Juin 2004

Navier-Stokes Compressible et Problème d'Approximation de type Stokes en 2D

Stéphane VENTO

Stage de D.E.A. dirigé par Marco CANNONE

Table des matières

Chapitre 1

Navier-Stokes Compressible

1.1 Introduction

Nous disposons de plusieurs formulations mathématiques pour étudier le mouvement d'un fluide (liquide, gazeux). Un tel fluide est complètement décrit par sa densité $\rho = \rho(x,t) \in \mathbb{R}^+$ et son champ de vitesse $u = u(x,t) \in \mathbb{R}^N$; x étant la variable de l'espace $\mathbb{R}^N$ (dans la réalité physique $N = 2$ ou 3) et $t \geq 0$ désignant le temps. C'est en 1822 que Navier (puis de façon indépendante Stokes en 1845) fournit les équations qui régissent le mouvement d'un fluide visqueux incompressible soumis à une force extérieure $f = f(x,t) \in \mathbb{R}^N$:

$$\begin{cases} \partial_t u - \nu \triangle u = -(u.\nabla)u - \nabla P + f \\ \text{div } u = 0 \end{cases} . \tag{1.1}$$

Nous avons noté $\nu \geq 0$ la constante de viscosité du fluide et $P = P(x,t)$ sa pression ; habituellement, P est supposée être une fonction régulière et croissante de ρ. A ce système nous ajoutons la condition initiale

$$u(x,0) = u_0(x), \tag{1.2}$$

la pression initiale n'étant en fait pas nécessaire.

En 1755, Euler avait déjà écrit ces équations dans le cas d'un fluide idéal, c'est-à-dire pour $\nu = 0$; signalons aussi que Boltzmann avait énoncé en 1872 un système similaire pour les gaz raréfiés.

On sait depuis les travaux de J. Leray [6] en 1933 que pour tout champ de vitesse initiale $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^N)$ le système de Navier Stokes incompressible (1.1)-(1.2) possède des solutions faibles globales d'énergie finie dont l'unicité est bien établie en deux dimensions d'espace mais reste un problème ouvert en dimension 3. Puis Kato en 1984 et Lemarié-Rieusset [5] en 1996 obtinrent l'existence et l'unicité de solutions fortes globales pour des données initiales suffisamment petites, elles furent obtenues par un algorithme de point fixe dans des espaces "critiques".

Nous allons nous intéresser dans ce chapitre à l'écoulement d'un fluide compressible isotherme et visqueux dans une région Ω de l'espace $\mathbb{R}^N$ soumis à une densité de force extérieure f. L'équation de Navier-Stokes compressible permet de rendre compte de ce mouvement :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \mathrm{div}\ (\rho u) = 0 \\ \partial_t (\rho u) + \mathrm{div}\ (\rho u \otimes u) - \mu \triangle u - \xi \nabla \mathrm{div}\ u + \nabla P = \rho f \end{cases}. \tag{1.3}$$

Dans ce système, μ et $\lambda = \xi - \mu$ sont les coefficients de Lamé du fluide et sont pris constants pour simplifier. On suppose de plus que $\mu > 0$ et $\mu + \xi > 0$ ce qui assure la stricte ellipticité de l'opérateur $-\mu\triangle - \xi\nabla\mathrm{div}$. Le problème (1.3) doit également être complété par la donnée de conditions initiales pour la densité et la quantité de mouvement du fluide (ce qui est équivalent à la donnée de conditions initiales pour la densité et la vitesse du fluide) :

$$\rho(\cdot, 0) = \rho_0(\cdot), \quad \rho u(\cdot, 0) = m_0(\cdot). \tag{1.4}$$

Nous allons examiner le cas où la pression vérifie

$$P(\rho) = a\rho^\gamma, \quad a > 0, \gamma \geq 1.$$

L'étude de (1.3) peut être menée à bien dans les trois cas suivants :

