } [-1,1],$$

and define $\psi_T(\cdot) = \psi(\cdot/T)$ for all $T > 0$. By Duhamel's principle, the solution to the problem (6.1) can be locally written in the integral form as

$$u(t) = \psi(t)\Big[W_\alpha(t)u_0 - \frac{\chi_{\mathbb{R}_+}(t)}{2}\int_0^t W_\alpha(t-t')\partial_x(\psi_T^2(t')u^2(t'))dt'\Big]. \tag{6.6}$$

Clearly, if u is a solution of (6.6) on $[-T,+T]$, then u solves (6.1) on $[0,T/2]$.

As a consequence of Theorem 6.1 together with linear estimates of Section 2.1, we obtain the following global well-posedness result.

Theorem 6.2. *Let $\alpha \in (0,1]$ and $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$ with $s > s_\alpha$. Then for any $T > 0$, there exists a unique solution u of (6.1) in*

$$Z_T = \mathcal{C}([0,T], H^s(\mathbb{R})) \cap X^{1/2,s}_{\alpha,T}.$$

Moreover, the map $u_0 \mapsto u$ is smooth from $H^s(\mathbb{R})$ to Z_T and u belongs to $\mathcal{C}((0,T], H^\infty(\mathbb{R}))$.

Remark 6.1. *Actually, we shall prove Theorems 6.1 and 6.2 in the most difficult case. In the sequel we assume*

$$\begin{cases} s_\alpha < s < -1/2 & \text{if } \alpha \le 1/2, \\ s_\alpha < s < -3/4 & \text{if } \alpha > 1/2. \end{cases} \tag{6.7}$$

Remark 6.2. *Theorem 6.2 is known to be sharp in the case $\alpha = 0$ (KdV equation) and in the case $\alpha = 1$ (KdV-B equation). On the other hand, as far as we know, most of nonlinear equations for which the multilinear estimate fails in the related $X^{b,s}$ space are ill-posed in H^s. Therefore it is reasonable to conjecture that s_α is really the critical index for (6.1). The fact that $s_\alpha = -3/4$ for $\alpha \le 1/2$ could mean that the dissipative part in (6.1), when becoming small enough, has no effect on the low regularity of the equation.*

Remark 6.3. *It is an interesting problem to consider the periodic dissipative KdV equation*

$$\begin{cases} u_t + u_{xxx} + |D_x|^{2\alpha}u + uu_x = 0, & t \in \mathbb{R}_+, x \in \mathbb{T}, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{T}, \end{cases} . \tag{6.8}$$

Concerning the KdV equation on $\mathbb{T}$, global well-posedness is known in $H^{1/2}(\mathbb{T})$ (see [CKS+03]) and the result is optimal (see [Bou97]). For KdV-B, it is established in [MR02] that the indexes of the critical spaces are the same on the real line and on the circle. We believe that working in the space $\widetilde{X}^{1/2,s}_\alpha$ endowed with the norm

$$\|u\|_{\widetilde{X}^{1/2,s}_\alpha} = \Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle n\rangle^{2s}\int_{\mathbb{R}} \langle i(\tau - n^3) + |n|^{2\alpha}\rangle |\widehat{u}(\tau,n)|^2 d\tau\Big)^{1/2},$$

and using Tao's $[k;Z]$-multiplier norm estimates [Tao01], one could get well-posedness results for the IVP (6.8) in $H^s(\mathbb{T})$, $s > \tilde{s}_\alpha$ with $\tilde{s}_0 = -1/2$ and $\tilde{s}_1 = -1$. We do not pursue this issue here.

The remainder of this paper is organized as follows. In Section 2, we recall some linear estimates on the operators W_α and L_α, and we introduce Tao's $[k;Z]$-multiplier norm estimates. Section 3 is devoted to the proof of the bilinear estimate (6.5). Finally, Theorem 6.2 is established in Section 4.

Acknowledgment

The author would like to express his gratitude to Francis Ribaud for his availability and his constant encouragements.

2 Preliminaries

2.1 Linear estimates

In this subsection, we collect together several linear estimates on the operators W_α introduced in (6.4) and L_α defined by

$$L_\alpha : f \mapsto \chi_{\mathbb{R}_+}(t)\psi(t)\int_0^t W_\alpha(t-t')f(t')dt'.$$

All the results stated here were proved in [MR02] for $\alpha = 1$ and in [CLM07] for the general case.

Lemma 6.1. *For all $s \in \mathbb{R}$ and all $\varphi \in H^s(\mathbb{R})$,*

$$\|\psi(t)W_\alpha(t)\varphi\|_{X_\alpha^{1/2,s}} \lesssim \|\varphi\|_{H^s}. \tag{6.9}$$

Lemma 6.2. *Let $s \in \mathbb{R}$.*

(a) For all $v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$,

$$\begin{aligned}&\Big\|\chi_{\mathbb{R}_+}(t)\psi(t)\int_0^t W_\alpha(t-t')v(t')dt'\Big\|_{X_\alpha^{1/2,s}} \\ &\quad\lesssim \|v\|_{X_\alpha^{-1/2,s}} + \Big(\int_{\mathbb{R}}\langle\xi\rangle^{2s}\Big(\int_{\mathbb{R}}\tfrac{|\widehat{v}(\tau+\xi^3,\xi)|}{\langle i\tau+|\xi|^{2\alpha}\rangle}d\tau\Big)d\xi\Big)^{1/2}.\end{aligned}$$

(b) For all $0 < \delta < 1/2$ and all $v \in X_\alpha^{-1/2+\delta,s}$,

$$\Big\|\chi_{\mathbb{R}_+}(t)\psi(t)\int_0^t W_\alpha(t-t')v(t')dt'\Big\|_{X_\alpha^{1/2,s}} \lesssim \|v\|_{X_\alpha^{-1/2+\delta,s}}. \tag{6.10}$$

To globalize our solution, we will need the next lemma.

Lemma 6.3. *Let $s \in \mathbb{R}$ and $\delta > 0$. Then for any $f \in X_\alpha^{-1/2+\delta,s}$,*

$$t \longmapsto \int_0^t W_\alpha(t-t')f(t')dt' \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, H^{s+2\alpha\delta}).$$

Moreover, if (f_n) is a sequence satisfying $f_n \to 0$ in $X_\alpha^{-1/2+\delta,s}$, then

$$\Big\| \int_0^t W_\alpha(t-t')f_n(t')dt' \Big\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+,H^{s+2\alpha\delta})} \longrightarrow 0.$$

Finally, we recall the following L^4 Strichartz's type estimate showed in [KPV93a, MR01].

Lemma 6.4. *Let $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ with compact support (in time) in $[-T,+T]$. For $0 \leq \theta \leq 1/8$ and $\rho > 3/8$, there exists $\nu > 0$ such that*

$$\Big\| \mathcal{F}^{-1}\Big(\frac{\langle \xi \rangle^\theta \widehat{f}(\tau,\xi)}{\langle \tau - \xi^3 \rangle^\rho} \Big) \Big\|_{L^4_{xt}} \lesssim T^\nu \|f\|_{L^2_{xt}}.$$

2.2 Tao's $[k;Z]$-multipliers

Now we turn to Tao's $[k;Z]$-multiplier norm estimates. For more details, please refer to [Tao01].

Let Z be any abelian additive group with an invariant measure $d\xi$. For any integer $k \geq 2$ we define the hyperplane

$$\Gamma_k(Z) = \{(\xi_1,...,\xi_k) \in Z^k : \xi_1 + ... + \xi_k = 0\}$$

which is endowed with the measure

$$\int_{\Gamma_k(Z)} f = \int_{Z^{k-1}} f(\xi_1,...,\xi_{k-1}, -(\xi_1+...+\xi_{k-1}))d\xi_1...d\xi_{k-1}.$$

A $[k;Z]$-multiplier is defined to be any function $m : \Gamma_k(Z) \to \mathbb{C}$. The multiplier norm $\|m\|_{[k;Z]}$ is defined to be the best constant such that the inequality

$$\Big| \int_{\Gamma_k(Z)} m(\xi) \prod_{j=1}^k f_j(\xi_j) \Big| \leq \|m\|_{[k;Z]} \prod_{j=1}^k \|f_j\|_{L^2(Z)} \tag{6.11}$$

holds for all test functions $f_1,...,f_k$ on Z. In other words,

$$\|m\|_{[k;Z]} = \sup_{\substack{f_j \in \mathcal{S}(Z) \\ \|f_j\|_{L^2(Z)} \leq 1}} \Big| \int_{\Gamma_k(Z)} m(\xi) \prod_{j=1}^k f_j(\xi_j) \Big|.$$

In his paper [Tao01], Tao used the following notations. Capitalized variables N_j, L_j $(j = 1, ..., k)$ are presumed to be dyadic, i.e. range over numbers of the form 2^ℓ, $\ell \in \mathbb{Z}$. In this paper, we only consider the case $k = 3$, which corresponds to the quadratic nonlinearity in the equation. It will be convenient to define the quantities $N_{max} \geq N_{med} \geq N_{min}$ to be the maximum, median and minimum of N_1, N_2, N_3 respectively. Similarly, define $L_{max} \geq L_{med} \geq L_{min}$ whenever $L_1, L_2, L_3 > 0$. The quantities N_j will measure the magnitude of frequencies of our waves, while L_j measures how closely our waves approximate a free solution.

Here we consider $[3, \mathbb{R} \times \mathbb{R}]$-multipliers and we parameterize $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ by (τ, ξ) endowed with the Lebesgue measure $d\tau d\xi$. If τ, τ_1, ξ, ξ_1 are given, we set

$$\sigma = \sigma(\tau, \xi) = \tau - \xi^3, \quad \sigma_1 = \sigma(\tau_1, \xi_1), \quad \sigma_2 = \sigma(\tau - \tau_1, \xi - \xi_1). \tag{6.12}$$

From the identity $\sigma_1 + \sigma_2 - \sigma = 3\xi\xi_1(\xi - \xi_1)$ one can deduce the well-known smoothing relation

$$\max(|\sigma|, |\sigma_1|, |\sigma_2|) \geq |\xi\xi_1(\xi - \xi_1)| \tag{6.13}$$

which will be extensively used in Section 3.

By a dyadic decomposition of the variables ξ_1, $\xi_2 = -\xi$, $\xi_3 = \xi - \xi_1$, and σ_1, σ_2, $\sigma_3 = -\sigma$, we are led to consider

$$\Big\| \prod_{j=1}^{3} \chi_{|\xi_j| \sim N_j} \chi_{|\sigma_j| \sim L_j} \Big\|_{[3; \mathbb{R} \times \mathbb{R}]}. \tag{6.14}$$

We can now state the fundamental dyadic estimates for the KdV equation on the real line ([Tao01], Proposition 6.1).

Lemma 6.5. *Let $N_1, N_2, N_3, L_1, L_2, L_3$ satisfying*

$$N_{max} \sim N_{med},$$

$$L_{max} \sim \max(N_1 N_2 N_3, L_{med}).$$

1. *((++) Coherence) If $N_{max} \sim N_{min}$ and $L_{max} \sim N_1 N_2 N_3$ then we have*

$$(6.14) \lesssim L_{min}^{1/2} N_{max}^{-1/4} L_{med}^{1/4}. \tag{6.15}$$

2. *((+-) Coherence) If $N_2 \sim N_3 \gg N_1$ and $N_1 N_2 N_3 \sim L_1 \gtrsim L_2, L_3$ then*

$$(6.14) \lesssim L_{min}^{1/2} N_{max}^{-1} \min\left(N_1 N_2 N_3, \frac{N_{max}}{N_{min}} L_{med}\right)^{1/2}. \tag{6.16}$$

   Similarly for permutations.

3. *In all other cases, we have*

$$(6.14) \lesssim L_{min}^{1/2} N_{max}^{-1} \min(N_1 N_2 N_3, L_{med})^{1/2}. \tag{6.17}$$

Because only one region needs to be controlled by using a dyadic approach, we just require the (+-) coherence case.

3 Bilinear estimate

In this section, we derive the bilinear estimate (6.5). To get the required contraction factor T^ν in our estimates, the next lemma is very useful (see [GTV97]).

Lemma 6.6. *Let $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ with compact support (in time) in $[-T,+T]$. For any $\theta>0$, there exists $\nu=\nu(\theta)>0$ such that*

$$\Big\|\mathcal{F}^{-1}\Big(\frac{\widehat{f}(\tau,\xi)}{\langle \tau-\xi^3\rangle^\theta}\Big)\Big\|_{L^2_{xt}} \lesssim T^\nu \|f\|_{L^2_{xt}}.$$

We will also need the following elementary calculus inequalities.

Lemma 6.7. *(a) For $b,b' \in]\frac14,\frac12[$ and $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$,*

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{\langle x-\alpha\rangle^{2b}\langle x-\beta\rangle^{2b'}} \lesssim \frac{1}{\langle \alpha-\beta\rangle^{2b+2b'-1}}. \tag{6.18}$$

(b) For $b,b' \in]\frac14,\frac12[$ and $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$,

$$\int_{|x|\le|\beta|} \frac{dx}{\langle x\rangle^{2b+2b'-1}\sqrt{|\alpha-x|}} \lesssim \frac{\langle\beta\rangle^{2(1-b-b')}}{\langle\alpha\rangle^{1/2}}. \tag{6.19}$$

Proof of Theorem 6.1: By duality, (6.5) is equivalent to

$$\Big|\int_{\mathbb{R}^2} \partial_x(uv)w\Big| \lesssim T^\nu \|w\|_{X_\alpha^{1/2-\delta,-s}}\|u\|_{X_\alpha^{1/2,s}}\|v\|_{X_\alpha^{1/2,s}}$$

for all $w\in X_\alpha^{1/2,s}$, and setting

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(\tau,\xi) &= \langle i(\tau-\xi^3)+|\xi|^{2\alpha}\rangle^{1/2}\langle\xi\rangle^s\widehat{u}(\tau,\xi),\\
\widehat{g}(\tau,\xi) &= \langle i(\tau-\xi^3)+|\xi|^{2\alpha}\rangle^{1/2}\langle\xi\rangle^s\widehat{v}(\tau,\xi),\\
\widehat{h}(\tau,\xi) &= \langle i(\tau-\xi^3)+|\xi|^{2\alpha}\rangle^{1/2-\delta}\langle\xi\rangle^{-s}\widehat{w}(\tau,\xi),
\end{aligned}$$

it is equivalent to show that

$$I=\int_{\mathbb{R}^4} K(\tau,\tau_1,\xi,\xi_1)\widehat{h}(\tau,\xi)\widehat{f}(\tau_1,\xi_1)\widehat{g}(\tau-\tau_1,\xi-\xi_1)d\tau d\tau_1 d\xi d\xi_1 \lesssim T^\nu\|f\|_{L^2_{xt}}\|g\|_{L^2_{xt}}\|h\|_{L^2_{xt}}$$

with

$$K=\frac{|\xi|\langle\xi\rangle^s}{\langle i\sigma+|\xi|^{2\alpha}\rangle^{1/2-\delta}}\frac{\langle\xi_1\rangle^{-s}}{\langle i\sigma_1+|\xi_1|^{2\alpha}\rangle^{1/2}}\frac{\langle\xi-\xi_1\rangle^{-s}}{\langle i\sigma_2+|\xi-\xi_1|^{2\alpha}\rangle^{1/2}}.$$

By Fubini's theorem, we can always assume $\widehat{f}, \widehat{g}, \widehat{h} \geq 0$. By symmetry, one can reduce the integration domain of I to $\Omega = \{(\tau, \tau_1, \xi, \xi_1) \in \mathbb{R}^4, |\sigma_1| \geq |\sigma_2|\}$. Split Ω into four regions,

$$\begin{aligned}
\Omega_1 &= \{(\tau, \tau_1, \xi, \xi_1) \in \Omega : |\xi_1| \leq 1, |\xi - \xi_1| \leq 1\}, \\
\Omega_2 &= \{(\tau, \tau_1, \xi, \xi_1) \in \Omega : |\xi_1| \leq 1, |\xi - \xi_1| \geq 1\}, \\
\Omega_3 &= \{(\tau, \tau_1, \xi, \xi_1) \in \Omega : |\xi_1| \geq 1, |\xi - \xi_1| \leq 1\}, \\
\Omega_4 &= \{(\tau, \tau_1, \xi, \xi_1) \in \Omega : |\xi_1| \geq 1, |\xi - \xi_1| \geq 1\}.
\end{aligned}$$

Estimate in Ω_1

Using Cauchy-Schwarz inequality and Lemma 6.6, we easily obtain

$$\begin{aligned}
I_1 \lesssim \sup_{\tau,\xi} \Big[& \frac{|\xi|\langle\xi\rangle^s}{\langle i\sigma + |\xi|^{2\alpha}\rangle^{1/2-\delta/2}} \Big(\int_{\widetilde{\Omega}_1} \frac{\langle\xi_1\rangle^{-2s}\langle\xi-\xi_1\rangle^{-2s}}{\langle i\sigma_1 + |\xi_1|^{2\alpha}\rangle\langle i\sigma_2 + |\xi-\xi_1|^{2\alpha}\rangle} d\tau_1 d\xi_1 \Big)^{1/2} \Big] \\
& \times T^\nu \|f\|_{L^2_{xt}} \|g\|_{L^2_{xt}} \|h\|_{L^2_{xt}}
\end{aligned} \tag{6.20}$$

with $\widetilde{\Omega}_1 = \{(\tau_1, \xi_1) : \exists \tau, \xi \in \mathbb{R}, (\tau, \tau_1, \xi, \xi_1) \in \Omega_1\}$.
In Ω_1, one has $|\xi| \leq 2$ and thus if K_1 denotes the term between brackets in (6.20),

$$K_1 \;\lesssim\; \Big(\int_{\widetilde{\Omega}_1} \frac{d\tau_1 d\xi_1}{\langle\sigma_1\rangle\langle\sigma_2\rangle} \Big)^{1/2} \lesssim \Big(\int_{|\xi_1|\leq 1} \Big(\int_{\mathbb{R}} \frac{d\tau_1}{\langle\sigma_2\rangle^2} \Big) d\xi_1 \Big)^{1/2} \lesssim 1.$$

Estimate in Ω_2

We split Ω_2 into

$$\begin{aligned}
\Omega_{21} &= \{(\tau, \tau_1, \xi, \xi_1) \in \Omega_2 : |\sigma| \geq |\sigma_1|\}, \\
\Omega_{22} &= \{(\tau, \tau_1, \xi, \xi_1) \in \Omega_2 : |\sigma_1| \geq |\sigma|\}.
\end{aligned}$$

Estimate in Ω_{21}: Note that in this region, $|\xi - \xi_1| \sim \langle\xi - \xi_1\rangle$ and $\langle\xi\rangle \gtrsim \langle\xi - \xi_1\rangle$. Thus using (6.20) as well as (6.13), it follows that

$$\begin{aligned}
K_{21} &\lesssim \langle\xi\rangle^{1/2+s+\delta/2} \Big(\int_{\widetilde{\Omega}_{21}} \frac{\langle\xi-\xi_1\rangle^{-2s-1+\delta}}{|\xi_1|^{1-\delta}\langle\sigma_1\rangle\langle\sigma_2\rangle^\varepsilon\langle\xi-\xi_1\rangle^{2\alpha(1-\varepsilon)}} d\tau_1 d\xi_1 \Big)^{1/2} \\
&\lesssim \Big(\int_{|\xi_1|\leq 1} \frac{\langle\xi-\xi_1\rangle^{-2\alpha(1-\varepsilon)+2\delta}}{|\xi_1|^{1-\delta}} \Big(\int_{\mathbb{R}} \frac{d\tau_1}{\langle\sigma_1\rangle\langle\sigma_2\rangle^\varepsilon} \Big) d\xi_1 \Big)^{1/2} \\
&\lesssim \Big(\int_{|\xi_1|\leq 1} \frac{d\xi_1}{|\xi_1|^{1-\delta}} \Big)^{1/2} \\
&\lesssim 1.
\end{aligned}$$

Estimate in Ω_{22}: By similar arguments, we estimate

$$\begin{aligned}
K_{22} &\lesssim \frac{|\xi|\langle\xi\rangle^s}{\langle\xi\rangle^{\alpha(1-\delta)}}\Big(\int_{\widetilde{\Omega}_{22}} \frac{\langle\xi-\xi_1\rangle^{-2s}}{|\xi\xi_1(\xi-\xi_1)|^{1-\varepsilon}\langle\sigma_1\rangle^{\varepsilon}\langle\sigma_2\rangle} d\tau_1 d\xi_1\Big)^{1/2}\\
&\lesssim \langle\xi\rangle^{1/2+s-\alpha(1-\delta)+\varepsilon/2}\Big(\int_{|\xi_1|\le 1} \frac{\langle\xi-\xi_1\rangle^{-2s-1+\varepsilon}}{|\xi_1|^{1-\varepsilon}} d\xi_1\Big)^{1/2}\\
&\lesssim \langle\xi\rangle^{-\alpha(1-\delta)+\varepsilon}\\
&\lesssim 1.
\end{aligned}$$

Estimate in Ω_3
By symmetry, the desired bound in this region can be obtained in the same way.
Estimate in Ω_4
Divide Ω_4 into

$$\begin{aligned}
\Omega_{41} &= \{(\tau,\tau_1,\xi,\xi_1)\in\Omega_4 : |\sigma_1|\ge|\sigma|\},\\
\Omega_{42} &= \{(\tau,\tau_1,\xi,\xi_1)\in\Omega_4 : |\sigma|\ge|\sigma_1|\}.
\end{aligned}$$

Estimate in Ω_{41}
We write $\Omega_{41}=\Omega_{411}\cup\Omega_{412}\cup\Omega_{413}$ with

$$\begin{aligned}
\Omega_{411} &= \{(\tau,\tau_1,\xi,\xi_1)\in\Omega_{41} : |\xi_1|\le 100|\xi|\},\\
\Omega_{412} &= \{(\tau,\tau_1,\xi,\xi_1)\in\Omega_{41} : |\xi_1|\ge 100|\xi|, 3|\xi\xi_1(\xi-\xi_1)|\le \frac{1}{2}|\sigma_1|\},\\
\Omega_{413} &= \{(\tau,\tau_1,\xi,\xi_1)\in\Omega_{41} : |\xi_1|\ge 100|\xi|, 3|\xi\xi_1(\xi-\xi_1)|\ge \frac{1}{2}|\sigma_1|\}.
\end{aligned}$$

Estimate in Ω_{411}: We have $\langle\xi_1\rangle\lesssim\langle\xi\rangle$ and $\langle\xi-\xi_1\rangle\lesssim\langle\xi\rangle$ thus with (6.13), we deduce for $0<\lambda<1$,

$$\begin{aligned}
K_{411} &\lesssim \frac{\langle\xi\rangle^{1/2+s}}{\langle\sigma\rangle^{\lambda/2}\langle\xi\rangle^{\alpha(1-\lambda-2\delta)}}\langle\xi_1\rangle^{-s-1/2}\frac{\langle\xi-\xi_1\rangle^{-s-1/2}}{\langle\sigma_2\rangle^{\lambda/2}\langle\xi-\xi_1\rangle^{\alpha(1-\lambda)}}\\
&\lesssim \frac{\langle\xi\rangle^{[-s/2-1/4-\alpha(1-\lambda-\delta)]^+}}{\langle\sigma\rangle^{\lambda/2}}\frac{\langle\xi-\xi_1\rangle^{[-s/2-1/4-\alpha(1-\lambda-\delta)]^+}}{\langle\sigma_2\rangle^{\lambda/2}}.
\end{aligned}$$

Consequently, using Plancherel's theorem and Hölder inequality,

$$\begin{aligned}
I_{411} &\lesssim \int_{\mathbb{R}^2}\mathcal{F}^{-1}\Big(\frac{\langle\xi\rangle^{[-s/2-1/4-\alpha(1-\lambda-\delta)]^+}\widehat{h}}{\langle\sigma\rangle^{\lambda/2}}\Big)\mathcal{F}^{-1}(\widehat{f})\mathcal{F}^{-1}\Big(\frac{\langle\xi\rangle^{[-s/2-1/4-\alpha(1-\lambda-\delta)]^+}\widehat{g}}{\langle\sigma\rangle^{\lambda/2}}\Big)dtdx\\
&\lesssim \Big\|\mathcal{F}^{-1}\Big(\frac{\langle\xi\rangle^{[-s/2-1/4-\alpha(1-\lambda-\delta)]^+}\widehat{h}}{\langle\sigma\rangle^{\lambda/2}}\Big)\Big\|_{L^4_{xt}}\|f\|_{L^2_{xt}}\Big\|\mathcal{F}^{-1}\Big(\frac{\langle\xi\rangle^{[-s/2-1/4-\alpha(1-\lambda-\delta)]^+}\widehat{g}}{\langle\sigma\rangle^{\lambda/2}}\Big)\Big\|_{L^4_{xt}}.
\end{aligned}$$

Now we choose $\lambda=3/4+\delta$ so that $\lambda/2>3/8$ and for $s>-3/4-\alpha/2$ and $\delta>0$ small enough,

$$-\frac{s}{2}-\frac{1}{4}-\alpha(1-\lambda-\delta)=\frac{1}{8}-\frac{1}{2}\big(s+\frac{3}{4}+\frac{\alpha}{2}\big)+2\alpha\delta\le\frac{1}{8}.$$

Hence with help of Lemma 6.4, $I_{411} \lesssim T^{\nu}\|f\|_{L^2_{xt}}\|g\|_{L^2_{xt}}\|h\|_{L^2_{xt}}$.

Estimate in Ω_{412}: Using the same arguments that for (6.20), we show that

$$I_{412} \lesssim \sup_{\tau_1,\xi_1}\Big[\frac{\langle\xi_1\rangle^{-s}}{\langle i\sigma_1+|\xi_1|^{2\alpha}\rangle^{1/2}}\Big(\int_{\widetilde{\Omega}_{412}}\frac{|\xi|^2\langle\xi\rangle^{2s}\langle\xi-\xi_1\rangle^{-2s}}{\langle i\sigma+|\xi|^{2\alpha}\rangle^{1-\delta}\langle i\sigma_2+|\xi-\xi_1|^{2\alpha}\rangle}d\tau d\xi\Big)^{1/2}\Big] \\ \times T^{\nu}\|f\|_{L^2_{xt}}\|g\|_{L^2_{xt}}\|h\|_{L^2_{xt}} \tag{6.21}$$

with $\widetilde{\Omega}_{412} = \{(\tau,\xi) : \exists\tau_1,\xi_1 \in \mathbb{R}, (\tau,\tau_1,\xi,\xi_1) \in \Omega_{422}\}$. Moreover, we easily check that in Ω_{412},

$$|\sigma_1 + 3\xi\xi_1(\xi-\xi_1)| \geq \frac{1}{2}|\sigma_1|$$

and

$$|\xi| \leq |\sigma_1|,$$

which combined with (6.18) and smoothing relation (6.13) yield

$$\begin{aligned} K_{422} &\lesssim \frac{1}{\langle\sigma_1\rangle^{1/2}}\Big(\int_{\widetilde{\Omega}_{412}}\frac{\langle\xi\xi_1(\xi-\xi_1)\rangle^{-2s}\langle\xi\rangle^{2+4s}}{\langle\sigma\rangle^{1-\delta}\langle\sigma_2\rangle^{1-\delta}}d\tau d\xi\Big)^{1/2} \\ &\lesssim \langle\sigma_1\rangle^{-s-1/2}\Big(\int_{\Omega'_{412}}\frac{\langle\xi\rangle^{2+4s}}{\langle\sigma_1+3\xi\xi_1(\xi-\xi_1)\rangle^{1-2\delta}}d\xi\Big)^{1/2} \\ &\lesssim \langle\sigma_1\rangle^{-s-1+\delta}\Big(\int_{|\xi|\leq|\sigma_1|}\frac{d\xi}{\langle\xi\rangle^{-4s-2}}\Big)^{1/2}, \end{aligned}$$

(we have set $\Omega'_{412} = \{\xi : \exists\tau,\tau_1,\xi_1 \in \mathbb{R}, (\tau,\tau_1,\xi,\xi_1) \in \Omega_{412}\}$).
Now from the assumptions (6.7) on s we see that

$$K_{422} \lesssim \langle\sigma_1\rangle^{-s-1+\delta}\langle\sigma_1\rangle^{2s+3/2} \lesssim 1$$

if $\alpha \leq 1/2$ and

$$K_{422} \lesssim \langle\sigma_1\rangle^{-s-1+\delta} \lesssim 1$$

otherwise.

Estimate in Ω_{413}: In this domain, $|\xi_1| \sim |\xi-\xi_1|$ thus using (6.21) it follows that

$$\begin{aligned} K_{413} &\lesssim \frac{\langle\xi_1\rangle^{-s-1/2+\delta}}{\langle\sigma_1\rangle^{\delta}}\Big(\int_{\widetilde{\Omega}_{413}}\frac{\langle\xi\rangle^{2s+1+2\delta}\langle\xi-\xi_1\rangle^{-2s-1+2\delta}}{\langle\sigma\rangle^{1-\delta}\langle\sigma_2\rangle^{1-\delta}}d\tau d\xi\Big)^{1/2} \\ &\lesssim \frac{\langle\xi_1\rangle^{-2s-1+2\delta}}{\langle\sigma_1\rangle^{\delta}}\Big(\int_{\Omega'_{413}}\frac{d\xi}{\langle\sigma_1+3\xi\xi_1(\xi-\xi_1)\rangle^{1-2\delta}}\Big)^{1/2}. \end{aligned}$$

Following the works of Kenig, Ponce and Vega [KPV96], we perform the change of variables $\mu_1 = \sigma_1 + 3\xi\xi_1(\xi - \xi_1)$. Thus, since $d\xi \sim \dfrac{d\mu_1}{|\xi_1|^{1/2}\sqrt{|4\tau_1 - \xi_1^3 - 4\mu_1|}}$ and in view of (6.19), we bound K_{413} by

$$\begin{aligned}
K_{413} &\lesssim \frac{\langle\xi_1\rangle^{-2s-5/4+2\delta}}{\langle\sigma_1\rangle^{\delta}}\Big(\int_{|\mu_1|\le 2|\sigma_1|}\frac{d\mu_1}{\langle\mu_1\rangle^{1-2\delta}\sqrt{|4\tau_1 - \xi_1^3 - 4\mu_1|}}\Big)^{1/2}\\
&\lesssim \frac{\langle\xi_1\rangle^{-2s-5/4+2\delta}}{\langle\sigma_1\rangle^{\delta}}\frac{\langle\sigma_1\rangle^{\delta}}{\langle 4\tau_1 - \xi_1^3\rangle^{1/4}}\\
&\lesssim \langle\xi_1\rangle^{-2s-5/4+2\delta}\langle 4\tau_1 - \xi_1^3\rangle^{-1/4}.
\end{aligned}$$

Note that in Ω_{413}, we have $|\sigma_1| \le \frac{12}{100}|\xi_1|^3$, which leads to

$$3|\xi_1|^3 \le |4\sigma_1 + 3\xi_1^3| + 4|\sigma_1| \le |4\tau_1 - \xi_1^3| + \frac{48}{100}|\xi_1|^3$$

and thus $|\xi_1|^3 \lesssim |4\tau_1 - \xi_1^3|$. One deduce that for $-2s - 5/4 + 2\delta > 0$,

$$K_{413} \lesssim \langle 4\tau_1 - \xi_1^3\rangle^{\frac{1}{3}(-2s-5/4+2\delta)-1/4} \lesssim \langle 4\tau_1 - \xi_1^3\rangle^{-\frac{2}{3}(s+1)+2\delta/3} \lesssim 1.$$

Estimate in Ω_{42}
We split this region in two components:

$$\begin{aligned}
\Omega_{421} &= \{(\tau, \tau_1, \xi, \xi_1) \in \Omega_{42} : |\xi_1| \le 100|\xi|\},\\
\Omega_{422} &= \{(\tau, \tau_1, \xi, \xi_1) \in \Omega_{42} : |\xi_1| \ge 100|\xi|\}.
\end{aligned}$$

Estimate in Ω_{421}: In Ω_{421}, $\langle\xi_1\rangle \lesssim \langle\xi\rangle$ and $\langle\xi - \xi_1\rangle \lesssim \langle\xi\rangle$. Then, we bound I_{421} exactly in the same way that for I_{411}. After Plancherel and Hölder, we are led to the estimate

$$\begin{aligned}
I_{421} \lesssim\ & \|h\|_{L^2_{xt}}\Big\|\mathcal{F}^{-1}\Big(\frac{\langle\xi\rangle^{[-s/2-1/4-\alpha(1-\lambda)+3\delta/2]^+}\widehat{f}}{\langle\sigma\rangle^{\lambda/2}}\Big)\Big\|_{L^4_{xt}}\\
&\times\Big\|\mathcal{F}^{-1}\Big(\frac{\langle\xi\rangle^{[-s/2-1/4-\alpha(1-\lambda)+3\delta/2]^+}\widehat{g}}{\langle\sigma\rangle^{\lambda/2}}\Big)\Big\|_{L^4_{xt}}.
\end{aligned}$$

It suffices to choose $\lambda = 3/4 + \varepsilon$ to apply Lemma 6.4 with $s > -3/4 - \alpha/2$.

Estimate in Ω_{422}: We split Ω_{422} into three sub-domains

$$\begin{aligned}
\Omega_{4221} &= \{(\tau, \tau_1, \xi, \xi_1) \in \Omega_{422} : 3|\xi\xi_1(\xi - \xi_1)| \le \frac{1}{2}|\sigma|\},\\
\Omega_{4222} &= \{(\tau, \tau_1, \xi, \xi_1) \in \Omega_{422} : 3|\xi\xi_1(\xi - \xi_1)| \ge \frac{1}{2}|\sigma|, |\sigma_2| \le 1\},\\
\Omega_{4223} &= \{(\tau, \tau_1, \xi, \xi_1) \in \Omega_{422} : 3|\xi\xi_1(\xi - \xi_1)| \ge \frac{1}{2}|\sigma|, |\sigma_2| \ge 1\}.
\end{aligned}$$

Estimate in Ω_{4221}: In this region one has that

$$|\sigma + 3\xi\xi_1(\xi - \xi_1)| \geq \frac{1}{2}|\sigma|$$

and since $\sigma_1 + \sigma_2 - \sigma = 3\xi\xi_1(\xi - \xi_1)$ it follows that

$$|\sigma_1| \leq |\sigma| \leq 2|\sigma_1 + \sigma_2| \leq 4|\sigma_1|$$

and $|\sigma_1| \sim |\sigma| \geq |\xi\xi_1(\xi - \xi_1|$. Therefore using (6.21), we obtain

$$\begin{aligned}
K_{4221} &\lesssim \frac{\langle\xi_1\rangle^{-s}}{\langle\sigma_1\rangle^{1/2}}\Big(\int_{\widetilde{\Omega}_{4221}} \frac{|\xi|^2\langle\xi\rangle^{2s}\langle\xi-\xi_1\rangle^{-2s}}{\langle\sigma\rangle^{1-\delta}\langle\sigma_2\rangle} d\tau d\xi\Big)^{1/2}\\
&\lesssim \frac{1}{\langle\sigma_1\rangle^{1-\delta}}\Big(\int_{\widetilde{\Omega}_{4221}} \frac{\langle\xi\xi_1(\xi-\xi_1)\rangle^{-2s}\langle\xi\rangle^{2+4s}}{\langle\sigma_2\rangle^{1+\delta}} d\tau d\xi\Big)^{1/2}\\
&\lesssim \langle\sigma_1\rangle^{-s-1+\delta}\Big(\int_{|\xi|\lesssim|\sigma_1|} \frac{d\xi}{\langle\xi\rangle^{-4s-2}}\Big)^{1/2}\\
&\lesssim 1
\end{aligned}$$

as for K_{422}.

Estimate in Ω_{4222}: First consider the case $\alpha \leq 1/2$. Then,

$$\begin{aligned}
K_{4222} &\lesssim \frac{|\xi|\langle\xi\rangle^{s}}{\langle\sigma\rangle^{1/2-\delta/2}}\Big(\int_{\widetilde{\Omega}_{4222}} \frac{\langle\xi_1\rangle^{-2s}\langle\xi-\xi_1\rangle^{-2s}}{\langle\sigma_1\rangle\langle\sigma_2\rangle} d\tau_1 d\xi_1\Big)^{1/2}\\
&\lesssim \frac{|\xi|^{1+s}\langle\xi\rangle^{s}}{\langle\sigma\rangle^{1/2-\delta/2}}\Big(\int_{\widetilde{\Omega}_{4222}} \frac{\langle\xi\xi_1(\xi-\xi_1)\rangle^{-2s}}{\langle\sigma_1\rangle^{1-\delta}\langle\sigma_2\rangle^{1-\delta}} d\tau_1 d\xi_1\Big)^{1/2}\\
&\lesssim |\xi|^{1+s}\langle\xi\rangle^{s}\langle\sigma\rangle^{-s-1/2+\delta/2}\Big(\int_{\Omega'_{4222}} \frac{d\xi_1}{\langle\sigma+3\xi\xi_1(\xi-\xi_1)\rangle^{1-2\delta}}\Big)^{1/2}.
\end{aligned}$$

The change of variables $\mu = \sigma + 3\xi\xi_1(\xi - \xi_1)$ gives the inequalities

$$\begin{aligned}
K_{4222} &\lesssim |\xi|^{3/4+s}\langle\xi\rangle^{s}\langle\sigma\rangle^{-s-1/2+\delta/2}\Big(\int_{|\mu|\leq 2|\sigma|} \frac{d\mu}{\langle\mu\rangle^{1-2\delta}\sqrt{|4\tau-\xi^3-4\mu|}}\Big)^{1/2}\\
&\lesssim |\xi|^{3/4+s}\langle\xi\rangle^{s}\langle\sigma\rangle^{-s-1/2+3\delta/2}\langle 4\tau-\xi^3\rangle^{-1/4},
\end{aligned}$$

which is bounded on $\mathbb{R}^2$. If $\alpha > 1/2$, we have directly

$$\begin{aligned}
K_{4222} &\lesssim \frac{|\xi|\langle\xi\rangle^{s}}{\langle\sigma\rangle^{1/2-\delta/2}}\Big(\int_{\widetilde{\Omega}_{4222}} \frac{\langle\xi_1\rangle^{-4s}}{\langle\xi_1\rangle^{2\alpha}\langle\xi-\xi_1\rangle^{2\alpha}\langle\sigma_2\rangle^{1+\varepsilon}} d\tau_1 d\xi_1\Big)^{1/2}\\
&\lesssim \langle\xi\rangle^{1/2+s+\delta/2}\Big(\int_{\mathbb{R}} \frac{d\xi_1}{\langle\xi_1\rangle^{4s+2+4\alpha+2\delta}}\Big)^{1/2}\\
&\lesssim 1
\end{aligned}$$

for $s > -1/4 - \alpha$.

Estimate in Ω_{4223}: As we will see below, that is in this sub-domain that the condition $s > s_\alpha$ appears. Also, to obtain our estimates, we will need tu use a dyadic decomposition of the variables ξ_1, $\xi - \xi_1$, ξ and σ_1, σ_2, σ. Hence, following the notations introduced in Subsection 2.2, we have to bound

$$I_{4223} = \sum_{\substack{N_3 \ll N_1 \sim N_2 \\ N_1 \gtrsim 1}} \sum_{\substack{L_3 \gtrsim L_1 \gtrsim L_2 \\ L_3 \sim N_3 N_1^2}} \frac{N_3 \langle N_3\rangle^s N_1^{-s} N_2^{-s}}{\max(L_3, N_3^{2\alpha})^{1/2-2\delta} \max(L_1, N_1^{2\alpha})^{1/2} \max(L_2, N_2^{2\alpha})^{1/2}}$$
$$\times \int_{\mathbb{R}^4} \frac{\widehat{h}(\tau,\xi)}{\langle\sigma\rangle^\delta} \widehat{f}(\tau_1,\xi_1)\widehat{g}(\tau-\tau_1,\xi-\xi_1)\chi_{|\xi|\sim N_3, |\xi_1|\sim N_1, |\xi-\xi_1|\sim N_2}\chi_{|\sigma|\sim L_3, |\sigma_1|\sim L_1, |\sigma_2|\sim L_2} d\tau d\tau_1 d\xi d\xi_1.$$

Using the (+-) coherence case of Lemma 6.5 as well as Lemma 6.6, we get

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^4} \frac{\widehat{h}(\tau,\xi)}{\langle\sigma\rangle^\delta} \widehat{f}(\tau_1,\xi_1)\widehat{g}(\tau-\tau_1,\xi-\xi_1)\chi_{|\xi|\sim N_3, |\xi_1|\sim N_1, |\xi-\xi_1|\sim N_2}\chi_{|\sigma|\sim L_3, |\sigma_1|\sim L_1, |\sigma_2|\sim L_2} d\tau d\tau_1 d\xi d\xi_1 \\
&\lesssim L_2^{1/2} N_1^{-1} \min\big(N_3N_1^2, \frac{N_1}{N_3}L_1\big)^{1/2} \Big\| \mathcal{F}^{-1}\Big(\frac{\widehat{h}(\tau,\xi)}{\langle\sigma\rangle^\delta}\Big)\Big\|_{L^2_{xt}} \|f\|_{L^2_{xt}} \|g\|_{L^2_{xt}} \\
&\lesssim T^\nu L_2^{1/2} N_1^{-1} \min\big(N_3N_1^2, \frac{N_1}{N_3}L_1\big)^{1/2} \|h\|_{L^2_{xt}} \|f\|_{L^2_{xt}} \|g\|_{L^2_{xt}}.
\end{aligned}$$

Thus we reduce to show

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{N_3 \ll N_1 \sim N_2 \\ N_1 \gtrsim 1}} \sum_{\substack{L_3 \gtrsim L_1 \gtrsim L_2 \\ L_3 \sim N_3 N_1^2}} &\frac{N_3 \langle N_3\rangle^s N_1^{-s} N_2^{-s}}{\max(L_3, N_3^{2\alpha})^{1/2-2\delta} \max(L_1, N_1^{2\alpha})^{1/2} \max(L_2, N_2^{2\alpha})^{1/2}} \\
&\times L_2^{1/2} N_1^{-1} \min\big(N_3N_1^2, \frac{N_1}{N_3}L_1\big)^{1/2} \lesssim 1.
\end{aligned} \tag{6.22}$$

Recalling that $N_j = 2^{n_j}$ and $L_j = 2^{\ell_j}$, $j = 1,2,3$, for all $\lambda \in [0,1]$, the right hand side of (6.22) is bounded by

$$\begin{aligned}
&\lesssim \sum_{\substack{N_3 \ll N_1 \sim N_2 \\ N_1 \gtrsim 1}} \sum_{\substack{L_3 \gtrsim L_1 \gtrsim L_2 \\ L_3 \sim N_3 N_1^2}} \frac{N_3 \langle N_3\rangle^s N_1^{-2s-1} (N_3N_1^2)^{\lambda/2} \big(\frac{N_1}{N_3}L_1\big)^{(1-\lambda)/2}}{L_3^\delta (N_3N_1^2)^{1/2-3\delta} L_1^{(1-\lambda)/2} N_1^{\alpha\lambda}} \\
&\lesssim \sum_{\substack{N_3 \ll N_1 \sim N_2 \\ N_1 \gtrsim 1}} \Big(\sum_{L_1, L_2, L_3 \gtrsim 1} \frac{1}{(L_1L_2L_3)^{\delta/3}}\Big) N_3^{\lambda+3\delta} \langle N_3\rangle^s N_1^{-2s-3/2+\lambda(1/2-\alpha)+6\delta} \\
&\lesssim \sum_{\substack{N_1 \gtrsim 1 \\ N_3 \ll N_1}} N_3^{\lambda+3\delta} \langle N_3\rangle^s N_1^{-2s-3/2+\lambda(1/2-\alpha)+6\delta}.
\end{aligned}$$

This last expression is finite if $\lambda + 3\delta < -s$ and $-2s - 3/2 + \lambda(1/2 - \alpha) + 6\delta < 0$. When $\alpha \le 1/2$, it suffices to choose $\lambda = 0$ and $\lambda = -s - 4\delta$ otherwise.

4 Proof of the main result

In this section, we briefly indicate how the results stated in Section 2.1 and the bilinear estimate (6.5) yield Theorem 6.2 (see for instance [MR02] for the details).

Actually, local existence of a solution is a consequence of the following modified version of Theorem 6.1.