1. le cas où le problème est posé dans $\Omega \times (0, T)$ où Ω est une partie ouverte et bornée de $\mathbb{R}^N$ à frontière régulière et $T \in (0, \infty)$ est fixé ; on suppose alors que la paroi $\partial\Omega$ de la région d'écoulement est adhérente et imperméable, ce qui se traduit par des conditions aux limites de type Dirichlet homogènes pour la vitesse, soit $u = 0$ sur $\partial\Omega \times (0, T)$
2. le cas de l'espace tout entier ($x \in \Omega = \mathbb{R}^N$)
3. le cas périodique (posé sur $\mathbb{R}^N$) où toutes les données et inconnues sont périodiques en chaque x_i ($1 \leq i \leq N$) de période $T_i \in (0, \infty)$.

Nous voulons maintenant définir précisément la notion de solutions faibles que nous utiliserons dans la suite.
Nous demandons tout d'abord que ρ et u satisfassent

$$\rho \in L^\infty((0,T); L^\gamma(\Omega)) \cap \mathcal{C}([0,T]; L^p(\Omega)) \text{ pour un } 1 \leq p < \gamma,$$

$$\rho \geq 0 \text{ presque partout},$$

$$\nabla u \in L^2((0,T); L^p(\Omega)), \quad \rho|u|^2 \in L^\infty((0,T); L^1(\Omega)),$$

$$\rho u \in \mathcal{C}\big([0,T]; L_w^{\frac{2\gamma}{\gamma+1}}(\Omega)\big).$$

où l'on a noté $\mathcal{C}([0,T]; X_w)$ l'espace des fonctions continues de $[0,T]$ à valeurs dans une boule fermée de X munie de la topologie faible de l'espace de Banach séparable X.
Bien sûr, (ρ, u) doit être une solution de (1.3) au sens des distributions.
Dans le cas d'une condition de Dirichlet, on suppose $u \in L^2((0,T); H_0^1(\Omega))$; dans le

cas de l'espace tout entier, on exige $u \in L^2((0,T); H^1(B))$ pour toute boule $B \subset \mathbb{R}^N$ et $u \in L^2((0,T); L^{\frac{2N}{N-2}}(\mathbb{R}^N))$ si $N \geq 3$. Dans le cas périodique, on demande que ρ, u et les données initiales ρ_0 et m_0 soient périodiques en chaque x_i, de période T_i.

Enfin, les conditions suivantes sont imposées aux données initiales :

$$\begin{cases} \rho_0 \geq 0 \text{ presque partout }, \quad \rho_0 \in L^1(\Omega) \cap L^\gamma(\Omega), \\ m_0 \in L^{\frac{2\gamma}{\gamma+1}}(\Omega), \quad m_0|_{\{\rho_0=0\}} = 0 \text{ presque partout}, \\ \frac{|m_0|^2}{\rho_0}\chi_{\{\rho_0\neq 0\}} \in L^1(\Omega), \quad \rho_0 \not\equiv 0. \end{cases} \tag{1.5}$$

Nous donnons quelques explications qui motivent cette définition.
Une intégration par parties de l'équation de conservation de masse $(1.3)_1$ nous montre que $\rho \geq 0$ et

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \rho(x,t)dx = 0. \tag{1.6}$$

De plus, en multipliant $(1.3)_2$ par u, on obtient formellement

$$\begin{aligned} &\rho\partial_t\Big(\frac{|u|^2}{2}\Big) + \rho u\cdot\nabla\frac{|u|^2}{2} - \mu\triangle\frac{|u[^2}{2} + \mu|Du|^2 - \xi\text{div }(u\text{div }u) \\ &+\xi(\text{div }u)^2 + \partial_t\Big(\frac{a}{\gamma-1}\rho^\gamma\Big) + \text{div }\Big(u\frac{a\gamma}{\gamma-1}\rho^\gamma\Big) = \rho u\cdot f \end{aligned}$$

puis en intégrant sur Ω

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega\Big(\rho\frac{|u|^2}{2} + \frac{a}{\gamma-1}\rho^\gamma\Big)dx + \int_\Omega(\mu|Du|^2 + \xi(\text{div }u)^2)dx = \int_\Omega \rho u\cdot f dx.$$