Proposition 6.1. *Given $s_c^+ > s_\alpha$, there exist $\nu, \delta > 0$ such that for any $s \ge s_c^+$ and any $u, v \in X_\alpha^{1/2,s}$ with compact support in $[-T, +T]$,*

$$\|\partial_x(uv)\|_{X_\alpha^{-1/2+\delta,s}} \lesssim T^\nu(\|u\|_{X_\alpha^{1/2,s_c^+}}\|v\|_{X_\alpha^{1/2,s}} + \|u\|_{X_\alpha^{1/2,s}}\|v\|_{X_\alpha^{1/2,s_c^+}}). \tag{6.23}$$

Estimate (6.23) is obtained thanks to (6.5) and the triangle inequality

$$\forall s \ge s_c^+,\ \langle\xi\rangle^s \le \langle\xi\rangle^{s_c^+}\langle\xi_1\rangle^{s-s_c^+} + \langle\xi\rangle^{s_c^+}\langle\xi-\xi_1\rangle^{s-s_c^+}.$$

Let $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$ with s obeying (6.7). Define $F(u)$ as

$$F(u) = F_{u_0}(u) = \psi(t)\Big[W_\alpha(t)u_0 - \frac{\chi_{\mathbb{R}_+}(t)}{2}\int_0^t W_\alpha(t-t')\partial_x(\psi_T^2(t')u^2(t'))dt'\Big].$$

We shall prove that for $T \ll 1$, F is a contraction in a ball of the Banach space

$$Z = \{u \in X_\alpha^{1/2,s},\ \|u\|_Z = \|u\|_{X_\alpha^{1/2,s_c^+}} + \gamma\|u\|_{X_\alpha^{1/2,s}} < +\infty\},$$

where γ is defined for all nontrivial φ by

$$\gamma = \frac{\|\varphi\|_{H^{s_c^+}}}{\|\varphi\|_{H^s}}.$$

Combining (6.9), (6.10) as well as (6.23), it is easy to derive that

$$\|F(u)\|_Z \le C(\|u_0\|_{H^{s_c^+}} + \gamma\|u_0\|_{H^s}) + CT^\nu\|u\|_Z^2$$

and

$$\|F(u) - F(v)\|_Z \le CT^\nu\|u-v\|_Z\|u+v\|_Z$$

for some $C, \nu > 0$. Thus, taking $T = T(\|u_0\|_{H^{s_c^+}})$ small enough, we deduce that F is contractive on the ball of radius $4C\|u_0\|_{H^{s_c^+}}$ in Z. This proves the existence of a solution u to $u = F(u)$ in $X_{\alpha,T}^{1/2,s}$.

Following similar arguments of [MR02], it is not too difficult to see that if $u_1, u_2 \in X^{1/2,s}_{\alpha,T}$ are solutions to (6.6) and $0 < \delta < T/2$, then there exists $\nu > 0$ such that

$$\|u_1 - u_2\|_{X^{1/2,s}_{\alpha,\delta}} \lesssim T^\nu \big(\|u_1\|_{X^{1/2,s}_{\alpha,T}} + \|u_2\|_{X^{1/2,s}_{\alpha,T}}\big)\|u_1 - u_2\|_{X^{1/2,s}_{\alpha,\delta}},$$

which leads to $u_1 \equiv u_2$ on $[0,\delta]$, and then on $[0,T]$ by iteration. This proves the uniqueness of the solution.

It is straightforward to check that $W_\alpha(\cdot)u_0 \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, H^s(\mathbb{R})) \cap \mathcal{C}(\mathbb{R}_+^*, H^\infty(\mathbb{R}))$. Then it follows from Theorem 6.1, Lemma 6.3 and the local existence of the solution that

$$u \in \mathcal{C}([0,T], H^s(\mathbb{R})) \cap \mathcal{C}((0,T], H^\infty(\mathbb{R}))$$

for some $T = T(\|u_0\|_{H^{s_c^+}})$. By induction, we have $u \in \mathcal{C}((0,T], H^\infty(\mathbb{R}))$. Taking the L^2-scalar product of (6.1) with u, we obtain that $t \mapsto \|u(t)\|_{H^{s_c^+}}$ is nonincreasing on $(0,T]$. Since the existence time of the solution depends only on the norm $\|u_0\|_{H^{s_c^+}}$, this implies that the solution can be extended globally in time.

Quatrième partie

Etude asymptotique des équations de KdV dissipatives

Chapitre 7

Comportement asymptotique des équations de Korteweg-de Vries dissipatives

Notre but ici est d'étudier le comportement asymptotique des solutions des équations de Korteweg-de Vries dissipatives $u_t + u_{xxx} + |D|^\alpha u + uu_x = 0$ avec $0 < \alpha < 2$. Nous calculons v tel que $u - v$ décroît comme $t^{-r(\alpha)}$ lorsque $t \to \infty$ dans divers espaces de Sobolev.

Asymptotic behavior for dissipative Korteweg-de Vries equations

Stéphane Vento,
Université Paris-Est,
Laboratoire d'Analyse et de Mathématiques Appliquées,
5 bd. Descartes, Cité Descartes, Champs-Sur-Marne,
77454 Marne-La-Vallée Cedex 2, France

E-mail: stephane.vento@univ-paris-est.fr

Abstract. Our goal in this paper is to study the large time behavior of solutions to the dissipative Korteweg-de Vries equations $u_t + u_{xxx} + |D|^\alpha u + uu_x = 0$ with $0 < \alpha < 2$. We find v such that $u - v$ decays like $t^{-r(\alpha)}$ as $t \to \infty$ in various Sobolev norm.

Keywords : KdV-like equations, dissipative dispersive equations, large time behavior
AMS Classification : 35Q53, 35B40

1 Introduction

In this paper we study the asymptotic behavior of solutions to the following dissipative KdV equations

$$\begin{cases} u_t + u_{xxx} + |D|^\alpha u + uu_x = 0, & t \in \mathbb{R}_+, x \in \mathbb{R}, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{dKdV}$$

with $0 < \alpha < 2$ and where $|D|^\alpha$ is the Lévy operator defined through its Fourier transform by $\widehat{|D|^\alpha \varphi}(\xi) = |\xi|^\alpha \widehat{\varphi}(\xi)$. Here $u = u(t,x)$ is a real-valued function.

The (dKdV) equations are dissipative versions of the well-known KdV equation

$$u_t + u_{xxx} + uu_x = 0 \tag{7.1}$$

which has been extensively studied. Equation (7.1) is completely integrable and there exists an infinite sequence of conserved quantities. For sufficiently smooth initial data, we know that global in time solutions exist and can be asymptotically written as a sum of traveling wave solutions, called solitons, see [Sch86], [Miu76].

Concerning the pure dissipative equation

$$u_t + |D|^\alpha u + uu_x = 0, \tag{7.2}$$

it has been proposed to model a variety of physical phenomena, such that the growth of molecular interfaces (cf. [KPZ86]). Also, in [JMW05], Jourdain, Méléard and Woyczynski pointed out the main interest of equation (7.2) in probability theory. Biler, Funaki and Woyczynski proved in [BFW98] several local and global well-posedness results, in particular in the general setting $0 < \alpha \leq 2$, they obtained weak solutions of (7.2). Using the Fourier splitting method first introduced by Schonbek in [Sch80], they showed that regular solutions satisfy the estimate

$$\|u(t)\|_{L^2} \leq c(1+t)^{-1/2\alpha} \tag{7.3}$$

for all $t > 0$. This result was improved by Biler, Karch and Woyczynski [BKW99] in the case of a diffusion operator of the form $-\partial_x^2 + |D|^\alpha$. See also [KMX07] for asymptotic results concerning (7.2) with $1 < \alpha < 2$.

Let us turn back to the (dKdV) equation. The Cauchy problem (dKdV) with $0 < \alpha \leq 2$ has been shown to be globally well-posed in the Sobolev spaces $H^s(\mathbb{R})$ for all $s > -3/4$ and furthermore, the solution $u(t)$ belongs to $H^\infty(\mathbb{R})$ for any $t > 0$ (cf. [MR01]). When $\alpha = 1/2$, (dKdV) models the evolution of the free surface for shallow water waves damped by viscosity, see [OS70]. When $\alpha = 2$, (dKdV) is the so-called KdV-Burgers equation which models the propagation of weakly nonlinear dispersive long waves in some contexts when dissipative effects occur (see [OS70]). In the case $\alpha = 0$, (dKdV) reads

$$u_t + u_{xxx} + u + uu_x = 0 \tag{7.4}$$

and it is easy to get the decay rate for the L^2-norm of the solution. Indeed, multiplying (7.4) by u and integrating over $\mathbb{R}$ give for regular solutions the equality

$$\frac{1}{2}\partial_t \int_{-\infty}^{\infty} u^2(t,x)dx + \int_{-\infty}^{\infty} u^2(t,x)dx = 0,$$

and it follows immediately that

$$\|u(t)\|_{L^2} = O(e^{-t}) \text{ as } t \to \infty.$$

Now consider the KdV-Burgers equation ((dKdV) with $\alpha = 2$). In a sharp contrast with what occurs for (7.4), Amick, Bona and Schonbek [ABS89] proved that if $u_0 \in L^1(\mathbb{R}) \cap H^2(\mathbb{R})$, then the corresponding solution satisfies

$$\|u(t)\|_{L^2} \leq c(1+t)^{-1/4} \tag{7.5}$$

and furthermore, this estimate is optimal for a generic class of functions. The proof of this result is based on a subtle use of the Hopf-Cole transformation. Later, Karch [Kar99b] improved this result by showing that the asymptotic profile of the solution with a mass M is given by the fundamental solution U_M of the viscous Burgers equation (eq. (7.2) with $\alpha = 2$)

$$u_t - u_{xx} + uu_x = 0$$

with the same mass. More precisely, we have

$$t^{(1-1/p)/2}\|u(t) - U_M(t)\|_{L^p} \to 0 \quad \text{as } t \to \infty$$

for each $p \in [1, \infty]$. In other words, we can say that for large times, the dispersion is negligible compared to dissipation and nonlinear effects. His method of proof is based on a scaling argument. This kind of behavior was also heuristically observed by Dix in [Dix92]. He called this situation the "balanced case" because both dissipation and nonlinear contributions appear in the long time behavior of the solution, this is formally expressed by the relation $\alpha = 2$.

In the present paper we study the so-called "asymptotically weak nonlinearity case" $\alpha < 2$. For a large class of equations, solution of the nonlinear problem asymptotically looks like solution of the corresponding linear problem (with same initial data). One of the goals of this article is to show that similar behaviors occur for (dKdV) with $0 < \alpha < 2$.

Following the works of Karch [Kar99a], we shall mainly work on the integral formulation of (dKdV):

$$u(t) = S_\alpha(t) * u_0 - \frac{1}{2}\int_0^t S_\alpha(t-s) * \partial_x u^2(s)ds \tag{7.6}$$

valid for any sufficiently regular solution, and where $S_\alpha(t)$ is defined by

$$S_\alpha(t,x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi}e^{(i\xi^3 - |\xi|^\alpha)t}d\xi, \quad t > 0.$$

First, using the properties of the generalized heat kernel, we give a complete asymptotic expansion of the free solution $S_\alpha(t) * u_0$. After deriving the decay rates estimates of the solution in various Sobolev norms $\|\cdot\|$, we show that $\|u(t) - S_\alpha(t) * u_0\|$

is bounded by $ct^{-r(\alpha)}$, $r(\alpha) > 0$. Next, we improve this result by finding terms $w = w(t,x)$ such that $\|u(t) - S_\alpha(t) * u_0 - w(t)\|$ decays to zero faster than $t^{-r(\alpha)}$.

Notation. The notation to be used are standard. The letter c denotes a constant which may change at each occurrence. For $p \in [1,\infty]$ we define the Lebesgue space $L^p(\mathbb{R})$ by its norm $\|f\|_{L^p} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p dx\right)^{1/p}$ with the usual modification for $p = \infty$. If $f = f(t,x)$ is a space-time function, the L^p-norm of f will be taken in the x-variable. For $j \geq 0$ and $p \in [1,\infty]$, the Sobolev spaces $W_p^j(\mathbb{R})$ and $\dot{W}_p^j(\mathbb{R})$ are respectively endowed with the norms $\|f\|_{W_p^j} = \|f\|_{L^p} + \|\partial_x^j f\|_{L^p}$ and $\|f\|_{\dot{W}_p^j} = \|\partial_x^j f\|_{L^p}$. When $p = 2$, we simplify by the notation $H^j(\mathbb{R})$ and $\dot{H}^j(\mathbb{R})$. We also need the spaces $W_p^{j,k}$ equipped with the norm $\|f\|_{W_p^{j,k}} = \|\langle x\rangle^k f\|_{W_p^j}$. If $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, we define its Fourier transform by setting $\hat{f}(\xi) = \mathcal{F}f(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} f(x)dx$.
We introduce G_α, the fundamental solution of the equation $u_t + |D|^\alpha u = 0$, i.e.

$$G_\alpha(t,x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} e^{-t|\xi|^\alpha} d\xi, \quad t > 0.$$

It is clear that G_α has the self-similarity property

$$G_\alpha(t,x) = t^{-1/\alpha} G_\alpha(1, xt^{-1/\alpha}), \quad x \in \mathbb{R}, t > 0. \tag{7.7}$$

On the other hand, we know that $G_\alpha(t) \in H^{p,j}(\mathbb{R})$ for any $p \in [1,\infty]$ and $j \geq 0$, see for instance [MYZ06].
Finally, for $f \in L^1(x^j dx)$, $j \in \mathbb{N}$, we set $\mathcal{M}_j(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) x^j dx$.

2 Main results

As we are going to show, the solution of (dKdV) can be approximated by the solution of the corresponding linear equation. We first give a complete asymptotic expansion of $S_\alpha(t) * u_0$, which will be used in the proof of the main theorem.

Theorem 7.1. *Let $p \in [1,\infty]$ and $j, N \in \mathbb{N}$. Then for all $t \geq 1$ and $u_0 \in L^1((1+|x|)^{N+1}dx)$,*

$$\Big\|S_\alpha(t)*u_0 - \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{n!}\mathcal{M}_n(u_0)\partial_x^n G_\alpha(t) - \sum_{k=1}^{N}\frac{t^k}{k!}\sum_{\ell=0}^{N-1}\frac{(-1)^\ell}{\ell!}\mathcal{M}_\ell(u_0)\partial_x^\ell(-\partial_x)^{3k}G_\alpha(t)\Big\|_{\dot{W}_p^j}$$
$$\leq ct^{-(1-1/p)/\alpha - j/\alpha - (N+1)/\alpha} \tag{7.8}$$

Remark 7.1. *When $N = 0$, the sum $\sum_{k=1}^{N}$ in (7.1) has to be understood as 0, and thus (7.1) reads*

$$\|S_\alpha(t) * u_0 - \mathcal{M}_0(u_0)G_\alpha(t)\|_{\dot{W}_p^j} \leq ct^{-(1-1/p)/\alpha - j/\alpha - 1/\alpha}. \tag{7.9}$$

If $N = 1$, we have the following asymptotic expansion for $S_\alpha(t) * u_0$,

$$\|S_\alpha(t) * u_0 - \mathcal{M}_0(u_0)G_\alpha(t) + \mathcal{M}_1(u_0)\partial_x G_\alpha(t) + t\mathcal{M}_0(u_0)\partial_x^3 G_\alpha(t)\|_{\dot{W}_p^j} \leq ct^{-(1-1/p)/\alpha - j/\alpha - 2/\alpha}.$$

Remark 7.2. *The term $\sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{n!}\mathcal{M}_n(u_0)\partial_x^n G_\alpha(t)$ in (7.1) corresponds to the asymptotic expansion of $G_\alpha(t) * u_0$, solution to the generalized heat equation $u_t + |D|^\alpha u = 0$. The other terms are due to the dispersive effects and appear only for $N \geq 1$.*

Now we consider the nonlinear equation (dKdV) with $0 < \alpha < 2$. Throughout this paper, we make the following assumptions:

$$u_0 \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}), \tag{7.10}$$

$$\forall j \geq 0, \ \sup_{t>0} \|\partial_x^j u(t)\|_{L^2} < \infty, \tag{7.11}$$

$$\sup_{t\geq 0} \|u(t)\|_{L^1} < \infty. \tag{7.12}$$

For $u_0 \in L^2(\mathbb{R})$, existence of global solutions belonging to $C((0,\infty), H^\infty(\mathbb{R}))$ was proved for example in [MR01]. By this local smoothing property, we see that the solution becomes smooth for any time $t_0 > 0$. Changing the initial time to t_0, we may even suppose that the initial data $u_0 \in H^\infty(\mathbb{R})$. In the Appendix,, we will show that assumptions (7.11)-(7.12) are verified for corresponding solutions when $u_0 \in W_2^{3,1}(\mathbb{R})$, at least in the case $\alpha > 1$.

Theorem 7.2. *Let $p \in [2, \infty]$ and $j \in \mathbb{N}$. Assume that $u_0 \in H^{j+1}(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ and (7.11)-(7.12) hold true. Then we have*

$$\|u(t)\|_{\dot{W}_p^j} \leq c(1+t)^{-(1-1/p)/\alpha - j/\alpha}, \quad t > 0. \tag{7.13}$$

Next we find the first term in the asymptotic expansion of the solution.

Theorem 7.3. *Let $p \in [2, \infty]$ and $j \in \mathbb{N}$. We assume that $u_0 \in H^{j+3}(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ and that the solution u satisfies (7.11)-(7.12). Then, for all $t > 0$,*

$$\|u(t) - S_\alpha(t) * u_0\|_{\dot{W}_p^j} \leq c \begin{cases} (1+t)^{(-(1-1/p)/\alpha - j/\alpha) - 1/\alpha} & \textit{for} \quad 0 < \alpha < 1, \\ (1+t)^{(-(1-1/p) - j) - 1}\log(1+t) & \textit{for} \quad \alpha = 1, \\ (1+t)^{(-(1-1/p)/\alpha - j/\alpha) - (2/\alpha - 1)} & \textit{for} \quad 1 < \alpha < 2. \end{cases}$$

In view of Theorems 7.2 and 7.3, it is clear that decay rate of $u(t) - S_\alpha(t) * u_0$ in $\dot{W}_p^j$-norm is better than when considering only $u(t)$. In order to find other terms in the asymptotic expansion, we need to consider separately the cases $0 < \alpha < 1$, $\alpha = 1$ and $1 < \alpha < 2$.

When $0 < \alpha < 1$ or $\alpha = 1$, the difference between the asymptotic behavior of the first and second term is subtle. For the first term, we have $\|u(t) - S_\alpha(t)\|_{\dot{W}_p^j} = O(t^{-(1-1/p)/\alpha - j/\alpha - 1/\alpha})$ (when $\alpha < 1$), whereas for the second one, say $w(t)$, we have $\|u(t) - S_\alpha(t) - w(t)\|_{\dot{W}_p^j} = o(t^{-(1-1/p)/\alpha - j/\alpha - 1/\alpha})$. The following result holds for $\alpha \leq 1$.

Theorem 7.4. *Suppose $p \in [2, \infty]$, $j \in \mathbb{N}$, $u_0 \in H^{j+3}(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ and that (7.11)-(7.12) are verified.*

(i) If $0 < \alpha < 1$, then

$$t^{((1-1/p)/\alpha + j/\alpha)+1/\alpha} \Big\| u(t) - S_\alpha(t) * u_0 + \frac{1}{2}\Big(\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty u^2(s,y)dyds\Big)\partial_x G_\alpha(t)\Big\|_{\dot{W}_p^j} \to 0 \tag{7.14}$$

as $t \to \infty$.

(ii) If $\alpha = 1$, then

$$\frac{t^{(1-1/p)+j+1}}{\log t} \Big\| u(t) - S_1(t) * u_0 + \frac{M^2}{4\pi}(\log t)\partial_x G_1(t)\Big\|_{\dot{W}_p^j} \to 0 \tag{7.15}$$

where $M = \mathcal{M}_0(u_0) = \int_{-\infty}^\infty u_0$.

Remark 7.3. *In the case $\alpha < 1$, the integral $\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty u^2(s,y)dyds$ which appears in (7.14) is convergent due to Theorem 7.2:*

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty u^2(s,y)dyds = \int_0^\infty \|u(s)\|_{L^2}^2 ds \leq c \int_0^\infty (1+s)^{-1/\alpha} ds < \infty.$$

Now we deal with the case $1 < \alpha < 2$. In this situation we get an asymptotic expansion of the solution at the rate $O(t^{-(1-1/p)/\alpha - j/\alpha - 1/\alpha})$ (in $\dot{W}_p^j$-norm, and for almost every α) but we need more than two terms in this expansion to derive it. The main idea is to use the successive terms $F^n(t)$ which appear in the Picard iterative scheme applied to the Duhamel formulation (7.6), i.e.

$$\begin{cases} F^0(t) = S_\alpha(t) * u_0, \\ F^{n+1}(t) = S_\alpha(t) * u_0 - \frac{1}{2}\int_0^t S_\alpha(t-s) * \partial_x (F^n(s))^2 ds. \end{cases}$$

Theorem 7.5. *Let $1 < \alpha < 2$, $p \in [2, \infty]$, $j \in \mathbb{N}$ and $u_0 \in H^{j+3}(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$. Suppose that conditions (7.11) and (7.12) are satisfied.*

(i) If $\frac{2N+1}{N+1} < \alpha < \frac{2N+3}{N+2}$ *for some* $N \in \mathbb{N}$*, then*

$$\|u(t) - F^{N+1}(t)\|_{\dot{W}_p^j} \leq c(1+t)^{-(1-1/p)/\alpha - j/\alpha - 1/\alpha}.$$

(ii) If $\alpha = \frac{2N+3}{N+2}$ *for some* $N \in \mathbb{N}$*, then*

$$\|u(t) - F^{N+1}(t)\|_{\dot{W}_p^j} \leq c(1+t)^{-(1-1/p)/\alpha - j/\alpha - 1/\alpha} \log(1+t).$$

Remark 7.4. *The results obtained in this paper for (dKdV) could be certainly adapted to more general dispersive dissipative equations taking the form*

$$u_t - |D|^r \partial_x u + |D|^\alpha u + \partial_x f(u) = 0, \tag{7.16}$$

where f *is a sufficiently smooth function behaving like* $u|u|^{q-1}$ *at the origin. Such general models were studied by Dix in [Dix92]. Similar asymptotic expansion for solutions to (7.16) could be obtained in some cases, when dissipation is not negligible in comparison with dispersion and nonlinearity:*

$$\begin{cases} \alpha \leq r+1, \\ 0 < \alpha < q. \end{cases}$$

The remainder of this paper is organized as follows. In Section 3, we derive linear estimates and prove Theorem 7.1. The decay rate (7.13) is established in Section 4. Section 5 is devoted to the proof of Theorems 7.3, 7.4 and 7.5. Finally, uniform estimates of the nonlinear solution are obtained in the Appendix.

3 Linear estimates

In this section, we prove some estimates related with $S_\alpha(t)$ and $G_\alpha(t)$. Our first lemma is a direct consequence of the self-similarity of G_α.

Lemma 7.1. *For any* $p \in [1, \infty]$ *and* $j \in \mathbb{N}$*,*

$$\|G_\alpha(t)\|_{\dot{W}_p^j} = ct^{-(1-1/p)/\alpha - j/\alpha}. \tag{7.17}$$

Proof. Equality (7.7) and a change of variables yield

$$\begin{aligned}\|G_\alpha(t)\|_{\dot{W}_p^j} &= \Big(\int_{-\infty}^{\infty} t^{-(j+1)p/\alpha} |\partial_x^j G_\alpha(1, xt^{-1/\alpha})|^p dx\Big)^{1/p} \\ &= t^{-(j+1)/\alpha} t^{1/\alpha p} \Big(\int_{-\infty}^{\infty} |\partial_x^j G_\alpha(1,y)|^p dy\Big)^{1/p}.\end{aligned}$$

The case $p = \infty$ is straightforward. □

Let us recall the following elementary result which will be extensively used in our future considerations. A proof of (7.19) can be found in [Kar97].

Lemma 7.2. *If $1 \le k \le j$ and $f \in H^j(\mathbb{R})$, then*

$$\|f\|_{L^\infty}^2 \le \|f\|_{L^2}\|f_x\|_{L^2}, \quad \textit{and} \quad \|\partial_x^k f\|_{L^2} \le \|f\|_{L^2}^{1-k/j}\|\partial_x^j f\|_{L^2}^{k/j}. \tag{7.18}$$

Moreover, for any $f \in L^2((1+|x|)dx)$, one has

$$\|f\|_{L^1}^2 \le c\|f\|_{L^2}\|\partial_\xi \widehat{f}\|_{L^2}. \tag{7.19}$$

Next lemma describes the asymptotic behavior of $S_\alpha(t)$.

Lemma 7.3. *For any $p \in [1,\infty]$ and $j, N \in \mathbb{N}$,*

$$\Big\|S_\alpha(t) - \sum_{n=0}^{N} \frac{t^n}{n!}(-\partial_x)^{3n}G_\alpha(t)\Big\|_{\dot{W}_p^j} \le ct^{-(1-1/p)/\alpha - j/\alpha - (3/\alpha - 1)(N+1)}. \tag{7.20}$$

Proof. Setting $A(t) = S_\alpha(t) - \sum_{n=0}^{N} \frac{t^n}{n!}(-\partial_x)^{3n}G_\alpha(t)$, we obtain

$$\mathcal{F}(\partial_x^j A(t))(\xi) = (i\xi)^j e^{-t|\xi|^\alpha}\Big(e^{it\xi^3} - \sum_{n=0}^{N}\frac{t^n}{n!}(-i\xi)^{3n}\Big).$$

Using the Taylor expansion of the exponential function, we have

$$\Big|e^{it\xi^3} - \sum_{n=0}^{N}\frac{(it\xi^3)^n}{n!}\Big| \le \frac{(t|\xi|^3)^{N+1}}{(N+1)!}.$$

Thus, Plancherel theorem and the change of variables $\xi = t^{-1/\alpha}\eta$ give

$$\begin{aligned}
\|\partial_x^j A(t)\|_{L^2}^2 &\le c\int_{-\infty}^{\infty} |\xi|^{2j} e^{-2t|\xi|^\alpha}(t|\xi|^3)^{2(N+1)}d\xi \\
&= ct^{2(N+1)}\int_{-\infty}^{\infty} |\xi|^{2(j+3N+3)}e^{-2t|\xi|^\alpha}d\xi \\
&= ct^{-1/\alpha - 2j/\alpha - 2(3/\alpha - 1)(N+1)},
\end{aligned}$$

which yields the result for $p = 2$. Now the case $p = \infty$ follows immediately from

(7.18). When $p = 1$, we use estimate (7.19). One has

$$\begin{aligned}
\|\partial_\xi \mathcal{F}(\partial_x^j A(t))\|_{L^2} \le c\Big(\int_{-\infty}^{\infty} \Big[|j\xi^{j-1}(t\xi^3)^{N+1}|^2 + |t\xi^{j+\alpha-1}(t\xi^3)^{N+1}|^2 \\
+ |\xi|^{2j}\Big|3it\xi^2 e^{it\xi^3} - \sum_{n=0}^{N} \frac{3n(it)^n \xi^{3n-1}}{n!}\Big|^2\Big] e^{-2t|\xi|^\alpha} d\xi\Big)^{1/2} \\
\le ct^{N+1}\Big(\int_{-\infty}^{\infty} j|\xi|^{2(j-1+3(N+1))} e^{-2t|\xi|^\alpha} d\xi\Big)^{1/2} \\
+ ct^{N+2}\Big(\int_{-\infty}^{\infty} |\xi|^{2(j+\alpha-1+3(N+1))} e^{-2t|\xi|^\alpha} d\xi\Big)^{1/2} \\
+ ct\Big(\int_{-\infty}^{\infty} |\xi|^{2(j+2)}|t\xi^3|^{2N} e^{-2t|\xi|^\alpha} d\xi\Big)^{1/2} \\
\le ct^{-1/2\alpha - j/\alpha - (3/\alpha - 1)(N+1) + 1/\alpha}.
\end{aligned}$$

It follows that (7.20) holds true for $p = 1$ and then for all $p \in [1, \infty]$ by interpolation. □

Lemma 7.4. *For all $p \in [2, \infty]$ and $j \in \mathbb{N}$,*

$$\|S_\alpha(t)\|_{\dot W_p^j} \le ct^{-(1-1/p)/\alpha - j/\alpha} \tag{7.21}$$

and

$$\|S_\alpha(t)\|_{\dot W_1^j} \le ct^{-j/\alpha}(1 + t^{1/2-3/2\alpha}).$$

Proof. For $p = 2$, $\|S_\alpha(t)\|_{\dot H^j} = \|G_\alpha(t)\|_{\dot H^j} = ct^{-1/2\alpha - j/\alpha}$. Then (7.21) follows by the first inequality in (7.18) and by interpolation. Concerning the L^1-norm, it is obtained thanks to (7.19) in the same way as estimate (7.20). □

Now we state a decomposition lemma for convolution products.

Lemma 7.5. *Let $p \in [1, \infty]$ and $N \in \mathbb{N}$. For any $h \in L^1((1 + |x|)^{N+1}dx)$ and $g \in C^{N+1}(\mathbb{R}) \cap H^{p,N+1}(\mathbb{R})$,*

$$\Big\|g * h - \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{n!}\mathcal{M}_n(h)\partial_x^n g\Big\|_{L^p} \le c\|\partial_x^{N+1} g\|_{L^p}\|h\|_{L^1(|x|^{N+1}dx)}.$$

Proof. It is an easy consequence of the Taylor formula as well as Young inequality. □

Applying Lemma 7.5 with $g = \partial_x^j G_\alpha(t)$ and using estimate (7.17), we deduce the

Corollary 7.1. *If $p \in [1, \infty]$ and $j, N \in \mathbb{N}$, then*

$$\Big\|G_\alpha(t) * h - \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{n!}\mathcal{M}_n(h)\partial_x^n G_\alpha(t)\Big\|_{\dot W_p^j} \le ct^{-(1-1/p)/\alpha - j/\alpha - (N+1)/\alpha}\|h\|_{L^1(|x|^{N+1}dx)}$$

for any $h \in L^1((1 + |x|)^{N+1}dx)$.

We are now in a position to prove Theorem 7.1.

Proof of Theorem 7.1. By the triangle inequality,

$$
\begin{aligned}
&\Big\|S_\alpha(t)*u_0-\sum_{n=0}^{N}\frac{(-1)^n}{n!}\mathcal{M}_n(u_0)\partial_x^n G_\alpha(t)-\sum_{k=1}^{N}\frac{t^k}{k!}\sum_{\ell=0}^{N-1}\frac{(-1)^\ell}{\ell!}\mathcal{M}_\ell(u_0)\partial_x^\ell(-\partial_x)^{3k}G_\alpha(t)\Big\|_{\dot W_p^j}\\
&\le \Big\|S_\alpha(t)*u_0-G_\alpha(t)*u_0-\sum_{k=1}^{N}\frac{t^k}{k!}(-\partial_x)^{3k}G_\alpha(t)*u_0\Big\|_{\dot W_p^j}\\
&\quad+\Big\|G_\alpha(t)*u_0-\sum_{n=0}^{N}\frac{(-1)^n}{n!}\mathcal{M}_n(u_0)\partial_x^n G_\alpha(t)\Big\|_{\dot W_p^j}\\
&\quad+\sum_{k=1}^{N}\frac{t^k}{k!}\Big\|(-\partial_x)^{3k}G_\alpha(t)*u_0-\sum_{\ell=0}^{N-1}\frac{(-1)^\ell}{\ell!}\mathcal{M}_\ell(u_0)\partial_x^\ell(-\partial_x)^{3k}G_\alpha(t)\Big\|_{\dot W_p^j}\\
&:= I+II+III.
\end{aligned}
$$

I is estimated with the help of (7.20),

$$
\begin{aligned}
I&=\Big\|\partial_x^j\Big(S_\alpha(t)-\sum_{k=0}^{N}\frac{t^k}{k!}(-\partial_x)^{3k}G_\alpha(t)\Big)*u_0\Big\|_{L^p}\\
&\le\Big\|\partial_x^j\Big(S_\alpha(t)-\sum_{k=0}^{N}\frac{t^k}{k!}(-\partial_x)^{3k}G_\alpha(t)\Big)\Big\|_{L^p}\|u_0\|_{L^1}\\
&\le ct^{-(1-1/p)/\alpha-j/\alpha-(3/\alpha-1)(N+1)}\le ct^{-(1-1/p)/\alpha-j/\alpha-(N+1)/\alpha},
\end{aligned}
$$

since $\alpha<2$. Concerning II, we use Corollary 7.1 as follows:

$$
II\le ct^{-(1-1/p)/\alpha-j/\alpha-(N+1)/\alpha}\|u_0\|_{L^1(|x|^{N+1}dx)}.
$$

Finally for the term III, Corollary 7.1 allows us to conclude

$$
\begin{aligned}
III&\le\sum_{k=1}^{N}\frac{t^k}{k!}\Big\|\partial_x^{3k+j}\Big(G_\alpha(t)*u_0-\sum_{\ell=0}^{N-1}\frac{(-1)^\ell}{\ell!}\mathcal{M}_\ell(u_0)\partial_x^\ell G_\alpha(t)\Big)\Big\|_{L^p}\\
&\le ct^{-(1-1/p)/\alpha-j/\alpha-N/\alpha}\sum_{k=1}^{N}t^{(1-3/\alpha)k}\\
&\le ct^{-(1-1/p)/\alpha-j/\alpha-N/\alpha+1-3/\alpha}\\
&\le ct^{-(1-1/p)/\alpha-j/\alpha-(N+1)/\alpha}.
\end{aligned}
$$

□

4 Decay of solutions to (dKdV)

In this section we prove Theorem 7.2. The case $(p, j) = (2, 0)$

$$\|u(t)\|_{L^2} \leq c(1+t)^{-1/2\alpha} \tag{7.22}$$

is a direct consequence of assumption (7.12) together with the second estimate (with $\beta = 0$) in Lemma 7.18.

Lemma 7.6. *Let $u_0 \in H^j(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ and u be a solution satisfying (7.11)-(7.12). Then, for all $t > 1$ and $N \geq 1$,*

$$\begin{aligned}\Big\| \int_0^t S_\alpha(t-s) * \partial_x u^2(s) ds \Big\|_{\dot H^j} \\ \leq ct^{-1/2\alpha - j/\alpha} + ct^{-\gamma} \sup_{t/2 \leq s \leq t} \|\partial_x^j u(s)\|_{L^2}^{1-1/N} + t^{-\gamma} \sup_{t/2 \leq s \leq t} \|\partial_x^j u(s)\|_{L^2}\end{aligned} \tag{7.23}$$

with $\gamma = \gamma(\alpha) > 0$.

Corollary 7.2. *If $u_0 \in H^j(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ and if (7.11)-(7.12) hold true,*

$$\|u(t)\|_{\dot H^j} \leq c(1+t)^{-1/2\alpha - j/\alpha}$$

for any $t > 0$.

Proof of Lemma 7.6. One proceeds by induction on j. For $j = 0$ we use the integral formulation (7.6) and estimates (7.21) and (7.22):

$$\begin{aligned}\Big\| \int_0^t S_\alpha(t-s) * \partial_x u^2(s) ds \Big\|_{L^2} &= 2\|u(t) - S_\alpha(t) * u_0\|_{L^2} \\ &\leq 2\|u(t)\|_{L^2} + 2\|S_\alpha(t)\|_{L^2}\|u_0\|_{L^1} \leq ct^{-1/2\alpha}.\end{aligned}$$

Now assume the statement (and thus Corollary 7.2) is true for the $k < j$. We split the left-hand side of (7.23) into

$$\Big\| \int_0^t S_\alpha(t-s) * \partial_x u^2(s) ds \Big\|_{\dot H^j} \leq \int_0^{t/2} \dots ds + \int_{t/2}^t \dots ds := I + II.$$

By the Young inequality and estimates (7.21), (7.22), we have

$$\begin{aligned} I &\leq \int_0^{t/2} \|\partial_x^{j+1} S_\alpha(t-s)\|_{L^2} \|u(s)\|_{L^2}^2 ds \\ &\leq c \int_0^{t/2} (t-s)^{-1/2\alpha - (j+1)/\alpha} (1+s)^{-1/\alpha} ds \\ &\leq ct^{-1/2\alpha - j/\alpha} \Big(t^{-1/\alpha} \int_0^t (1+s)^{-1/\alpha} ds \Big)\end{aligned}$$

and for $t > 1$,

$$t^{-1/\alpha}\int_0^t (1+s)^{-1/\alpha} ds \le c \begin{cases} t^{-1/\alpha} & \text{if} \quad \alpha < 1 \\ t^{-1}\log t & \text{if} \quad \alpha = 1 \\ t^{1-2/\alpha} & \text{if} \quad \alpha > 1 \end{cases} \le c.$$

To estimate II, we use Plancherel and we split low and high frequencies,

$$\begin{aligned} II &= c\int_{t/2}^t \Big(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2(t-s)|\xi|^\alpha}|\xi|^{2(j+1)}|\widehat{u^2}(s,\xi)|^2 d\xi\Big)^{1/2} ds \\ &\le c\int_{t/2}^t \Big(\int_{|\xi|<1} \dots d\xi\Big)^{1/2} ds + c\int_{t/2}^t \Big(\int_{|\xi|>1} \dots d\xi\Big)^{1/2} ds := II_1 + II_2. \end{aligned}$$

If $|\xi| < 1$, then $e^{-2|\xi|^\alpha} \ge e^{-2}$, hence

$$\begin{aligned} II_1 &\le c\int_{t/2}^t \Big(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2(1+t-s)|\xi|^\alpha}|\xi|^{2(j+1)}|\widehat{u^2}(s,\xi)|^2 d\xi\Big)^{1/2} \\ &= c\int_{t/2}^t \|\partial_x S_\alpha(1+t-s) * \partial_x^j u^2(s)\|_{L^2} ds \\ &\le c\int_{t/2}^t \|\partial_x S_\alpha(1+t-s)\|_{L^2}\|\partial_x^j u^2(s)\|_{L^1} ds \\ &\le c\int_{t/2}^t (1+t-s)^{-3/2\alpha}\|u(s)\|_{L^2}\|\partial_x^j u(s)\|_{L^2} ds, \end{aligned}$$

where we used in the last inequality

$$\|\partial_x^j f^2\|_{L^p} \le c\|f\|_{L^{p_1}}\|\partial_x^j f\|_{L^{p_2}} \tag{7.24}$$

with $1/p = 1/p_1 + 1/p_2$, $1 \le p, p_1, p_2 \le \infty$. Estimate (7.24) can be seen as a straightforward consequence of the Sobolev-Gagliardo-Nirenberg inequality. Next, using the estimate

$$t^{-1/2\alpha}\int_0^t (1+s)^{-3/2\alpha} ds \le c \begin{cases} t^{-1/2\alpha} & \text{if} \quad \alpha < 3/2 \\ t^{-1/3}\log t & \text{if} \quad \alpha = 3/2 \\ t^{1-2/\alpha} & \text{if} \quad \alpha > 3/2 \end{cases} \le ct^{-\gamma}, \tag{7.25}$$

we get

$$\begin{aligned} II_1 &\le c\int_{t/2}^t (1+t-s)^{-3/2\alpha}(1+s)^{-1/2\alpha}\|\partial_x^j u(s)\|_{L^2} ds \\ &\le c\Big(t^{-1/2\alpha}\int_0^t (1+s)^{-3/2\alpha} ds\Big) \sup_{t/2\le s\le t}\|\partial_x^j u(s)\|_{L^2} \le ct^{-\gamma}\sup_{t/2\le s\le t}\|u(s)\|_{\dot H^j}. \end{aligned}$$

Term II_2 is bounded by

$$\begin{aligned} II_2 &\leq \int_{t/2}^{t} \Big(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2(t-s)} |\xi|^{2(j+1)} |\widehat{u^2}(s,\xi)|^2 d\xi \Big)^{1/2} ds \\ &= c \int_{t/2}^{t} e^{-(t-s)} \|\partial_x^{j+1} u^2(s)\|_{L^2} ds \\ &\leq c \int_{t/2}^{t} e^{-(t-s)} \|u(s)\|_{L^\infty} \|\partial_x^{j+1} u(s)\|_{L^2} ds. \end{aligned}$$

Assumption (7.11) and Lemma 7.2 provide then

$$\begin{aligned} \|u(s)\|_{L^\infty} \|\partial_x^{j+1} u(s)\|_{L^2} &\leq c \|u(s)\|_{L^2}^{1/2} \|u_x(s)\|_{L^2}^{1/2} \|\partial_x^j u(s)\|_{L^2}^{1-1/N} \|\partial_x^{j+N} u(s)\|_{L^2}^{1/N} \\ &\leq c(1+s)^{-1/4\alpha} \|\partial_x^j u(s)\|_{L^2}^{1-1/N} \end{aligned}$$

for any $N \geq 1$. This allows us to conclude that

$$\begin{aligned} II_2 &\leq c \int_{t/2}^{t} e^{-(t-s)} (1+s)^{-\gamma} \|\partial_x^j u(s)\|_{L^2}^{1-1/N} ds \\ &\leq c t^{-\gamma} \sup_{t/2 \leq s \leq t} \|\partial_x^j u(s)\|_{L^2}^{1-1/N} \int_0^t e^{-(t-s)} ds \\ &\leq c t^{-\gamma} \sup_{t/2 \leq s \leq t} \|\partial_x^j u(s)\|_{L^2}^{1-1/N}. \end{aligned}$$

□

In order to prove Corollary 7.2, we need the following elementary result.

Lemma 7.7. *Let $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ bounded, $0 < \gamma < \beta$ and $N \geq 1$. We assume*

$$\forall t \geq 1, \quad f(t) \leq c t^{-\beta} + c t^{-\gamma} \sup_{s \sim t} f(s)^{1-1/N}.$$

Then for t and N large enough, $f(t) \leq c t^{-\beta}$.

Proof. We show by induction that for all $n \geq 0$, $f(t) \leq c t^{-\min(\beta, \gamma(1-N)(1-\frac{1}{N})^n + \gamma N)}$. Thus for n large enough, one obtains $f(t) \leq c t^{-\min(\beta, \gamma N + 1)}$ and it suffices to choose N so that $\beta \leq \gamma N + 1$. □

Proof of Corollary 7.2. By (7.12), we only need to consider t large enough. Using (7.21) and Lemma 7.6, it follows that

$$\begin{aligned} \|\partial_x^j u(t)\|_{L^2} &\leq \|\partial_x^j S_\alpha(t) * u_0\|_{L^2} + \Big\| \frac{1}{2} \int_0^t \partial_x^j S_\alpha(t-s) * \partial_x u^2(s) ds \Big\|_{L^2} \\ &\leq c t^{-1/2\alpha - j/\alpha} + c t^{-\gamma} \sup_{t/2 \leq s \leq t} \|\partial_x^j u(s)\|_{L^2} + c t^{-\gamma} \sup_{t/2 \leq s \leq t} \|\partial_x^j u(s)\|_{L^2}^{1-1/N}. \end{aligned}$$

Letting $t \to \infty$, we deduce $\|\partial_x^j u(t)\|_{L^2} \to 0$. For $t \gg 1$, we thus have $\|\partial_x^j u(t)\|_{L^2} \leq 1$ and

$$\|\partial_x^j u(t)\|_{L^2} \leq ct^{-1/2\alpha - j/\alpha} + ct^{-\gamma} \sup_{t/2 \leq s \leq t} \|\partial_x^j u(s)\|_{L^2}^{1-1/N}.$$

Applying Lemma 7.7 with $f(t) = \|\partial_x^j u(t)\|_{L^2}$ and $\beta = 1/2\alpha + j/\alpha$, we obtain the desired result. □

Proof of Theorem 7.2. The result is already proved in the case $p = 2$. When $p = \infty$, we use (7.18) and Corollary 7.2 to get

$$\|u(t)\|_{\dot{W}^j_\infty} \leq c\|u(t)\|_{\dot{H}^j}^{1/2} \|u(t)\|_{\dot{H}^{j+1}}^{1/2} \leq c(1+t)^{-1/\alpha - j/\alpha}.$$

The other cases follow by an interpolation argument. □

5 Asymptotic expansion

5.1 First order

In this subsection we prove Theorem 7.3. As previously, it suffices to show the result when $p = 2$ and $u_0 \in H^{j+2}(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$.