On a aussi $\displaystyle\int_\Omega(\text{div }u)^2dx = \sum_{i,j}\int_\Omega \partial_i u_i\partial_j u_j dx \leq \int_\Omega |Du|^2dx$ et donc

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega\Big(\rho\frac{|u|^2}{2} + \frac{a}{\gamma-1}\rho^\gamma\Big)dx + \nu\int_\Omega|Du|^2dx \leq \int_\Omega \rho u\cdot f dx \tag{1.7}$$

pour un $\nu > 0$. Si $f \in L^1((0,T); L^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}(\Omega))$, il découle de l'inégalité de Hölder que

$$\begin{aligned} \int_\Omega \rho u\cdot f dx &\leq \|\rho u\|_{L^{\frac{2\gamma}{\gamma+1}}(\Omega)}\|f\|_{L^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}(\Omega)} \\ &\leq \|\sqrt{\rho}\|_{L^{2\gamma}(\Omega)}\|\sqrt{\rho}u\|_{L^2(\Omega)}\|f\|_{L^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}(\Omega)} \end{aligned} \tag{1.8}$$

Les estimations *a priori* (1.7) et (1.8) montrent qu'il est naturel de choisir

$$\rho(\cdot,t) \in L^\gamma(\Omega), \quad \nabla u(\cdot,t) \in L^2(\Omega), \quad \rho|u|^2(\cdot,t) \in L^1(\Omega) \text{ et } \rho u(\cdot,t) \in L^{\frac{2\gamma}{\gamma+1}}(\Omega).$$

1.2 Résultats d'existence pour le modèle compressible

On s'interesse dans cette section à l'existence d'une solution faible au problème (1.3)-(1.4). Une méthode classique pour construire une telle solution est d'analyser la stabilité et les propriétés de compacité d'une suite de solutions approchées ou, plus précisément, d'une suite de solutions d'un problème approché. On espère alors qu'à la limite, la fonction obtenue est bien solution (faible) du système initial.

Soit donc $(\rho^n, u^n)_{n\geq 1}$ une suite de solutions faibles de (1.3) où, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, f est remplacée par une fonction f^n vérifiant l'un des trois cas d'étude énoncés ci-dessus (Dirichlet, périodique ou espace tout entier). L'hypothèse (1.4) est changée en

$$\rho^n(\cdot, 0) = \rho_0^n(\cdot), \quad \rho^n u^n(\cdot, 0) = m_0^n(\cdot)$$

où ρ_0^n et m_0^n vérifient (1.5). On suppose que la force f^n satisfait

$$\left\{\begin{array}{l} (f^n)_{n\geq 1} \text{ est bornée dans } L^1(\Omega \times (0,T)) \cap L^\infty(\Omega \times (0,T)), \\ (f^n)_{n\geq 1} \text{ converge faiblement-}* \text{ dans } L^\infty(\Omega \times (0,T)) \\ \text{ vers } f \in L^1(\Omega \times (0,T)) \cap L^\infty(\Omega \times (0,T)). \end{array}\right.$$

On peut prouver qu'il existe alors $q \geq 2$, $q > \gamma$ et $s > N/2$ tel que

$$\left\{\begin{array}{l} (\rho^n)_{n\geq 1} \text{ est bornée dans } L^q(\Omega \times (0,T)) \cap L^\infty(\Omega \times (0,T)) \\ \text{ dans le cas périodique ou si } \Omega = \mathbb{R}^N, N \geq 3 \\ (\rho^n)_{n\geq 1} \text{ est bornée dans } L^q((0,T); L^q(K)) \cap L^\infty((0,T); L^s(\Omega)) \\ \text{ dans le cas Dirichlet ou si } \Omega = \mathbb{R}^2 \end{array}\right.$$

où K est un compact de Ω.
Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que les suites (ρ^n), $\sqrt{\rho^n})$, (u^n), $(\rho^n f^n)$, $(\sqrt{\rho^n} u^n)$, $(\rho^n u^n)$, $(\rho^n u_i^n u_j^n)$ convergent faiblement respectivement vers des ρ, $\overline{\sqrt{\rho}}$, u, $\overline{\rho f}$, v, m, $e_{i,j}$ dans les espaces appropriés.