First, since $u \in C_b(\mathbb{R}^+, H^j(\mathbb{R}))$,

$$\|u(t) - S_\alpha(t) * u_0\|_{\dot{H}^j} \leq \|u(t)\|_{\dot{H}^j} + \|G_\alpha(t)\|_{L^1} \|u_0\|_{\dot{H}^j} \leq c$$

and we reduce to consider the case $t \geq 1$. Using the integral formulation of (dKdV), we have

$$\begin{aligned} \|u(t) - S_\alpha(t) * u_0\|_{\dot{H}^j} &\leq \frac{1}{2} \int_0^t \|\partial_x^j S_\alpha(t-s) * \partial_x u^2\|_{L^2} ds \\ &= \int_0^{t/2} \ldots ds + \int_{t/2}^t \ldots ds := I + II. \end{aligned}$$

Term I is bounded by

$$\begin{aligned} I &\leq c \int_0^{t/2} \|\partial_x^{j+1} S_\alpha(t-s)\|_{L^2} \|u(s)\|_{L^2}^2 ds \\ &\leq c \int_0^{t/2} (t-s)^{-1/2\alpha - (j+1)/\alpha} (1+s)^{-1/\alpha} ds \\ &\leq ct^{-1/2\alpha - (j+1)/\alpha} \int_0^t (1+s)^{-1/\alpha} ds \\ &\leq c \begin{cases} t^{(-1/2\alpha - j/\alpha) - 1/\alpha} & \text{if} \quad \alpha < 1, \\ t^{(-1/2 - j) - 1} \log(t) & \text{if} \quad \alpha = 1, \\ t^{(-1/2\alpha - j/\alpha) - (2/\alpha - 1)} & \text{if} \quad \alpha > 1. \end{cases} \end{aligned}$$

To estimate II we use Plancherel and we split low and high frequencies,

$$
\begin{aligned}
II &= c\int_{t/2}^{t}\Big(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2(t-s)|\xi|^\alpha}|\xi|^{2(j+1)}|\widehat{u^2}(s,\xi)|^2 d\xi\Big)^{1/2} ds\\
&\le c\int_{t/2}^{t}\Big(\int_{|\xi|<1}\dots d\xi\Big)^{1/2} ds + c\int_{t/2}^{t}\Big(\int_{|\xi|>1}\dots d\xi\Big)^{1/2} ds := II_1 + II_2.
\end{aligned}
$$

II_1 is treated as follows

$$
\begin{aligned}
II_1 &\le c\int_{t/2}^{t}\|S_\alpha(1+t-s)\|_{L^2}\|\partial_x^{j+1}u^2(s)\|_{L^1} ds\\
&\le c\int_{t/2}^{t}(1+t-s)^{-1/2\alpha}(1+s)^{-2/\alpha-j/\alpha} ds\\
&\le ct^{-2/\alpha-j/\alpha}\int_{0}^{t}(1+s)^{-1/2\alpha} ds\\
&\le c\begin{cases} t^{-2/\alpha-j/\alpha} & \text{if} \quad \alpha<1/2,\\ t^{-4-2j}\log t & \text{if} \quad \alpha=1/2,\\ t^{(-1/2\alpha-j/\alpha)+1-2/\alpha} & \text{if} \quad \alpha>1/2,\end{cases}\\
&\le c\begin{cases} t^{(-1/2\alpha-j/\alpha)-1/\alpha} & \text{if} \quad \alpha<1,\\ t^{(-1/2-j)-1}\log(t) & \text{if} \quad \alpha=1,\\ t^{(-1/2\alpha-j/\alpha)-(2/\alpha-1)} & \text{if} \quad \alpha>1.\end{cases}
\end{aligned}
$$

For the last term, we have

$$
\begin{aligned}
II_2 &\le c\int_{t/2}^{t} e^{-(t-s)}\|\partial_x^{j+1}u^2(s)\|_{L^2} ds\\
&\le c\int_{t/2}^{t} e^{-(t-s)}(1+s)^{-1/2\alpha-j/\alpha-2/\alpha}\\
&\le ct^{(-1/2\alpha-j/\alpha)-2/\alpha},
\end{aligned}
$$

which is acceptable.

5.2 Higher orders

Here we find higher orders terms in the asymptotic expansion of the solution to (dKdV), i.e. we give a demonstration of Theorems 7.4 and 7.5.

5.2.1 The case $0<\alpha<1$

First consider the case $0<\alpha<1$, our proof follows Karch's one [Kar99a] (see also [BKW99]).

Proof of Theorem 7.4 (i). By interpolation, we only need to consider the case $p = 2$ and $u_0 \in H^{j+2}(\mathbb{R})$. Split the quantity

$$\begin{aligned}
&\Big\| u(t) - S_\alpha(t) * u_0 + \frac{1}{2}\Big(\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty u^2(s,y)dyds\Big)\partial_x G_\alpha(t)\Big\|_{\dot{H}^j}\\
&\le \frac{1}{2}\Big\| \int_0^t \partial_x[S_\alpha(t-s) - G_\alpha(t-s)] * u^2(s)ds\Big\|_{\dot{H}^j}\\
&\quad + \frac{1}{2}\Big\| \int_0^t \partial_x G_\alpha(t-s) * u^2(s)ds - \Big(\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty u^2(s,y)dyds\Big)\partial_x G_\alpha(t)\Big\|_{\dot{H}^j}\\
&:= I + II.
\end{aligned}$$

To estimate I, we write

$$\begin{aligned}
I &\le c\int_0^t \|\partial_x^{j+1}[S_\alpha(t-s) - G_\alpha(t-s)] * u^2(s)\|_{L^2} ds\\
&= \int_0^{t/2} \ldots ds + \int_{t/2}^t \ldots ds := I_1 + I_2.
\end{aligned}$$

Concerning I_1, we use (7.20) with $N = 0$,

$$\begin{aligned}
I_1 &\le c\int_0^{t/2} \|\partial_x^{j+1}[S_\alpha(t-s) - G_\alpha(t-s)]\|_{L^2}\|u(s)\|_{L^2}^2 ds\\
&\le c\int_0^{t/2} (t-s)^{-1/2\alpha-(j+1)/\alpha+1-3/\alpha}(1+s)^{-1/\alpha} ds\\
&\le ct^{-1/2\alpha-j/\alpha-1/\alpha}t^{1-3/\alpha},
\end{aligned}$$

which shows that $t^{1/2\alpha+j/\alpha+1/\alpha}I_1 \to 0$. To deal with the integrand over $[t/2, t]$, we note that $\|[S_\alpha(t-s) - G_\alpha(t-s)] * u^2(s)\|_{\dot{H}^{j+1}} \le c\|u^2(s)\|_{\dot{H}^{j+1}}$, hence

$$\begin{aligned}
I_2 &\le c\int_{t/2}^t \|\partial_x^{j+1}u^2(s)\|_{L^2} ds\\
&\le c\int_{t/2}^t (1+s)^{-1/2\alpha-j/\alpha-2/\alpha} ds\\
&\le ct^{-1/2\alpha-j/\alpha-1/\alpha}t^{1-1/\alpha},
\end{aligned}$$

which is acceptable. Now we estimate term II by

$$\begin{aligned}
II &\le \frac{1}{2}\Big\|\Big(\int_t^\infty \int_{-\infty}^\infty u^2(s,y)dyds\Big)\partial_x G_\alpha(t)\Big\|_{\dot{H}^j}\\
&\quad + \frac{1}{2}\Big\| \int_0^t \Big[\partial_x G_\alpha(t-s) * u^2(s) - \Big(\int_{-\infty}^\infty u^2(s,y)dy\Big)\partial_x G_\alpha(t)\Big] ds\Big\|_{\dot{H}^j}\\
&:= II_1 + II_2.
\end{aligned}$$

Obviously,

$$II_1 \leq c \int_t^{\infty} \|u(s)\|_{L^2}^2 ds \|\partial_x^{j+1} G_\alpha(t)\|_{L^2} \leq ct^{(-1/2\alpha - j/\alpha)-1/\alpha} \int_t^{\infty} (1+s)^{-1/\alpha} ds$$

and it is clear that $\int_t^{\infty}(1+s)^{-1/\alpha} ds \to 0$ as $t \to \infty$. To estimate II_2 one fixes $\delta > 0$ and we bound it by

$$\begin{aligned}
II_2 &\leq c \Big\| \int_0^t \Big(\int_{-\infty}^{\infty} \partial_x [G_\alpha(t-s, \cdot - y) - G_\alpha(t, \cdot)] u^2(s,y) dy \Big) ds \Big\|_{\dot{H}^j} \\
&\leq c \int_0^t \Big\| \int_{-\infty}^{\infty} \partial_x^{j+1} [G_\alpha(t-s, \cdot - y) - G_\alpha(t, \cdot)] u^2(s,y) dy \Big\|_{L^2} ds \\
&= \int_0^{\delta t} \ldots ds + \int_{\delta t}^t \ldots ds \\
&= II_{21} + II_{22}.
\end{aligned}$$

Then we split II_{21} in two parts,

$$\begin{aligned}
II_{21} &\leq c \int_{[0,\delta t] \times \mathbb{R}} \|\partial_x^{j+1} [G_\alpha(t-s, \cdot - y) - G_\alpha(t, \cdot)] u^2(s,y)\|_{L^2} ds dy \\
&= c \int_{\Omega_1} \ldots ds dy + c \int_{\Omega_2} \ldots dy ds \\
&= II_{211} + II_{212},
\end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned}
\Omega_1 &= [0, \delta t] \times [-\delta t^{1/\alpha}, +\delta t^{1/\alpha}], \\
\Omega_2 &= [0, \delta t] \times (] - \infty, -\delta t^{1/\alpha}[\cup] + \delta t^{1/\alpha}, \infty[).
\end{aligned}$$

For all $(s,y) \in \Omega_1$, a straightforward calculation provides

$$\begin{aligned}
&\|\partial_x^{j+1} [G_\alpha(t-s, \cdot - y) - G_\alpha(t, \cdot)]\|_{L^2} \\
&\qquad = t^{-1/2\alpha - j/\alpha - 1/\alpha} \|\partial_x^{j+1} [G_\alpha(1 - s/t, \cdot - yt^{-1/\alpha}) - G_\alpha(1, \cdot)]\|_{L^2}.
\end{aligned}$$

Hence, using the continuity of the translation on L^2, for all $\varepsilon > 0$, we can find a $\delta > 0$ such that

$$\begin{aligned}
&t^{(1/2\alpha + j/\alpha) + 1/\alpha} \sup_{(s,y) \in \Omega_1} \|\partial_x^{j+1} [G_\alpha(t-s, \cdot - y) - G_\alpha(t, \cdot)]\|_{L^2} \\
&\qquad \leq \sup_{\substack{0 \leq \tau \leq \delta \\ |z| \leq \delta}} \|\partial_x^{j+1} [G_\alpha(1-\tau, \cdot - z) - G_\alpha(1, \cdot)]\|_{L^2} \leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

We deduce

$$t^{(1/2\alpha+j/\alpha)+1/\alpha}II_{211} \le c\varepsilon \int_0^{\delta t} \|u(s)\|_{L^2}^2 ds \le c\varepsilon \int_0^{\delta t} (1+s)^{-1/\alpha} ds \le c\varepsilon.$$

Now for any $(s,y) \in \Omega_2$, we have

$$\begin{aligned}\|\partial_x^{j+1}[G_\alpha(t-s,\cdot-y) - G_\alpha(t,\cdot)]\|_{L^2} &\le \|\partial_x^{j+1}G_\alpha(t-s)\|_{L^2} + \|\partial_x^{j+1}G_\alpha(t)\|_{L^2}\\ &\le ct^{-1/2\alpha-(j+1)/\alpha},\end{aligned}$$

which yields

$$t^{(1/2\alpha+j/\alpha)+1/\alpha}II_{212} \le c\int_0^\infty \int_{|y|\ge \delta t^{1/\alpha}} u^2(s,y)dyds \to 0$$

by the dominated convergence theorem.
It remains to estimate II_{22}, we have

$$\begin{aligned}II_{22} &= c\int_{\delta t}^t \|\partial_x^{j+1}G_\alpha(t-s) * u^2(s) - \|u(s)\|_{L^2}^2 \partial_x^{j+1}G_\alpha(t)\|_{L^2} ds\\ &\le c\int_{\delta t}^t \|\partial_x^{j+1}G_\alpha(t-s) * u^2(s)\|_{L^2} ds + c\int_{\delta t}^t (1+s)^{-1/\alpha} ds \|\partial_x^{j+1}G_\alpha(t)\|_{L^2}\\ &= II_{221} + II_{222}.\end{aligned}$$

The first term is bounded by

$$\begin{aligned}II_{221} &\le c\int_{\delta t}^t \Big(\int_{-\infty}^\infty |\xi|^{2(j+1)} e^{-2(t-s)|\xi|^\alpha} |\widehat{u^2}(s,\xi)|^2 d\xi\Big)^{1/2} ds\\ &\le c\int_{\delta t}^t [\|G_\alpha(1+t-s)\|_{L^2}\|\partial_x^{j+1}u^2(s)\|_{L^1} + e^{-(t-s)}\|\partial_x^{j+1}u^2(s)\|_{L^2}]ds\\ &\le c\int_{\delta t}^t [(1+t-s)^{-1/2\alpha}(1+s)^{-2/\alpha-j/\alpha} + e^{-(t-s)}(1+s)^{-5/2\alpha-j/\alpha}]ds\\ &\le ct^{-1/2\alpha-j/\alpha-1/\alpha}\Big(t^{-1/2\alpha}\int_0^t (1+s)^{-1/2\alpha} ds\Big) + ct^{-5/2\alpha-j/\alpha}\end{aligned}$$

and thus $t^{1/2\alpha+j/\alpha+1/\alpha}II_{221} \to 0$. On the other hand, we have immediately

$$II_{222} \le ct^{-1/2\alpha-j/\alpha-1/\alpha}t^{1-1/\alpha},$$

which achieves the proof of (7.14). □

5.2.2 The case $\alpha = 1$

The proof of (7.15) uses the same arguments together with the following result.

Lemma 7.8. *Under the assumptions of Theorem 7.4 (ii),*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{\log t} \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} u^2(s,y)dyds = \frac{M^2}{2\pi}.$$

Proof. First note that

$$\frac{1}{\log t} \int_0^1 \int_{-\infty}^{\infty} u^2(s,y)dyds \le \frac{c}{\log t} \int_0^1 (1+s)^{-1} ds \le \frac{c}{\log t} \to 0$$

and it remains to calculate the limit as $t \to \infty$ of

$$\begin{aligned} \frac{1}{\log t} \int_1^t \int_{-\infty}^{\infty} u^2(s,y)dyds &= \frac{1}{\log t} \int_1^t \int_{-\infty}^{\infty} (u^2(s,y) - (MG_1(s,y))^2)dyds \\ &+ \frac{1}{\log t} \int_1^t \int_{-\infty}^{\infty} (MG_1(s,y))^2 dyds. \end{aligned} \tag{7.26}$$

Using Theorem 7.3 as well as estimate (7.9), we get for all $s > 1$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |u^2(s,y) - (MG_1(s,y))^2| dy &\le \|u(s) + MG_1(s)\|_{L^2} \|u(s) - MG_1(s)\|_{L^2} \\ &\le cs^{-1/2}\big(\|u(s) - S_1(s) * u_0\|_{L^2} \\ &\quad + \|S_1(s) * u_0 - MG_1(s)\|_{L^2}\big) \\ &\le cs^{-1/2}(s^{-3/2}\log s + s^{-3/2}) \\ &\le cs^{-2}\log s. \end{aligned}$$

It follows that

$$\frac{1}{\log t} \int_1^t \int_{-\infty}^{\infty} |u^2(s,y) - (MG_1(s,y))^2| dyds \le \frac{c}{\log t} \int_1^t s^{-2} \log s ds \to 0$$

by dominated convergence. The last term in (7.26) is equal to

$$\begin{aligned} \frac{1}{\log t} \int_1^t \int_{-\infty}^{\infty} (MG_1(s,y))^2 dyds &= \frac{M^2}{\log t} \int_1^t \int_{-\infty}^{\infty} s^{-2}(G_1(1,y/s))^2 dyds \\ &= \frac{M^2}{\log t} \int_1^t \frac{ds}{s} \int_{-\infty}^{\infty} (G_1(1,x))^2 dx \\ &= M^2 \|G_1(1)\|_{L^2}^2 \\ &= \frac{M^2}{2\pi}. \end{aligned}$$

□

Proof of Theorem 7.4 (ii). It is sufficient to show that

$$\frac{t^{3/2+j}}{\log t}\Big\| \int_0^t \partial_x S_1(t-s) * u^2(s)ds - \frac{M^2}{2\pi}(\log t)\partial_x G_1(t)\Big\|_{\dot{H}^j} \to 0.$$

for all $j \geq 0$. As in Theorem 7.4 (i), we can replace $S_\alpha(t-s)$ by $G_\alpha(t-s)$ by writing

$$\begin{aligned}
&\Big\| \int_0^t \partial_x S_1(t-s) * u^2(s)ds - \frac{M^2}{2\pi}(\log t)\partial_x G_1(t)\Big\|_{\dot{H}^j} \\
&\leq \Big\| \int_0^t \partial_x [S_1(t-s) - G_1(-t-s)] * u^2(s)ds\Big\|_{\dot{H}^j} \\
&\quad + \Big\| \int_0^t \partial_x G_1(t-s) * u^2(s)ds - \frac{M^2}{2\pi}(\log t)\partial_x G_1(t)\Big\|_{\dot{H}^j}
\end{aligned}$$

and using (7.20). Last term in the previous inequality is bounded by

$$\begin{aligned}
&\leq \Big\| \int_0^t \partial_x G_1(t-s) * u^2(s)ds - \Big(\int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} u^2(s,y)dyds\Big)\partial_x G_1(t)\Big\|_{\dot{H}^j} \\
&\quad + \Big\|\Big(\int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} u^2(s,y)dyds\Big)\partial_x G_1(t) - \frac{M^2}{2\pi}(\log t)\partial_x G_1(t)\Big\|_{\dot{H}^j}.
\end{aligned}$$

The first term is estimated exactly in the same way that II_2 in Theorem 7.4 (i) and for the second one, Lemma 7.8 provides

$$\begin{aligned}
&\frac{t^{3/2+j}}{\log t}\Big\|\Big(\int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} u^2(s,y)dyds\Big)\partial_x G_1(t) - \frac{M^2}{2\pi}(\log t)\partial_x G_1(t)\Big\|_{\dot{H}^j} \\
&\leq t^{3/2+j}\Big|\frac{1}{\log t}\int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} u^2(s,y)dyds - \frac{M^2}{2\pi}\Big| \|\partial_x^{j+1} G_1(t)\|_{L^2} \\
&\leq c\Big|\frac{1}{\log t}\int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} u^2(s,y)dyds - \frac{M^2}{2\pi}\Big| \to 0.
\end{aligned}$$

□

5.2.3 The case $1 < \alpha < 2$

Finally we consider the case $1 < \alpha < 2$.

Proof of Theorem 7.5. We prove the result when $p = 2$ and $u_0 \in H^{j+2}(\mathbb{R})$.
Step 1. $\|F^n(t)\|_{\dot{H}^j}$ decays like $\|u(t)\|_{\dot{H}^j}$.
If $n = 0$, then for all $j \geq 0$, $\|F^0(t)\|_{\dot{H}^j} = \|\partial_x^j S_\alpha(t) * u_0\|_{L^2} \leq c(1+t)^{-1/2\alpha - j/\alpha}$. Let

$n \geq 0$ such that for all $j \geq 0$, $\|F^n(t)\|_{\dot{H}^j} \leq c(1+t)^{-1/2\alpha - j/\alpha}$. Then, for any $t \leq 1$,

$$\begin{aligned}
\|F^{n+1}(t)\|_{\dot{H}^j} &\leq \|S_\alpha(t) * u_0\|_{\dot{H}^j} + \int_0^t \|S_\alpha(t-s) * \partial_x (F^n(s))^2\|_{\dot{H}^j} ds \\
&\leq \|G_\alpha(t)\|_{L^1} \|u_0\|_{\dot{H}^j} + \int_0^1 \|G_\alpha(t-s)\|_{L^1} \|\partial_x^{j+1}(F^n(s))\|_{L^2} ds \\
&\leq c.
\end{aligned}$$

Now assume $t > 1$. We have

$$\begin{aligned}
\|F^{n+1}(t)\|_{\dot{H}^j} &\leq \|S_\alpha(t) * u_0\|_{\dot{H}^j} + \int_0^t \|S_\alpha(t-s) * \partial_x (F^n(s))^2\|_{\dot{H}^j} ds \\
&\leq c(1+t)^{-1/2\alpha - j/\alpha} + \int_0^{t/2} \dots ds + \int_{t/2}^t \dots ds.
\end{aligned}$$

The integrand over $[0, t/2]$ is estimated as follows

$$\begin{aligned}
\int_0^{t/2} \dots ds &\leq \int_{t/2}^t \|\partial_x^{j+1} S_\alpha(t-s)\|_{L^2} \|F^n(s)\|_{L^2}^2 ds \\
&\leq c \int_0^{t/2} (t-s)^{-1/2\alpha - (j+1)/\alpha} (1+s)^{-1/\alpha} ds \\
&\leq ct^{-1/2\alpha - j/\alpha} \Big(t^{-1/\alpha} \int_0^t (1+s)^{-1/\alpha} ds \Big) \\
&\leq ct^{-1/2\alpha - j/\alpha}.
\end{aligned}$$

For the second one, one splits

$$\begin{aligned}
\int_{t/2}^t \dots ds &= c \int_{t/2}^t \Big(\int_{-\infty}^{\infty} |\xi|^{2(j+1)} e^{-2(t-s)|\xi|^\alpha} |\widehat{(F^n(s))}^2(\xi)|^2 d\xi \Big)^{1/2} ds \\
&\leq c \int_{t/2}^t \Big(\int_{|\xi|<1} \dots d\xi \Big)^{1/2} ds + \int_{t/2}^t \Big(\int_{|\xi|>1} \dots d\xi \Big)^{1/2} ds \\
&:= I + II.
\end{aligned}$$

Term I is bounded by

$$\begin{aligned}
I &\leq c\int_{t/2}^{t} \|\partial_x^{j+1} S_\alpha(1+t-s) * F^n(s)\|_{L^2} ds \\
&\leq c\int_{t/2}^{t} \|S_\alpha(1+t-s)\|_{L^2}\|\partial_x^{j+1}(F^n(s)^2)\|_{L^1} ds \\
&\leq c\int_{t/2}^{t} (1+t-s)^{-1/2\alpha}\|F^n(s)\|_{L^2}\|\partial_x^{j+1}F^n(s)\|_{L^2} ds \\
&\leq c\int_{t/2}^{t} (1+t-s)^{-1/2\alpha}(1+s)^{-2/\alpha-j/\alpha} ds \\
&\leq ct^{-1/2\alpha-j/\alpha}\Big(t^{-3/2\alpha}\int_0^t (1+s)^{-1/2\alpha} ds\Big) \\
&\leq ct^{-1/2\alpha-j/\alpha}
\end{aligned}$$

and II is estimated by

$$\begin{aligned}
\int_{t/2}^{t} e^{-(t-s)}\|\partial_x^{j+1}(F^n(s)^2)\|_{L^2} ds &\leq c\int_{t/2}^{t} e^{-(t-s)}\|F^n(s)\|_{L^2}\|\partial_x^{j+1}F^n(s)\|_{L^\infty} ds \\
&\leq c\int_{t/2}^{t} e^{-(t-s)}\|F^n(s)\|_{L^2}\|\partial_x^{j+1}F^n(s)\|_{L^2}^{1/2} \\
&\quad\times \|\partial_x^{j+2}F^n(s)\|_{L^2}^{1/2} ds \\
&\leq c\int_{t/2}^{t} e^{-(t-s)}(1+s)^{-5/2\alpha-j/\alpha} ds \\
&\leq ct^{-5/2\alpha-j/\alpha} \leq ct^{-1/2\alpha-j/\alpha}.
\end{aligned}$$

We have showed that $\|F^{n+1}(t)\|_{\dot{H}^j} \leq c(1+t)^{-1/2\alpha-j/\alpha}$ and by induction, this estimate becomes true for any $n \geq 0$.

Step 2. We claim that if for all $j \geq 0$, $\|u(t) - F^n(t)\|_{\dot{H}^j} \leq c(1+t)^{-r_j(n)}$ and $r_j(n) = \frac{j}{\alpha} + r_0(n)$, then

$$\|u(t)-F^{n+1}(t)\|_{\dot{H}^j} \leq c\begin{cases} (1+t)^{-1/2\alpha-j/\alpha-1/\alpha} & \text{if } 1-\frac{1}{2\alpha}-r_0(n)<0, \\ (1+t)^{-1/2\alpha-j/\alpha-1/\alpha}\log(1+t) & \text{if } 1-\frac{1}{2\alpha}-r_0(n)=0, \\ (1+t)^{-1/2\alpha-j/\alpha-1/\alpha+1-1/2\alpha-r_0(n)} & \text{if } 1-\frac{1}{2\alpha}-r_0(n)>0. \end{cases}$$

Indeed, first for $t \leq 1$ it is clear that $\|u(t) - F^{n+1}(t)\|_{\dot{H}^j}$ is bounded. If $t > 1$ we have by definition of F^n,

$$\begin{aligned}
\|u(t) - F^{n+1}(t)\|_{\dot{H}^j} &\leq \frac{1}{2}\int_0^t \|\partial_x^{j+1}S_\alpha(t-s) * [u^2(s) - (F^n(s))^2]\|_{L^2} ds \\
&= \int_0^{t/2} \ldots ds + \int_{t/2}^{t} \ldots ds := III + IV.
\end{aligned}$$

We bound the contribution of III by

$$
\begin{aligned}
III &\leq c\int_0^{t/2} \|\partial_x^{j+1} S_\alpha(t-s)\|_{L^2}\|u^2(s)-(F^n(s))^2\|_{L^1}ds\\
&\leq c\int_0^{t/2} (t-s)^{-1/2\alpha-(j+1)/\alpha}\|u(s)-F^n(s)\|_{L^2}(\|u(s)\|_{L^2}+\|F^n(s)\|_{L^2})ds\\
&\leq c\int_0^{t/2} (t-s)^{-1/2\alpha-(j+1)/\alpha}(1+s)^{-1/2\alpha-r_0(n)}ds\\
&\leq c\begin{cases} (1+t)^{-1/2\alpha-j/\alpha-1/\alpha} & \text{if} \quad 1-\frac{1}{2\alpha}-r_0(n)<0,\\ (1+t)^{-1/2\alpha-j/\alpha-1/\alpha}\log(1+t) & \text{if} \quad 1-\frac{1}{2\alpha}-r_0(n)=0,\\ (1+t)^{-1/2\alpha-j/\alpha-1/\alpha+1-1/2\alpha-r_0(n)} & \text{if} \quad 1-\frac{1}{2\alpha}-r_0(n)>0.\end{cases}
\end{aligned}
$$

Then we decompose IV as

$$
\begin{aligned}
IV &= c\int_{t/2}^t \Big(\int_{-\infty}^{\infty}|\xi|^{2(j+1)}e^{-2(t-s)|\xi|^\alpha}|\mathcal{F}[u^2(s)-(F^n(s))^2](\xi)|^2d\xi\Big)^{1/2}ds\\
&\leq c\int_{t/2}^t \Big(\int_{|\xi|<1}\dots d\xi\Big)^{1/2}ds + \int_{t/2}^t \Big(\int_{|\xi|>1}\dots d\xi\Big)^{1/2}ds\\
&:= IV_1+IV_2.
\end{aligned}
$$

Low frequencies are treated as follows,

$$
\begin{aligned}
IV_1 &\leq \int_{t/2}^t \|\partial_x^{j+1}S_\alpha(1+t-s)*[u^2(s)-(F^n(s))^2]\|_{L^2}ds\\
&\leq c\int_{t/2}^t \|S_\alpha(1+t-s)\|_{L^2}\|\partial_x^{j+1}[u^2(s)-(F^n(s))^2]\|_{L^1}ds\\
&\leq c\int_{t/2}^t (1+t-s)^{-1/2\alpha}\sum_{k=0}^{j+1}\|\partial_x^k[u(s)-F^n(s)]\|_{L^2}(\|\partial_x^{j+1-k}u(s)\|_{L^2}+\|\partial_x^{j+1-k}F^n(s)\|_{L^2})ds\\
&\leq c\int_{t/2}^t (1+t-s)^{-1/2\alpha}\sum_{k=0}^{j+1}(1+s)^{-r_k(n)-1/2\alpha-(j+1-k)/\alpha}ds\\
&\leq c\sum_{k=0}^{j+1} t^{-r_k(n)+k/\alpha-j/\alpha+1-2/\alpha} \qquad (7.27)
\end{aligned}
$$

and since $r_k(n) = \frac{k}{\alpha} + r_0(n)$, we infer $IV_1 \le ct^{-r_0(n)-j/\alpha+1-2/\alpha}$. In the same way,

$$
\begin{aligned}
IV_2 &\le c \int_{t/2}^{t} e^{-(t-s)} \|\partial_x^{j+1}[u^2(s) - (F^n(s))^2]\|_{L^2} ds \\
&\le c \int_{t/2}^{t} e^{-(t-s)} \sum_{k=0}^{j+1} (1+s)^{-r_k(n)-1/\alpha-(j+1-k)/\alpha} ds \\
&\le c \sum_{k=0}^{j+1} t^{-r_k(n)+k/\alpha-j/\alpha-2/\alpha} \\
&\le ct^{-r_0(n)-j/\alpha-2/\alpha}.
\end{aligned}
\tag{7.28}
$$

Combining (7.27) and (7.28), we deduce

$$
IV \le c \begin{cases} (1+t)^{-1/2\alpha-j/\alpha-1/\alpha} & \text{if } 1 - \frac{1}{2\alpha} - r_0(n) < 0, \\ (1+t)^{-1/2\alpha-j/\alpha-1/\alpha} \log(1+t) & \text{if } 1 - \frac{1}{2\alpha} - r_0(n) = 0, \\ (1+t)^{-1/2\alpha-j/\alpha-1/\alpha+1-1/2\alpha-r_0(n)} & \text{if } 1 - \frac{1}{2\alpha} - r_0(n) > 0. \end{cases}
$$

Step 3. Construction of $r_j(n)$ and conclusion.
We define the sequence $r_j(n)$ by iteration. Set $r_j(0) = \frac{1}{2\alpha} + \frac{j}{\alpha} + \frac{2}{\alpha} - 1$ for all $j \ge 0$. We have $\|u(t) - F^0(t)\|_{\dot{H}^j} \le c(1+t)^{-r_j(0)}$ by Theorem 7.3. If $r_j(n)$ is constructed for all j, then we set

$$
r_j(n+1) = \begin{cases} \frac{1}{2\alpha} + \frac{j}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} & \text{if } 1 - \frac{1}{2\alpha} - r_0(n) \le 0, \\ r_0(n) + \frac{j}{\alpha} + \frac{2}{\alpha} - 1 & \text{if } 1 - \frac{1}{2\alpha} - r_0(n) > 0. \end{cases}
\tag{7.29}
$$

We easily see that $r_j(n) = \frac{j}{\alpha} + r_0(n)$ for all j, thus Step 2 shows that for any $n \ge 0$ satisfying $1 - \frac{1}{2\alpha} - r_0(n) \le 0$,

$$
\|u(t) - F^{n+1}(t)\|_{\dot{H}^j} \le c \begin{cases} (1+t)^{-1/2\alpha-j/\alpha-1/\alpha} & \text{if } 1 - \frac{1}{2\alpha} - r_0(n) < 0, \\ (1+t)^{-1/2\alpha-j/\alpha-1/\alpha} \log(1+t) & \text{if } 1 - \frac{1}{2\alpha} - r_0(n) = 0. \end{cases}
\tag{7.30}
$$

Let us prove that the sequence $n \mapsto r_j(n)$ is eventually constant. Suppose that $1 - \frac{1}{2\alpha} - r_0(n) > 0$ for all $n \ge 0$. Then by (7.29) we obtain $r_j(n+1) = r_0(n) + \frac{j}{\alpha} + \frac{2}{\alpha} - 1$ $(\forall n)$. In particular $r_0(n+1) = r_0(n) + \frac{2}{\alpha} - 1$ and thus $r_0(n) = n(\frac{2}{\alpha} - 1) + r_0(0) = (n+1)(\frac{2}{\alpha} - 1) + \frac{1}{2\alpha}$. Since $\frac{2}{\alpha} - 1 > 0$, this contradicts the assumption $r_0(n) < 1 - \frac{1}{2\alpha}$ for n large enough. Hence there exists $n \ge 0$ such that $1 - \frac{1}{2\alpha} - r_0(n) \le 0$ and we can set

$$
N = \min\left\{n \ge 0 : 1 - \frac{1}{2\alpha} - r_0(n) \le 0\right\}.
$$

For this value of N, it is not too difficult to see that

$$
r_j(n) = \begin{cases} (n+1)(\frac{2}{\alpha} - 1) + \frac{1}{2\alpha} + \frac{j}{\alpha} & \text{if } n \le N, \\ \frac{1}{2\alpha} + \frac{j}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} & \text{if } n > N. \end{cases}
$$

It follows that $N = \min\{n \geq 0 : 1-\frac{1}{\alpha}-(n+1)(\frac{2}{\alpha}-1) \leq 0\} = \min\{n \geq 0 : \alpha \leq \frac{2n+3}{n+2}\}$. From this and (7.30) we infer

$$\|u(t) - F^{N+1}(t)\|_{\dot{H}^j} \leq c \begin{cases} (1+t)^{-1/2\alpha - j/\alpha - 1/\alpha} & \text{if} \quad \alpha < \frac{2N+3}{N+2}, \\ (1+t)^{-1/2\alpha - j/\alpha - 1/\alpha} \log(1+t) & \text{if} \quad \alpha = \frac{2N+3}{N+2}. \end{cases}$$

□

6 Appendix

Our aim here is to show that for $1 < \alpha < 2$, solutions to (dKdV) satisfy assumptions (7.11)-(7.12). The proof is similar to that of Hayashi and Naumkin [HN06] in the context of the (KdVB) equation, see also [HKNS06].

Lemma 7.9. *If $u_0 \in L^2(\mathbb{R})$ then the corresponding solution u satisfies*

$$\|u\|_{L_t^\infty L_x^2} \leq c \quad \textit{and} \quad \||D|^{\alpha/2} u\|_{L^2_{xt}} \leq c.$$

Moeover, if $u_0 \in H^1(\mathbb{R})$, then

$$\|u_x\|_{L_t^\infty L_x^2} \leq c \quad \textit{and} \quad \||D|^{1+\alpha/2} u\|_{L^2_{xt}} \leq c.$$

Proof. Multiply (dKdV) by u and then integrate over $\mathbb{R}$:

$$\partial_t \|u(t)\|_{L^2}^2 + 2\||D|^{\alpha/2} u(t)\|_{L^2}^2 = 0. \tag{7.31}$$

Integrating this equality over $[0,t]$ we get

$$\|u(t)\|_{L^2}^2 + 2\int_0^t \||D|^{\alpha/2} u(s)\|_{L^2}^2 ds = \|u_0\|_{L^2}^2. \tag{7.32}$$

This proves the first estimates in Lemma 7.9.

Now we multiply (dKdV) by $u_{xx} + \frac{1}{2}u^2$ and integrate over $\mathbb{R}$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} (u_t + u_{xxx} + |D|^\alpha u + u u_x)(u_{xx} + \frac{1}{2}u^2) = 0.$$

We have $\int_{-\infty}^{\infty} u_t u_{xx} = -\frac{1}{2}\partial_t \|u_x(t)\|_{L^2}^2$, $\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} u_t u^2 = \frac{1}{6}\partial_t \int_{-\infty}^{\infty} u^3$ and by Plancherel we have $\int_{-\infty}^{\infty} |D|^\alpha u u_{xx} = -\||D|^{1+\alpha/2} u\|_{L^2}^2$. On the other hand

$$\int_{-\infty}^{\infty} (u_{xxx} + u u_x)(u_{xx} + \frac{1}{2}u^2) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \partial_x (u_{xx} + \frac{1}{2}u^2)^2 = 0.$$

We deduce

$$\partial_t \|u_x(t)\|_{L^2}^2 + 2\||D|^{1+\alpha/2} u(t)\|_{L^2}^2 = \frac{1}{3}\partial_t \int_{-\infty}^{\infty} u^3(t) + \int_{-\infty}^{\infty} |D|^\alpha u u^2$$

and

$$
\begin{aligned}
&\|u_x(t)\|_{L^2}^2 + 2\int_0^t \||D|^{1+\alpha/2}u(s)\|_{L^2}^2 ds \\
&= \|\partial_x u_0\|_{L^2}^2 + \frac{1}{3}\int_{-\infty}^{\infty} u^3(t) - \frac{1}{3}\int_{-\infty}^{\infty} u_0^3 + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} |D|^\alpha u u^2 \\
&\le c + \frac{1}{3}\int_{-\infty}^{\infty} |u^3(t)| + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} |D|^\alpha u u^2.
\end{aligned}
$$

Using the elementary identity $2ab \le \gamma a^2 + \frac{1}{\gamma}b^2$ we obtain

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{3}\int_{-\infty}^{\infty} |u^3(t)| &\le \frac{1}{6\gamma}\int_{-\infty}^{\infty} u^2(t) + \frac{\gamma}{6}\int_{-\infty}^{\infty} u^4(t) \\
&\le c + c\gamma \|u(t)\|_{L^2}^2 \|u(t)\|_{L^\infty}^2 \\
&\le c + c\gamma \|u(t)\|_{L^2}^4 + c\gamma \|u(t)\|_{L^\infty}^4 \\
&\le c + c\gamma \|u_x(t)\|_{L^2}^2
\end{aligned}
$$

where we used (7.18) in the last inequality. We choose $\gamma = 1/2c$ so that

$$
\frac{1}{2}\|u_x(t)\|_{L^2}^2 + 2\int_0^t \||D|^{1+\alpha/2}u(s)\|_{L^2}^2 ds \le c + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} |D|^\alpha u u^2.
$$

By Plancherel theorem and Sobolev embedding we have

$$
\begin{aligned}
\int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} |D|^\alpha u u^2 \; &\le \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \left||D|^{\alpha/2}u |D|^{\alpha/2}u^2\right| \\
&\le \frac{1}{2\gamma}\int_0^t \||D|^{\alpha/2}u(s)\|_{L^2}^2 ds + \frac{\gamma}{2}\int_0^t \||D|^{\alpha/2}u^2(s)\|_{L^2}^2 ds \\
&\le c + c\gamma \int_0^t \||D|^{\alpha/2+1/2-\varepsilon}u^2(s)\|_{L^{1/(1-\varepsilon)}}^2 ds.
\end{aligned}
$$

Using the fractional Leibniz rule we get

$$
\begin{aligned}
\int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} |D|^\alpha u u^2 \; &\le c + c\gamma \int_0^t \||D|^{\alpha/2+1/2-\varepsilon}u(s)\|_{L^{(\frac{1}{2}-\varepsilon)^{-1}}}^2 \|u(s)\|_{L^2}^2 ds \\
&\le c + c\gamma \int_0^t \||D|^{\alpha/2+1/2}u(s)\|_{L^2}^2 ds \\
&\le c + c\gamma \int_0^t \||D|^{\alpha/2}u(s)\|_{L^2} \||D|^{1+\alpha/2}u(s)\|_{L^2} ds \\
&\le c + c\gamma \int_0^t \||D|^{\alpha/2}u(s)\|_{L^2}^2 ds + c\gamma \int_0^t \||D|^{1+\alpha/2}u(s)\|_{L^2}^2 ds \\
&\le c + c\gamma \int_0^t \||D|^{1+\alpha/2}u(s)\|_{L^2}^2 ds.
\end{aligned}
$$

We choose $\gamma = 1/c$ to conclude

$$\frac{1}{2}\|u_x(t)\|_{L^2}^2 + \int_0^t \||D|^{1+\alpha/2}u(s)\|_{L^2}^2 ds \leq c.$$

$\square$

Lemma 7.10. *Let $j \geq 1$ and $u_0 \in H^j(\mathbb{R})$. Then we have*

$$\|\partial_x^j u\|_{L_t^\infty L_x^2} \leq c \quad \textit{and} \quad \|\partial_x^j u\|_{L_{xt}^2} \leq c.$$

In particular, assumption (7.11) is satisfied.

Proof. We choose $0 < \rho \leq \alpha - 1$ small enough such that $1/\rho \in \mathbb{N}$ and we set $N = j/\rho$. We show by induction that for each $n = 0, \dots, N$, one has

$$\||D|^{n\rho}u\|_{L_t^\infty L_x^2} + \||D|^{\alpha/2}\langle D\rangle^{n\rho}u\|_{L_{xt}^2} \leq c. \tag{7.33}$$

By Lemma 7.9, the claim is true for $n = 0$. Suppose now that (7.33) holds for some $0 \leq n < N$. Multiply (dKdV) by $|D|^{2\rho(n+1)}u$ and integrate over $\mathbb{R}$ to get

$$\int_{-\infty}^{\infty}(u_t + u_{xxx} + |D|^\alpha u + uu_x)|D|^{2\rho(n+1)}u = 0.$$

Then we integrate in time over $[0, t]$ and obtain

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\||D|^{\rho(n+1)}u(t)\|_{L^2}^2 &+ \int_0^t \||D|^{\alpha/2+\rho(n+1)}u(s)\|_{L^2}^2 ds \\ &= \frac{1}{2}\|u_0\|_{\dot{H}^{\rho(n+1)}} + \int_0^t\int_{-\infty}^{\infty} uu_x|D|^{2\rho(n+1)}u.\end{aligned}$$

We have by Plancherel

$$\begin{aligned}&\Big|\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\partial_x u^2|D|^{2\rho(n+1)}u\Big| \\ &\quad\leq c\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\big||D|^{1-\alpha/2+\rho(n+1)}u^2|D|^{\alpha/2+\rho(n+1)}u\big| \\ &\quad\leq \frac{1}{\gamma}\int_0^t \||D|^{1-\alpha/2+\rho(n+1)}u^2(s)\|_{L^2}^2 ds + \gamma\int_0^t \||D|^{\alpha/2+\rho(n+1)}u(s)\|_{L^2}^2 ds\end{aligned}$$

and

$$\int_0^t \||D|^{1-\alpha/2+\rho(n+1)}u^2(s)\|_{L^2}^2 ds \leq c\int_0^\infty \|u\|_{L_{xt}^\infty}^2\||D|^{\alpha/2}\langle D\rangle^{n\rho}u(s)\|_{L^2}^2 ds \leq c$$

by the fractional Leibniz rule, the induction hypothesis and Lemma 7.9. The claim follows by choosing γ small enough. $\square$

Lemma 7.11. *Let $u_0 \in L^1(\mathbb{R}) \cap W_2^{j+1,1}(\mathbb{R})$. Then for all $t > 0$,*

$$\|\partial_x^j S_\alpha(t) * u_0\|_{L^1} \leq c(1+t)^{-j/\alpha}(\|u_0\|_{L^1} + \|u_0\|_{W_2^{j+1,1}}).$$

Proof. By virtue of Lemma 7.4, we have for $t > 1$

$$\|\partial_x^j S_\alpha(t) * u_0\|_{L^1} \leq \|\partial_x^j S_\alpha(t)\|_{L^1}\|u_0\|_{L^1} \leq c\|u_0\|_{L^1}(1+t)^{-j/\alpha}.$$

When $t < 1$, we use estimate (7.19) to get

$$\|\partial_x^j S_\alpha(t) * u_0\|_{L^1} \leq c\|\partial_x^j S_\alpha(t) * u_0\|_{L^2}^{1/2}\|\partial_\xi(\xi^j e^{it\xi^3 - t|\xi|^\alpha}\widehat{u_0}(\xi))\|_{L^2}^{1/2}. \tag{7.34}$$

It is clear that

$$\|\partial_x^j S_\alpha(t) * u_0\|_{L^2} = \|\partial_x^j G_\alpha(t) * u_0\|_{L^2} \leq \|G_\alpha(t)\|_{L^1}\|u_0\|_{\dot{H}^j} \leq c\|u_0\|_{\dot{H}^j}.$$

Now we bound the second factor in (7.34) as follows

$$\begin{aligned}\|\partial_\xi(\xi^j e^{it\xi^3 - t|\xi|^\alpha}\widehat{u_0}(\xi))\|_{L^2} &\leq c\|t(\xi^2 + |\xi|^{\alpha-1})\xi^j e^{-t|\xi|^\alpha}\widehat{u_0}(\xi)\|_{L^2} \\ &\quad + \|e^{-t|\xi|^\alpha}\partial_\xi\widehat{\partial_x^j u_0}(\xi)\|_{L^2} \\ &\leq c\sup_\xi\left(t(|\xi| + |\xi|^{\alpha-1})e^{-t|\xi|^\alpha}\right)\|u_0\|_{H^{j+1}} + \|u_0\|_{W_2^{j,1}} \\ &\leq c\|u_0\|_{W_2^{j+1,1}}.\end{aligned}$$

□

Lemma 7.12. *Let $u_0 \in L^1(\mathbb{R}) \cap W_2^{j+1,1}(\mathbb{R})$. Then for all $0 < t < 1$, we have*

$$\|\partial_x^j u(t)\|_{L^1} \leq c.$$

Proof. By the integral formulation of (dKdV) and Lemmas 7.10 and 7.11, we get

$$\begin{aligned}\|\partial_x^j u(t)\|_{L^1} &\leq \|\partial_x^j S_\alpha(t) * u_0\|_{L^1} + \int_0^t \|S_\alpha(t-s) * \partial_x^{j+1}u^2(s)\|_{L^1}ds \\ &\leq c + \int_0^t \|S_\alpha(t-s)\|_{L^1}\|\partial_x^{j+1}u^2(s)\|_{L^1}ds \\ &\leq c + c\int_0^t s^{1/2-3/2\alpha}\|u\|_{L_t^\infty L_x^2}\|\partial_x^{j+1}u\|_{L_t^\infty L_x^2}ds \leq c.\end{aligned}$$