Enonçons maintenant le théorème qui permet le passage à la limite.

Théorème 1.1 *Sous les hypothèses ci-dessus, on a* $v = \overline{\sqrt{\rho}} u$, $m = \rho u$ *et* $e_{i,j} = \rho u_i u_j$ *presque partout dans* $\Omega \times (0,T)$.
Si l'on suppose de plus que la suite (ρ_0^n) *converge vers* ρ_0 *dans* $L^1(\Omega)$, *alors la fonction* (ρ, u) *définie précédemment est une solution faible de (1.3) satisfaisant (1.4) et on a les convergences*

$$\rho^n \underset{n}{\rightarrow} \rho \text{ dans } \mathcal{C}([0,T]; L^p(\Omega)) \cap L^r(K_1 \times (0,T)), \quad (\forall 1 \leq p < s, \quad 1 \leq r < q),$$

$$\left\{\begin{array}{l} \rho^n u^n \rightarrow_n \rho u \text{ dans } L^p((0,T); L^r(\Omega)), \quad (1 \leq p < \infty, \quad 1 \leq r < \frac{2\gamma}{2\gamma+1}), \\ u^n \rightarrow_n u \text{ dans } L^p((K_2 \times (0,T)) \cap \{\rho > 0\}) \cap L^2((K_2 \times (0,T)) \cap \{\rho > \delta\}), \\ (1 \leq p < 2, \quad \delta > 0), \\ \rho^n u_i^n u_j^n \rightarrow_n \rho u_i u_j \text{ dans } L^p((0,T); L^1(\Omega')), \quad (1 \leq p < \infty, \quad 1 \leq i,j \leq N) \end{array}\right.$$

où $K_1 = \Omega$ dans le cas périodique ou si $\Omega = \mathbb{R}^N$, $N \geq 3$ et K_1 est une partie compacte de Ω dans les autres cas ; $\Omega' = \Omega$ sauf dans le cas $\Omega = \mathbb{R}^2$ où Ω' est un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$; $K_2 = \Omega$ dans les cas périodique et Dirichlet, et K_2 est un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^N$ si $\Omega = \mathbb{R}^N$.

En vue de la première assertion du théorème, la principale difficulté pour passer à la limite dans (1.3)-(1.4) est le terme de pression ρ^γ. Le passage à la limite faible dans ce terme peut se faire si l'on suppose que ρ^n converge vers ρ dans $L^\gamma_{loc}(\Omega)$, ceci étant en fait la conséquence de l'hypothèse $\rho_0^n \underset{n}{\rightarrow} \rho_0$ fortement dans $L^1(\Omega)$. Mieux, cette hypothèse est nécessaire dans le sens suivant. Si (ρ, u) est une solution faible du système de Navier-Stokes compressible dans le cas $\Omega = \mathbb{R}^N$, alors ρ^n converge fortement vers ρ dans $L^1(\mathbb{R}^N)$.

On en vient maintenant à un résultat d'existence de solutions de (1.3)-(1.4). On suppose que la force f vérifie

$$f \in L^1((0,T); L^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}(\Omega))$$

sauf dans le cas de conditions au bord de Dirichlet où l'on suppose

$$f \in L^1((0,T); L^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}(\Omega)) + L^{\frac{2}{1+\alpha}}((0,T); L^r(\Omega))$$

avec $\alpha = (2-\gamma)_+$, $\dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{\gamma}\big(1 - \dfrac{\alpha}{2}\big) + \dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{1-\alpha}{q} = 1$ et $q = \dfrac{2N}{N-2}$ si $N \geq 3$ et $q \in [2, \infty)$ est quelconque si $N = 2$.
De plus, on suppose que $f \in L^1((0,T); L^{\frac{3}{2}}(\Omega))$ et $\rho \in \mathcal{C}([0,T]; L^{\frac{3}{2}}(\Omega))$ si $N = 3$ et $\gamma > 6$, et $f \in L^1((0,T); L^2(\Omega))$ si $N = 2$ et $\gamma > 2$.