□

Lemma 7.13. *Let $u_0 \in L^1(\mathbb{R}) \cap H^1(\mathbb{R})$. Suppose that*

$$\|u\|_{L_t^r L_x^2} \leq c \tag{7.35}$$

where $4 < r < 6$. Then for $\frac{r}{3} < p \leq \infty$,

$$\|u_x\|_{L_t^p L_x^2} \leq c. \tag{7.36}$$

Proof. First we see from Lemma 7.10 that

$$\|u_x\|_{L^p_t L^2_x} \le \|u_x\|_{L^p_{t<1} L^2_x} + \|u_x\|_{L^p_{t>1} L^2_x} \le c + \|u_x\|_{L^p_{t>1} L^2_x}.$$

By integral equation (7.6) we find

$$\begin{aligned} \|u_x(t)\|_{L^2} \le \|\partial_x S_\alpha(t) * u_0\|_{L^2} &+ \int_0^{t/2} \|\partial_x^2 S_\alpha(t-s)\|_{L^2} \|u(s)\|_{L^2}^2 ds \\ &+ \int_{t/2}^{t-\varepsilon} \|\partial_x^2 G_\alpha(t-s)\|_{L^1} \|u^2(s)\|_{L^2} ds \\ &+ \int_{t-\varepsilon}^{t} \|\partial_x G_\alpha(t-s)\|_{L^1} \|u(s)u_x(s)\|_{L^2} ds \end{aligned} \tag{7.37}$$

for all $t > 1$. We have the estimate

$$\|\partial_x S_\alpha(t) * u_0\|_{L^2} \le c\|u_0\|_{L^1}(1+t)^{-3/2\alpha},$$

which yields

$$\|\partial_x S_\alpha(\cdot) * u_0\|_{L^p_t L^2_x} \le c$$

for any $p > \frac{4}{3}$. By the Hölder inequality and assumption (7.35),

$$\int_0^{t/2} \|u(s)\|_{L^2}^2 ds \le t^{1-2/r}\Big(\int_0^{t/2} \|u(s)\|_{L^2}^r ds\Big)^{2/r} \le ct^{1-2/r}, \tag{7.38}$$

and thus

$$\begin{aligned} \Big\| \int_0^{t/2} \|\partial_x^2 S_\alpha(t-s)\|_{L^2} \|u(s)\|_{L^2}^2 ds \Big\|_{L^p_t} &\le c\Big\|(1+t)^{-5/2\alpha} \int_0^{t/2} \|u(s)\|_{L^2}^2 ds\Big\|_{L^p_t} \\ &\le c\|(1+t)^{1-5/2\alpha-2/r}\|_{L^p_t} \le c \end{aligned}$$

for $p > (\frac{2}{r} + \frac{5}{2\alpha} - 1)^{-1}$. Now we estimate the third summand in (7.37) by

$$\int_{t/2}^{t-\varepsilon} \|\partial_x^2 G_\alpha(t-s)\|_{L^1} \|u^2(s)\|_{L^2} ds \le c \int_\varepsilon^{t/2} s^{-2/\alpha} \|u(t-s)\|_{L^2}^{3/2} \|u_x(t-s)\|_{L^2}^{1/2} ds.$$

Using the Young inequality

$$\Big\| \int_a^b f(s)\phi(t-s)\psi(t-s)ds \Big\|_{L^p(\mathbb{R}^+)} \le \|f\|_{L^{p_1}(a,b)} \|\phi\|_{L^{p_2}(\mathbb{R}^+)} \|\psi\|_{L^{p_3}(\mathbb{R}^+)} \tag{7.39}$$

with $1 + \frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3}$, we obtain

$$\begin{aligned} \Big\| \int_{t/2}^{t-\varepsilon} \|\partial_x G_\alpha(t-s)\|_{L^1} \|u^2(s)\|_{L^2} ds \Big\|_{L^p_t} &\le c\|s^{-2/\alpha}\|_{L^{p_1}(\varepsilon,t/2)} \|u_x\|_{L^p_t L^2_x}^{1/2} \|u\|_{L^r_t L^2_x}^{3/2} \\ &\le \varepsilon^{1/p_1 - 2/\alpha} \|u_x\|_{L^p_t L^2_x}^{1/2} \\ &\le c\varepsilon^{2/p_1 - 3/\alpha - 1} + c\varepsilon^{1-1/\alpha} \|u_x\|_{L^p_t L^2_x} \end{aligned}$$

where $p_1 = (1 + \frac{1}{2p} - \frac{3}{2r})^{-1} > 1$. Similarly, we bound the last term in (7.37) by

$$\begin{aligned}\Big\| \int_{t-\varepsilon}^{t} \|\partial_x G_\alpha(t-s)\|_{L^1} \|u(s)u_x(s)\|_{L^2} ds \Big\|_{L_t^p} &\leq c \Big\| \int_0^\varepsilon s^{-1/\alpha} \|u(t-s)\|_{L^\infty} \|u_x(t-s)\|_{L^2} ds \Big\|_{L_t^p} \\ &\leq c \|s^{-1/\alpha}\|_{L^1(0,\varepsilon)} \|u\|_{L^\infty_{xt}} \|u_x\|_{L_t^p L_x^2} \\ &\leq c\varepsilon^{1-1/\alpha} \|u_x\|_{L_t^p L_x^2}.\end{aligned}$$

Gathering all these estimates we deduce

$$\|u_x\|_{L_t^p L_x^2} \leq c + c\varepsilon^{2/p_1 - 3/\alpha - 1} + c\varepsilon^{1-1/\alpha} \|u_x\|_{L_t^p L_x^2}.$$

It suffices to choose ε small enough to get estimate (7.36). □

Lemma 7.14. *Let $u_0 \in L^1(\mathbb{R}) \cap H^2(\mathbb{R})$. Then estimate*

$$\|u_{xx}\|_{L_t^p L_x^2} \leq c \tag{7.40}$$

holds for any $\frac{4}{3} \leq p \leq \infty$.

Proof. By Lemma 7.10, we reduce to estimate $\|u_{xx}\|_{L^p_{t>1} L_x^2}$. For any $t > 1$, we have

$$\begin{aligned}\|u_{xx}(t)\|_{L^2} \leq \|\partial_x^2 S_\alpha(t) * u_0\|_{L^2} &+ \int_0^{t-\varepsilon} \|\partial_x^2 G_\alpha(t-s)\|_{L^1} \|u(s)\|_{L^2}^{1/2} \|u_x(s)\|_{L^2}^{3/2} ds \\ &+ \int_{t-\varepsilon}^{t} \|\partial_x G_\alpha(t-s)\|_{L^1} \|u(s)\|_{L^\infty} \|u_{xx}(s)\|_{L^2} ds.\end{aligned}$$

First note that

$$\|\partial_x^2 S_\alpha(\cdot) * u_0\|_{L_t^p L_x^2} \leq c \|(1+t)^{-5/2\alpha}\|_{L_t^p} \leq c$$

for all $p \geq 1$. Next we get by the Young inequality (7.39)

$$\begin{aligned}&\Big\| \int_0^{t-\varepsilon} \|\partial_x^2 G_\alpha(t-s)\|_{L^1} \|u(s)\|_{L^2}^{1/2} \|u_x(s)\|_{L^2}^{3/2} ds \Big\|_{L_t^p} \\ &\qquad \leq c \|s^{-2/\alpha}\|_{L^{(\frac{1}{4}+\frac{1}{p})^{-1}}(\varepsilon,t)} \|u\|_{L_t^\infty L_x^2}^{1/2} \|u_x\|_{L_{xt}^2}^{3/2} \leq c\varepsilon^{1/p+1/4-2/\alpha}\end{aligned}$$

for $p \geq \frac{4}{3}$. Similarly we have

$$\begin{aligned}&\Big\| \int_{t-\varepsilon}^{t} \|\partial_x G_\alpha(t-s)\|_{L^1} \|u(s)\|_{L^\infty} \|u_{xx}(s)\|_{L^2} ds \Big\|_{L_t^p} \\ &\qquad \leq c \|s^{-1/\alpha}\|_{L^1(0,\varepsilon)} \|u\|_{L_{xt}^\infty} \|u_{xx}\|_{L_t^p L_x^2} \leq c\varepsilon^{1-1/\alpha} \|u_{xx}\|_{L_t^p L_x^2}.\end{aligned}$$

We conclude by taking ε small enough. □

Lemma 7.15. *Let $u_0 \in L^1(\mathbb{R}) \cap H^j(\mathbb{R})$, $j \in \{3, 4\}$. Then for all $1 \le p \le \infty$,*

$$\|\partial_x^j u\|_{L_t^p L_x^2} \le c. \tag{7.41}$$

Proof. As above we reduce to estimate $\|\partial_x^j u\|_{L^p_{t>1} L_x^2}$. By the integral formulation (7.6), we have

$$\begin{aligned}
\|\partial_x^j u(t)\|_{L^2} \le \|\partial_x^j S_\alpha(t) * u_0\|_{L^2} &+ \int_0^{t-\varepsilon} \|\partial_x^2 G_\alpha(t-s)\|_{L^1} \|\partial_x^{j-1} u^2(s)\|_{L^2} ds \\
&+ \int_{t-\varepsilon}^t \|\partial_x G_\alpha(t-s)\|_{L^1} \|\partial_x^j u^2(s)\|_{L^2} ds \\
&\le c(1+t)^{-1/2\alpha - j/\alpha} \\
&+ c\int_0^{t-\varepsilon} (t-s)^{-2/\alpha} \|u\|_{L_t^\infty L_t^2}^{1/2} \|u_x(s)\|_{L^2}^{1/2} \|\partial_x^{j-1} u(s)\|_{L^2} ds \\
&+ c\int_{t-\varepsilon}^t (t-s)^{-1/\alpha} \|u\|_{L^\infty_{xt}} \|\partial_x^j u(s)\|_{L^2} ds
\end{aligned}$$

for all $t > 1$. The first summand in the last estimate belongs to $L^p(\mathbb{R}^+)$ for any $1 \le p \le \infty$. Next we use the Young inequality to get

$$\begin{aligned}
\Big\| \int_0^{t-\varepsilon} (t-s)^{-2/\alpha} \|u_x(s)\|_{L^2}^{1/2} \|\partial_x^{j-1} u(s)\|_{L^2} ds \Big\|_{L_t^p} & \\
&\le c\|s^{-2/\alpha}\|_{L^p(\varepsilon,t)} \|u_x\|_{L^2_{xt}}^{1/2} \|\partial_x^{j-1} u\|_{L_t^{4/3} L_x^2}.
\end{aligned}$$

The fact that $\|\partial_x^{j-1} u\|_{L_t^{4/3} L_x^2}$ is bounded is a consequence of estimate (7.40) when $j = 3$, and will follow from the case $j = 3$ for $j = 4$. Therefore we have

$$\Big\| \int_0^{t-\varepsilon} (t-s)^{-2/\alpha} \|u_x(s)\|_{L^2}^{1/2} \|\partial_x^{j-1} u(s)\|_{L^2} ds \Big\|_{L_t^p} \le c\varepsilon^{1/p - 2/\alpha}.$$

For the last summand we get from (7.39) that

$$\begin{aligned}
\Big\| \int_{t-\varepsilon}^t (t-s)^{-1/\alpha} \|u\|_{L^\infty_{xt}} \|\partial_x^j u(s)\|_{L^2} ds \Big\|_{L_t^p} &\le c\|s^{-1/\alpha}\|_{L^1(0,\varepsilon)} \|\partial_x^j u\|_{L_t^p L_x^2} \\
&\le c\varepsilon^{1-1/\alpha} \|\partial_x^j u\|_{L_t^p L_x^2}.
\end{aligned}$$

Gathering all these estimates and taking ε small enough, we get (7.41). $\square$

Lemma 7.16. *Let $u_0 \in L^1(\mathbb{R}) \cap W_2^{3,1}(\mathbb{R})$. Assume that*

$$\|u\|_{L_t^r L_x^2} \le c \tag{7.42}$$

where $6 \le r \le \infty$. Then we have

$$\|u_{xx}\|_{L_t^p L_x^1} \le c \tag{7.43}$$

for $(\frac{1}{2} + \frac{1}{r})^{-1} < p \le \infty$. Moreover, if estimate (7.42) is true for $4 < r < 6$, then (7.43) holds for $\frac{r}{4} < p \le \infty$.

Proof. First we see that by Lemma 7.12, it is enough to estimate $\|u_{xx}\|_{L^p_{t>1}L^1_x}$. For all $t>1$, we have

$$\begin{aligned}\|u_{xx}(t)\|_{L^1} \le \|\partial_x^2 S_\alpha(t) * u_0\|_{L^1} &+ \int_0^{t/2} \|\partial_x^2 S_\alpha(t-s)\|_{L^1}\|u(s)\|_{L^2}\|u_x(s)\|_{L^2}ds \\ &+ \int_{t/2}^{t-1} \|\partial_x^2 S_\alpha(t-s)\|_{L^1}\|u(s)\|_{L^2}\|u_x(s)\|_{L^2}ds \\ &+ \int_{t-1}^{t} \|S_\alpha(t-s)\|_{L^1}\|u(s)\|_{L^2}\|u_{xxx}(s)\|_{L^2}ds. \qquad (7.44)\end{aligned}$$

The first summand can be estimated by

$$\|\partial_x^2 S_\alpha(\cdot) * u_0\|_{L^p_t L^1_x} \le c\|(1+t)^{-2/\alpha}\|_{L^p_t} \le c$$

for any $p \ge 1$. We assume $r \ge 6$. Then by virtue of estimate (7.38) we get

$$\begin{aligned}&\int_0^{t/2} \|\partial_x^2 S_\alpha(t-s)\|_{L^1}\|u(s)\|_{L^2}\|u_x(s)\|_{L^2}ds \\ &\qquad \le c(1+t)^{-2/\alpha}\|u_x\|_{L^2_{xt}}\Big(\int_0^{t/2}\|u(s)\|^2_{L^2}ds\Big)^{1/2} \le c(1+t)^{-2/\alpha+1/2-1/r}.\end{aligned}$$

We infer that

$$\Big\|\int_0^{t/2} \|\partial_x^2 S_\alpha(t-s)\|_{L^1}\|u(s)\|_{L^2}\|u_x(s)\|_{L^2}ds\Big\|_{L^p_t} \le c$$

for $p > (\frac{2}{\alpha} - \frac{1}{2} + \frac{1}{r})^{-1}$. Now by the Young inequality (7.39) we get

$$\begin{aligned}&\Big\|\int_{t/2}^{t-1} \|\partial_x^2 S_\alpha(t-s)\|_{L^1}\|u(s)\|_{L^2}\|u_x(s)\|_{L^2}ds\Big\|_{L^p_t} \\ &\qquad \le c\|s^{-2/\alpha}\|_{L^{(\frac{1}{p}+\frac{1}{2}-\frac{1}{r})^{-1}}(1,t/2)}\|u\|_{L^r_t L^2_x}\|u_x\|_{L^2_{xt}} \le c\end{aligned}$$

for $p > (\frac{1}{2} + \frac{1}{r})^{-1}$. Similarly we obtain thanks to (7.41)

$$\begin{aligned}&\Big\|\int_{t-1}^{t} \|S_\alpha(t-s)\|_{L^1}\|u(s)\|_{L^2}\|u_{xxx}(s)\|_{L^2}ds\Big\|_{L^p_t} \\ &\qquad \le c\|s^{1/2-3/2\alpha}\|_{L^1(0,1)}\|u\|_{L^\infty_t L^2_x}\|u_{xxx}\|_{L^p_t L^2_x} \le c.\end{aligned}$$

Thus the first part of Lemma 7.16 is proved. Suppose now $4 < r < 6$ and $p > \frac{r}{4}$. We only need to improve estimates of the second and third summands in (7.44). Let

$q > 1$ be such that $\frac{1}{p} - \frac{1}{r} < \frac{1}{q} < \frac{3}{r}$. Then we get by Lemma 7.13

$$\begin{aligned}
&\int_0^{t/2} \|\partial_x^2 S_\alpha(t-s)\|_{L^1} \|u(s)\|_{L^2} \|u_x(s)\|_{L^2} ds \\
&\quad \le c(1+t)^{-2/\alpha} \int_0^{t/2} \|u(s)\|_{L^2} \|u_x(s)\|_{L^2} ds \\
&\quad \le c(1+t)^{-2/\alpha+1-1/r-1/q} \|u\|_{L_t^r L_x^2} \|u_x\|_{L_t^q L_x^2} \\
&\quad \le c(1+t)^{-2/\alpha+1-1/r-1/q},
\end{aligned}$$

and it follows that

$$\begin{aligned}
&\Big\| \int_0^{t/2} \|\partial_x^2 S_\alpha(t-s)\|_{L^1} \|u(s)\|_{L^2} \|u_x(s)\|_{L^2} ds \Big\|_{L_t^p} \\
&\qquad\qquad \le c \|(1+t)^{-2/\alpha+1-1/r-1/q}\|_{L_t^p} \le c
\end{aligned}$$

for $p > (\frac{2}{\alpha} - 1 + \frac{1}{r} + \frac{1}{q})^{-1}$. Finally we bound the third term in (7.44) by

$$\begin{aligned}
&\Big\| \int_{t/2}^{t-1} \|\partial_x^2 S_\alpha(t-s)\|_{L^1} \|u(s)\|_{L^2} \|u_x(s)\|_{L^2} ds \Big\|_{L_t^p} \\
&\qquad\qquad \le c \|s^{-2/\alpha}\|_{L^{(1+\frac{1}{p}-\frac{1}{r}-\frac{1}{q})^{-1}}(1,t/2)} \|u\|_{L_t^r L_x^2} \|u_x\|_{L_t^q L_x^2} \le c.
\end{aligned}$$

This achieves the proof of Lemma 7.16. □

Lemma 7.17. *Let $u_0 \in L^1(\mathbb{R}) \cap W_2^{4,1}(\mathbb{R})$. Assume*

$$\|u\|_{L_t^r L_x^2} \le c$$

for some $r > 4$. Then we have

$$\|u_{xxx}\|_{L_t^p L_x^1} \le c$$

for all $(\frac{3}{4} + \frac{3}{2r})^{-1} < p \le \infty$ if $r \ge 6$ and for all $1 \le p \le \infty$ if $4 < r < 6$.

Proof. As above we reduce to estimate $\|u_{xxx}\|_{L_{t>1}^p L_x^1}$. By the integral formulation (7.6) we find

$$\begin{aligned}
\|u_{xxx}(t)\|_{L^1} \le \|\partial_x^3 S_\alpha(t) * u_0\|_{L^1} &+ \int_0^{t/2} \|\partial_x^4 S_\alpha(t-s)\|_{L^1} \|u(s)\|_{L^2}^2 ds \\
&+ \int_{t/2}^{t-1} \|\partial_x^2 S_\alpha(t-s)\|_{L^1} \|u(s)\|_{L^2}^{1/2} \|u_x(s)\|_{L^2}^{1/2} \|u_{xx}(s)\|_{L^1} ds \\
&+ \int_{t-1}^{t} \|S_\alpha(t-s)\|_{L^1} \|u(s)\|_{L^2} \|\partial_x^4 u(s)\|_{L^2} ds. \qquad (7.45)
\end{aligned}$$

For the first contribution in (7.45), we have

$$\|\partial_x^3 S_\alpha(\cdot) * u_0\|_{L_t^p L_x^1} \le c\|(1+t)^{-3/\alpha}\|_{L^p} \le c$$

for all $1 \le p \le \infty$. Then we get by (7.38)

$$\int_0^{t/2} \|\partial_x^4 S_\alpha(t-s)\|_{L^1} \|u(s)\|_{L^2}^2 ds$$
$$\le c(1+t)^{-4/\alpha} \int_0^{t/2} \|u(s)\|_{L^2}^2 ds \le c(1+t)^{-4/\alpha+1-2/r}$$

so that for any $1 \le p \le \infty$ we have

$$\left\| \int_0^{t/2} \|\partial_x^4 S_\alpha(t-s)\|_{L^1} \|u(s)\|_{L^2}^2 ds \right\|_{L_t^p} \le c\|(1+t)^{-4/\alpha+1-2/r}\|_{L_t^p} \le c.$$

Similarly we get by Lemma 7.15

$$\left\| \int_{t-1}^{t} \|S_\alpha(t-s)\|_{L^1} \|u(s)\|_{L^2} \|\partial_x^4 u(s)\|_{L^2} ds \right\|_{L_t^p}$$
$$\le c\|s^{1/2-3/2\alpha}\|_{L^1(0,1)} \|u\|_{L_t^\infty L_x^2} \|\partial_x^4 u\|_{L_t^p L_x^2} \le c.$$

It remains to estimate the third summand in (7.45). Assume first $6 \le r \le \infty$ and $(\frac{3}{4}+\frac{3}{2r})^{-1} < p \le \infty$. In this case we can choose $p_1 > 1$ such that $\frac{1}{p} - \frac{1}{2r} - \frac{1}{4} < \frac{1}{p_1} < \frac{1}{2} + \frac{1}{r}$. By the Young inequality (7.39) as well as Lemma 7.16 we obtain

$$\left\| \int_{t/2}^{t-1} \|\partial_x^2 S_\alpha(t-s)\|_{L^1} \|u(s)\|_{L^2}^{1/2} \|u_x(s)\|_{L^2}^{1/2} \|u_{xx}(s)\|_{L^1} ds \right\|_{L_t^p}$$
$$\le c\|s^{-2/\alpha}\|_{L^{p_2}(1,t/2)} \|u\|_{L_t^r L_x^2}^{1/2} \|u_x\|_{L_{xt}^2}^{1/2} \|u_{xx}\|_{L_t^{p_1} L_x^1} \le c$$

with $\frac{1}{p_2} = \frac{3}{4} + \frac{1}{p} - \frac{1}{2r} - \frac{1}{p_1} \in (0,1)$. In the case $4 < r < 6$ and $1 \le p \le \infty$, we get from Lemma 7.16 that

$$\left\| \int_{t/2}^{t-1} \|\partial_x^2 S_\alpha(t-s)\|_{L^1} \|u(s)\|_{L^2}^{1/2} \|u_x(s)\|_{L^2}^{1/2} \|u_{xx}(s)\|_{L^1} ds \right\|_{L_t^p}$$
$$\le c\|s^{-2/\alpha}\|_{L^p(1,t/2)} \|u\|_{L_t^r L_x^2}^{1/2} \|u_x\|_{L_{xt}^2}^{1/2} \|u_{xx}\|_{L_t^{(\frac{3}{4}-\frac{1}{2r})^{-1}} L_x^1} \le c$$

since $(\frac{3}{4} - \frac{1}{2r})^{-1} > \frac{r}{4}$. Thus Lemma 7.17 is proved. □