Voici maintenant le seul résultat connu à ce jour d'existence de solutions faibles globales pour des données initiales arbitraires. Il fût démontré en 1998 par P.-L. Lions [8].

Théorème 1.2 *Si l'on suppose $\gamma \geq \frac{3}{2}$ pour $N = 2$, $\gamma \geq \frac{9}{5}$ pour $N = 3$ et $\gamma > \frac{N}{2}$ pour $N \geq 4$, alors il existe une solution (ρ, u) de (1.3) satisfaisant les conditions initiales (1.4) et telle que $\rho \in L^p(\Omega \times (0,T))$ sauf dans le cas de conditions au bord de Dirichlet où $\rho \in L^p(K \times (0,T))$ pour tout compact K de Ω, où $p = \big(1 + \frac{2}{N}\big)\gamma - 1$. De plus, (ρ, u) satisfait, pour tout $t \in [0,T]$, l'inégalité d'énergie suivante :*

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \Big(\frac{1}{2}\rho|u|^2 + \frac{a}{\gamma-1}\rho^\gamma\Big)dx + \int_0^t ds \int_\Omega \big(\mu|Du|^2 + \xi(div\ u)^2\big)dx \\ &\leq \int_\Omega \Big(\frac{1}{2}\frac{|m_0|^2}{\rho_0} + \frac{a}{\gamma-1}\rho_0^\gamma\Big)dx + \int_0^t ds \int_\Omega \rho u \cdot f dx. \qquad (1.9)\end{aligned}$$

Signalons également que ce résultat reste vrai pour des lois de pression $P(\rho)$ quelconques si l'on suppose de plus $f \in L^\infty((0,T); L^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega))$ et

$$\liminf_{t \to \infty} \frac{P(t)}{t^\gamma} > 0$$

pour un certain $\gamma > 1$.

Ce théorème peut être vu comme l'analogue des travaux de J. Leray sur l'équation de Navier-Stokes incompressible pour des fluides compressibles isentropiques en trois dimensions. Nous avons en effet l'existence de solutions globales faibles (dans $L^2((0,T); H^1(\mathbb{R}^3)))$ satisfaisant une inégalité d'énergie. L'unicité et la régularité de ces solutions demeurent encore un problème ouvert. Nous ne savons pas non plus si l'inégalité (1.9) peut être une égalité.

D'un certain point de vue, la restriction sur l'exposant γ ne semble pas naturelle (dans les cas $N = 2$ et 3), la condition désirée étant été $\gamma \geq 1$. Cette contrainte marque la limite d'utilisation de la théorie du transport de R.J. DiPerna et P.-L. Lions qui est un des points clés de la théorie mathématique des écoulements compressibles et isentropiques développée par Lions.
Récemment, E. Feireisl [2] a relaxé cette contrainte $\gamma \geq \frac{9}{5}$ (cas $N = 3$) et a démontré l'existence globale de solutions faibles du problème (1.3)-(1.4) pour des constantes optimales $\gamma > \frac{3}{2}$.

1.3 Résultats d'existence pour le problème d'approximation de type Stokes

Nous étudions ici un autre modèle de la mécanique des fluides, à savoir un problème d'approximation de type Stokes. Il s'agit d'une approximation de l'équation de Navier-Stokes compressible isentropique. Plus précisément, on cherche une solution (ρ, u) du système