Lemma 7.18. *Let $u_0 \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. If*

$$\int_0^t \|u_{xxx}(s)\|_{L^1} ds \le c(1+t)^\beta$$

for some $0 \leq \beta < \frac{1}{2\alpha}$ *and all* $t > 0$, *then one has*

$$\|u(t)\|_{L^1} \leq c(1+t)^{\beta}. \tag{7.46}$$

Moreover, if (7.46) is true, then

$$\|u(t)\|_{L^2} \leq c(1+t)^{\beta - 1/2\alpha}.$$

Proof. Multiply (dKdV) by $\operatorname{sgn} u$ and then integrate over $\mathbb{R}$:

$$\partial_t \|u(t)\|_{L^1} = -\int_{-\infty}^{\infty} (u_{xxx} + |D|^{\alpha} u + u u_x) \operatorname{sgn} u. \tag{7.47}$$

Since $-|D|^{\alpha}$ is the generator of contraction semigroup in $L^1(\mathbb{R})$, for each $u \in \mathcal{D}(-|D|^{\alpha})$ (the domain of $-|D|^{\alpha}$),

$$\begin{aligned}
-\int_{-\infty}^{\infty} |D|^{\alpha} u \operatorname{sgn} u &= \lim_{s \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-s|D|^{\alpha}} u - u}{s} \operatorname{sgn} u \\
&= \lim_{s \to 0} \frac{1}{s} \int_{-\infty}^{\infty} \Big(e^{-s|D|^{\alpha}} u \operatorname{sgn} u - |u| \Big) \\
&\leq \limsup_{s \to 0} \frac{1}{s} \Big(\int_{-\infty}^{\infty} |e^{-s|D|^{\alpha}} u| - \int_{-\infty}^{\infty} |u| \Big) \\
&\leq 0.
\end{aligned}$$

This last inequality is sometimes called Kato inequality, see [BPFS79]-[BFW98]. On the other hand we have

$$\int_{-\infty}^{\infty} u u_x \operatorname{sgn} u = \int_{-\infty}^{\infty} \partial_x (u|u|) = 0.$$

Therefore we get

$$\partial_t \|u(t)\|_{L^1} \leq -\int_{-\infty}^{\infty} u_{xxx} \operatorname{sgn} u \leq \|u_{xxx}(t)\|_{L^1}.$$

Integration of this inequality yields

$$\|u(t)\|_{L^1} \leq \|u_0\|_{L^1} + \int_0^t \|u_{xxx}(s)\|_{L^1} ds \leq c(1+t)^{\beta}.$$

Now we show second estimate in Lemma 7.18. For all $t > 0$, equality (7.31) allow us to write

$$\begin{aligned}
\partial_t\Big[t^{2/\alpha}\|u(t)\|_{L^2}^2\Big] &= \frac{2}{\alpha}t^{2/\alpha-1}\|u(t)\|_{L^2}^2 + t^{2/\alpha}\partial_t\|u(t)\|_{L^2}^2 \\
&= \frac{2}{\alpha}t^{2/\alpha-1}\|u(t)\|_{L^2}^2 - 2t^{2/\alpha}\int_{-\infty}^{\infty}|\xi|^\alpha|\hat{u}(t,\xi)|^2d\xi \\
&\le \frac{2}{\alpha}t^{2/\alpha-1}\int_{-\infty}^{\infty}|\hat{u}(t,\xi)|^2d\xi - 2t^{2/\alpha}\int_{|\xi|>(\alpha t)^{-1/\alpha}}|\xi|^\alpha|\hat{u}(t,\xi)|^2d\xi \\
&\le \frac{2}{\alpha}t^{2/\alpha-1}\int_{-\infty}^{\infty}|\hat{u}(t,\xi)|^2d\xi - \frac{2}{\alpha}t^{2/\alpha-1}\int_{|\xi|>(\alpha t)^{-1/\alpha}}|\hat{u}(t,\xi)|^2d\xi \\
&= \frac{2}{\alpha}t^{2/\alpha-1}\int_{|\xi|<(\alpha t)^{-1/\alpha}}|\hat{u}(t,\xi)|^2d\xi \\
&\le ct^{2/\alpha-1}\|u(t)\|_{L^1}^2 \operatorname{mes}\{|\xi| < (\alpha t)^{-1/\alpha}\} \\
&\le ct^{1/\alpha-1+2\beta}.
\end{aligned}$$

The integration of this inequality over $[0,t]$ provides the desired result. □

Now we summarize the results proved in this section. We shall successively improve estimates of $\|u\|_{L_t^rL_x^2}$ and consequently of $\|u(t)\|_{L^2}$ until we get the optimal decay rate.

Let $r > 4$ be such that $\|u\|_{L_t^rL_x^2} \le c$.

- If $r < 6$, then $\|u_{xxx}\|_{L^1_{xt}} \le c$ by Lemma 7.17 and $\|u(t)\|_{L^2} \le c(1+t)^{-1/2\alpha}$ by Lemma 7.18.

- If $r \ge 6$, then we get from Lemma 7.17 that $\|u_{xxx}\|_{L_t^pL_x^1} \le c$ for $(\frac{3}{4}+\frac{3}{2r})^{-1} < p \le \infty$. By Hölder inequality we thus have for $\beta = 1 - \frac{1}{p}$

$$\int_0^t \|u_{xxx}(s)\|_{L^1}ds \le c(1+t)^\beta.$$

  If p is close enough to $(\frac{3}{4}+\frac{3}{2r})^{-1}$, it is clear that $0 \le \beta < \frac{1}{2\alpha}$. Lemma 7.18 ensures next that $\|u(t)\|_{L^2} \le c(1+t)^{\beta-1/2\alpha}$ and thus

$$\|u\|_{L_t^{r'}L_x^2} \le c$$

  for any $(\frac{1}{2\alpha}-\beta)^{-1} < r' < r$.

Proposition 7.1. *Let $u_0 \in L^1(\mathbb{R}) \cap W_2^{4,1}(\mathbb{R})$. Then the corresponding solution u satisfies the estimates*

$$\|u(t)\|_{L^1} \le c,$$

$$\|u(t)\|_{L^2} \le c(1+t)^{-1/2\alpha}.$$

Proof. Let $\varepsilon = \frac{1}{4}(\frac{1}{2\alpha} - \frac{1}{4}) \in (0, \frac{1}{16})$. Define the sequence (r_n) by $r_0 = \infty$ and

$$\begin{aligned} r_{n+1} &= (\frac{1}{2\alpha} - \beta_n - \varepsilon)^{-1} = (\frac{1}{2\alpha} - (1 - (\frac{3}{4} + \frac{3}{2r_n} - \varepsilon)) - \varepsilon)^{-1} \\ &= (\frac{1}{2\alpha} - \frac{1}{4} + \frac{3}{2r_n} - 2\varepsilon)^{-1}. \end{aligned}$$

It is clear from the previous results that (r_n) is decreasing and $\|u\|_{L_t^{r_n} L_x^2} \leq c$ as soon as $r_{n-1} \geq 6$. A straightforward calculation yieds

$$r_n = (4\varepsilon((3/2)^n - 1))^{-1}.$$

It suffices now to choose $n = E(\frac{\log(1+1/24\varepsilon)}{\log(3/2)}) + 1$ to get $r_{n-1} \geq 6$, $2 < r_n < 6$ and thus $\|u_{xxx}\|_{L^1_{xt}} \leq c$. Lemma 7.18 provides the desired result.

□

Acknowledgment

The author thanks Francis Ribaud for several encouragements and helpful discussions. We are grateful to Olivier Goubet and Grzegorz Karch for having pointed out a mistake in a preliminary version of this work.

Bibliographie

[ABS89] C. J. Amick, J. L. Bona et M. E. Schonbek : Decay of solutions of some nonlinear wave equations. *J. Differential Equations*, 81(1):1–49, 1989.

[Bek96] D. Bekiranov : The initial-value problem for the generalized Burgers' equation. *Differential Integral Equations*, 9(6):1253–1265, 1996.

[Ben67] T. B. Benjamin : Internal waves of permanent form in fluids of great depth. *Journal of Fluid Mechanics*, 29:559–592, 1967.

[BFW98] P. Biler, T. Funaki et W. A. Woyczynski : Fractal Burgers equations. *J. Differential Equations*, 148(1):9–46, 1998.

[BKW99] P. Biler, G. Karch et W. A. Woyczynski : Asymptotics for multifractal conservation laws. *Studia Math.*, 135(3):231–252, 1999.

[BL01] H. A. Biagioni et F. Linares : Ill-posedness for the derivative Schrödinger and generalized Benjamin-Ono equations. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 353(9):3649–3659 (electronic), 2001.

[Bou93a] J. Bourgain : Fourier transform restriction phenomena for certain lattice subsets and applications to nonlinear evolution equations. I. Schrödinger equations. *Geom. Funct. Anal.*, 3(2):107–156, 1993.

[Bou93b] J. Bourgain : Fourier transform restriction phenomena for certain lattice subsets and applications to nonlinear evolution equations. II. The KdV-equation. *Geom. Funct. Anal.*, 3(3):209–262, 1993.

[Bou97] J. Bourgain : Periodic Korteweg de Vries equation with measures as initial data. *Selecta Math. (N.S.)*, 3(2):115–159, 1997.

[BP06] N. Burq et F. Planchon : Smoothing and dispersive estimates for 1D Schrödinger equations with BV coefficients and applications. *J. Funct. Anal.*, 236(1):265–298, 2006.

[BP08] N. Burq et F. Planchon : On well-posedness for the Benjamin-Ono equation. *Math. Ann.*, 340(3):497–542, 2008.

[BPFS79] C. Bardos, P. Penel, U. Frisch et P.-L. Sulem : Modified dissipativity for a nonlinear evolution equation arising in turbulence. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 71(3):237–256, 1979.

[CK01] M. Christ et A. Kiselev : Maximal functions associated to filtrations. *J. Funct. Anal.*, 179(2):409–425, 2001.

[CKS+03] J. Colliander, M. Keel, G. Staffilani, H. Takaoka et T. Tao : Sharp global well-posedness for KdV and modified KdV on $\mathbb{R}$ and $\mathbb{T}$. *J. Amer. Math. Soc.*, 16(3):705–749 (electronic), 2003.

[CLM07] W. Chen, J. Li et C. Miao : The well-posedness of Cauchy problem for dissipative modified Korteweg de Vries equations, 2007.

[CW90] T. Cazenave et F. B. Weissler : The Cauchy problem for the critical nonlinear Schrödinger equation in H^s. *Nonlinear Anal.*, 14(10):807–836, 1990.

[Dix91] D. B. Dix : Temporal asymptotic behavior of solutions of the Benjamin-Ono-Burgers equation. *J. Differential Equations*, 90(2):238–287, 1991.

[Dix92] D. B. Dix : The dissipation of nonlinear dispersive waves : the case of asymptotically weak nonlinearity. *Comm. Partial Differential Equations*, 17(9-10):1665–1693, 1992.

[Dix96] D. B. Dix : Nonuniqueness and uniqueness in the initial-value problem for Burgers' equation. *SIAM J. Math. Anal.*, 27(3):708–724, 1996.

[Dut07] Denys Dutykh : Modélisation mathématique des tsunamis. 2007.

[ER86] P. M. Edwin et B. Roberts : The Benjamin-Ono-Burgers equation : an application in solar physics. *Wave Motion*, 8(2):151–158, 1986.

[FL00] A. S. Fokas et L. Luo : Global solutions and their asymptotic behavior for Benjamin-Ono-Burgers type equations. *Differential Integral Equations*, 13(1-3):115–124, 2000.

[Gin96] J. Ginibre : Le problème de Cauchy pour des EDP semi-linéaires périodiques en variables d'espace (d'après Bourgain). *Astérisque*, (237):Exp. No. 796, 4, 163–187, 1996. Séminaire Bourbaki, Vol. 1994/95.

[GMS91] S. N. Gurbatov, A. N. Malakhov et A. I. Saichev : *Nonlinear random waves and turbulence in nondispersive media : waves, rays, particles.* Nonlinear Science : Theory and Applications. Manchester University Press, Manchester, 1991. Translated from the Russian, Supplement 1 by Adrian L. Melott and Sergei F. Shandarin, Supplement 2 by V. I. Arnol′d, Yu. M. Baryshnikov and I. A. Bogayevsky [I. A. Bogaevskiĭ], Translation edited and with a preface by D. G. Crighton.

[GTV97] J. Ginibre, Y. Tsutsumi et G. Velo : On the Cauchy problem for the Zakharov system. *J. Funct. Anal.*, 151(2):384–436, 1997.

[GV85a] J. Ginibre et G. Velo : The global Cauchy problem for the nonlinear Schrödinger equation revisited. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 2(4):309–327, 1985.

[GV85b] J. Ginibre et G. Velo : Scattering theory in the energy space for a class of nonlinear Schrödinger equations. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 64(4):363–401, 1985.

[GV91] J. Ginibre et G. Velo : Smoothing properties and existence of solutions for the generalized Benjamin-Ono equation. *J. Differential Equations*, 93(1):150–212, 1991.

[GW08] Z. Guo et B. Wang : Global well posedness and inviscid limit for the Korteweg-de Vries-Burgers equation, 2008.

[HKNS06] N. Hayashi, E. I. Kaikina, P. I. Naumkin et I. A. Shishmarev : *Asymptotics for dissipative nonlinear equations*, volume 1884 de *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2006.

[HN06] N. Hayashi et P. I. Naumkin : Asymptotics for the Korteweg-de Vries-Burgers equation. *Acta Math. Sin. (Engl. Ser.)*, 22(5):1441–1456, 2006.

[IK07] A. D. Ionescu et C. E. Kenig : Global well-posedness of the Benjamin-Ono equation in low-regularity spaces. *J. Amer. Math. Soc.*, 20(3):753–798 (electronic), 2007.

[Iór86] R. J. Iório, Jr. : On the Cauchy problem for the Benjamin-Ono equation. *Comm. Partial Differential Equations*, 11(10):1031–1081, 1986.

[JMW05] B. Jourdain, S. Méléard et W. A. Woyczynski : Probabilistic approximation and inviscid limits for one-dimensional fractional conservation laws. *Bernoulli*, 11(4):689–714, 2005.

[Kar97] G. Karch : L^p-decay of solutions to dissipative-dispersive perturbations of conservation laws. *Ann. Polon. Math.*, 67(1):65–86, 1997.

[Kar99a] G. Karch : Large-time behaviour of solutions to non-linear wave equations : higher-order asymptotics. *Math. Methods Appl. Sci.*, 22(18):1671–1697, 1999.

[Kar99b] G. Karch : Self-similar large time behavior of solutions to Korteweg-de Vries-Burgers equation. *Nonlinear Anal.*, 35(2, Ser. A : Theory Methods): 199–219, 1999.

[Kat83] T. Kato : On the Cauchy problem for the (generalized) Korteweg-de Vries equation. *In Studies in applied mathematics*, volume 8 de *Adv. Math. Suppl. Stud.*, pages 93–128. Academic Press, New York, 1983.

[KdV] D.J. Korteweg et G. de Vries : On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves.

[KMX07] G. Karch, C. Miao et X. Xu : On convergence of solutions of fractal burgers equation toward rarefaction waves, 2007.

[KPV89] C. E. Kenig, G. Ponce et L. Vega : On the (generalized) Korteweg-de Vries equation. *Duke Math. J.*, 59(3):585–610, 1989.

[KPV91a] C. E. Kenig, G. Ponce et L. Vega : Oscillatory integrals and regularity of dispersive equations. *Indiana Univ. Math. J.*, 40(1):33–69, 1991.

[KPV91b] C. E. Kenig, G. Ponce et L. Vega : Well-posedness of the initial value problem for the Korteweg-de Vries equation. *J. Amer. Math. Soc.*, 4(2):323–347, 1991.

[KPV93a] C. E. Kenig, G. Ponce et L. Vega : The Cauchy problem for the Korteweg-de Vries equation in Sobolev spaces of negative indices. *Duke Math. J.*, 71(1):1–21, 1993.

[KPV93b] C. E. Kenig, G. Ponce et L. Vega : Well-posedness and scattering results for the generalized Korteweg-de Vries equation via the contraction principle. *Comm. Pure Appl. Math.*, 46(4):527–620, 1993.

[KPV96] C. E. Kenig, G. Ponce et L. Vega : A bilinear estimate with applications to the KdV equation. *J. Amer. Math. Soc.*, 9(2):573–603, 1996.

[KPZ86] M. Kardar, G. Parisi et Y.-C. Zhang : Dynamic scaling of growing interfaces. *Phys. Rev. Lett.*, 56(9):889–892, Mar 1986.

[KT05] H. Koch et N. Tzvetkov : Nonlinear wave interactions for the Benjamin-Ono equation. *Int. Math. Res. Not.*, (30):1833–1847, 2005.

[KT06] C. E. Kenig et H. Takaoka : Global wellposedness of the modified Benjamin-Ono equation with initial data in $H^{1/2}$. *Int. Math. Res. Not.*, pages Art. ID 95702, 44, 2006.

[Miu76] R. M. Miura : The Korteweg-de Vries equation : a survey of results. *SIAM Rev.*, 18(3):412–459, 1976.

[Mol06] L. Molinet : Global well-posedness in L^2 for the periodic Benjamin-Ono equation, 2006.

[MR01] L. Molinet et F. Ribaud : The Cauchy problem for dissipative Korteweg de Vries equations in Sobolev spaces of negative order. *Indiana Univ. Math. J.*, 50(4):1745–1776, 2001.

[MR02] L. Molinet et F. Ribaud : On the low regularity of the Korteweg-de Vries-Burgers equation. *Int. Math. Res. Not.*, (37):1979–2005, 2002.

[MR04a] L. Molinet et F. Ribaud : Well-posedness results for the generalized Benjamin-Ono equation with arbitrary large initial data. *Int. Math. Res. Not.*, (70):3757–3795, 2004.

[MR04b] L. Molinet et F. Ribaud : Well-posedness results for the generalized Benjamin-Ono equation with small initial data. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 83(2):277–311, 2004.

[MRY02] L. Molinet, F. Ribaud et A. Youssfi : Ill-posedness issues for a class of parabolic equations. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 132(6):1407–1416, 2002.

[MST01] L. Molinet, J.-C. Saut et N. Tzvetkov : Ill-posedness issues for the Benjamin-Ono and related equations. *SIAM J. Math. Anal.*, 33(4):982–988 (electronic), 2001.

[MSW97] S. A. Molchanov, D. Surgailis et W. A. Woyczynski : The large-scale structure of the universe and quasi-Voronoi tessellation of shock fronts in forced Burgers turbulence in $\mathbf{R}^d$. *Ann. Appl. Probab.*, 7(1):200–228, 1997.

[MYZ06] C. Miao, B. Yuan et B. Zhang : Well-posedness of the cauchy problem for the fractional power dissipative equations, 2006.

[NTT01] K. Nakanishi, H. Takaoka et Y. Tsutsumi : Counterexamples to bilinear estimates related with the KdV equation and the nonlinear Schrödinger equation. *Methods Appl. Anal.*, 8(4):569–578, 2001. IMS Conference on Differential Equations from Mechanics (Hong Kong, 1999).

[Ono75] H. Ono : Algebraic solitary waves in stratified fluids. *J. Phys. Soc. Japan*, 39(4):1082–1091, 1975.

[OS70] E. Ott et R. N. Sudan : Damping of solitary waves. *Physics of Fluids*, 13(6):1432–1434, 1970.

[Ota05] M. Otani : Bilinear estimates with applications to the generalized Benjamin-Ono-Burgers equations. *Differential Integral Equations*, 18(12):1397–1426, 2005.

[Ota06] M. Otani : Well-posedness of the generalized Benjamin-Ono-Burgers equations in Sobolev spaces of negative order. *Osaka J. Math.*, 43(4):935–965, 2006.

[Pon91] G. Ponce : On the global well-posedness of the Benjamin-Ono equation. *Differential Integral Equations*, 4(3):527–542, 1991.

[PV90] G. Ponce et L. Vega : Nonlinear small data scattering for the generalized Korteweg-de Vries equation. *J. Funct. Anal.*, 90(2):445–457, 1990.

[PV07] F. Planchon et L. Vega : Bilinear virial identities and applications, 2007.

[Sau79] J.-C. Saut : Sur quelques généralisations de l'équation de Korteweg-de Vries. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 58(1):21–61, 1979.

[Sch80] M. E. Schonbek : Decay of solutions to parabolic conservation laws. *Comm. Partial Differential Equations*, 5(5):449–473, 1980.

[Sch86] P. C. Schuur : *Asymptotic analysis of soliton problems*, volume 1232 de *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1986. An inverse scattering approach.

[Str77] R. S. Strichartz : Restrictions of Fourier transforms to quadratic surfaces and decay of solutions of wave equations. *Duke Math. J.*, 44(3):705–714, 1977.

[Tao01] T. Tao : Multilinear weighted convolution of L^2-functions, and applications to nonlinear dispersive equations. *Amer. J. Math.*, 123(5):839–908, 2001.

[Tao04] T. Tao : Global well-posedness of the Benjamin-Ono equation in $H^1(\mathbf{R})$. *J. Hyperbolic Differ. Equ.*, 1(1):27–49, 2004.

[Tzv99] N. Tzvetkov : Remark on the local ill-posedness for KdV equation. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 329(12):1043–1047, 1999.

[Ven07a] S. Vento : Global well-posedness for dissipative Korteweg-de Vries equations, 2007.

[Ven07b] S. Vento : Sharp well-posedness results for the generalized Benjamin-Ono equation with high nonlinearity, 2007.

[Ven08a] S. Vento : Asymptotic behavior for dissipative Korteweg-de Vries equations, 2008.

[Ven08b] S. Vento : Well-posedness and ill-posedness results for dissipative Benjamin-Ono equations, 2008.

[Ven08c] S. Vento : Well-posedness for the generalized Benjamin-Ono equations with arbitrary large initial data in the critical space, 2008.

[Xue07] R. Xue : On the well-posedness of the cauchy problem for the generalized Korteweg-de Vries-Burgers equation, 2007.

[Zha00] L. Zhang : Local Lipschitz continuity of a nonlinear bounded operator induced by a generalized Benjamin-Ono-Burgers equation. *Nonlinear Anal.*, 39(3, Ser. A : Theory Methods):379–402, 2000.