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}\,(\rho u) = 0 \\ \bar{\rho}\partial_t u - \mu \triangle u - \xi \nabla \operatorname{div}\, u + a \nabla \rho^\gamma = 0 \end{cases} \tag{1.10}$$

où $\bar{\rho} > 0$, $a > 0$, $\mu > 0$, $\mu + \xi > 0$ et $\gamma \geq 1$. Nous considérons comme précédemment trois cas, le cas périodique, le cas de conditions au bord de Dirichlet et le cas $\Omega = \mathbb{R}^N$. Le système (1.10) est complété par les données initiales

$$\rho(\cdot, 0) = \rho_0(\cdot), \quad u(\cdot, 0) = u_0(\cdot). \tag{1.11}$$

On suppose que $\rho_0 \in L^\gamma(\Omega)$, $u_0 \in L^2(\Omega)$, que ρ_0 et u_0 sont périodiques dans le cas périodique et que $\rho_0 \in L^1(\mathbb{R}^N)$ lorsque $\Omega = \mathbb{R}^N$. De plus, si $\gamma = 1$, on suppose que $\rho_0 |\log \rho_0| \in L^1(\Omega)$.

Voici maintenant un résultat d'existence de solutions fortes du problème (1.10)-(1.11).

Théorème 1.3 *On suppose $N \geq 3$ et $\gamma \geq \dfrac{2N}{N+2}$. Alors il existe une solution (ρ, u) de (1.10) satisfaisant (1.11) et telle que $u \in L^2([0,\infty); H^1(\Omega)) \cap \mathcal{C}([0,\infty); L^2_w(\Omega))$, $\rho \in \mathcal{C}([0,\infty), L^1(\Omega)) \cap \mathcal{C}([0,\infty); L^\gamma_w(\Omega)) \cap L^q(K \times (0,T))$ pour tout $T \in (0,\infty)$ avec*

$q = \dfrac{N+2}{N}\gamma$ *et où* $K = \Omega$ *si* $\Omega = \mathbb{R}^N$ *ou dans le cas périodique et* K *est un compact de* Ω *sinon.*

Le résultat similaire dans le cas $N = 2$ est donné par le

Théorème 1.4 *On suppose que* $N = 2$ *et* $\gamma \geq 1$ *sauf dans le cas* $\Omega = \mathbb{R}^2$ *où* $\gamma > 1$. *Alors il existe une solution* (ρ, u) *telle que* $u \in L^2([0,\infty); H^1(\Omega)) \cap \mathcal{C}([0,\infty); L^2_w(\Omega))$, $u \in \mathcal{C}([0,\infty); L^2(K))$ *si* $\gamma = 1$, $\rho \in \mathcal{C}([0,\infty); L^1(\Omega))$, $\rho \in \mathcal{C}([0,\infty); L^\gamma_w(\Omega))$ *si* $\gamma > 1$ *et* $\rho \log \rho \in L^\infty((0,\infty); L^1(\Omega))$ *si* $\gamma = 1$, $\rho \in L^q(K \times (0,T))$ *où* $q = 2$ *si* $\gamma = 1$ *et* $q < 2\gamma$ *si* $\gamma > 1$, *pour tout* $T \in (0,\infty)$, *et où* $K = \Omega$ *excepté dans le cas de conditions au bord de Dirichlet où* K *est un compact arbitraire de* Ω. *De plus,* (ρ, u) *satisfait*

$$\begin{cases} Si\ \rho_0 \in L^q(\Omega), \quad Du_0 \in L^{\frac{q+\gamma}{2\gamma}}(\Omega)\ alors \\ \rho \in L^\infty((0,T); L^q(K)) \cap L^{q+\gamma}(K \times (0,T)), \\ Du \in L^{\frac{1+q}{\gamma}}(K \times (0,T))\ si\ q < \infty \\ Du \in L^p(K \times (0,T))\ pour\ tout\ p < \infty\ si\ q = \infty \\ u \in L^\infty((0,T); L^r(K))\ avec\ r < \infty\ si\ q = 3\gamma, \quad r = \infty\ si\ q > 3\gamma, \end{cases}$$

pour tout $T \in (0,\infty)$ *et tout* $q \in [3\gamma, \infty]$. *Dans les cas périodique et* $\Omega = \mathbb{R}^2$, (ρ, u) *satisfait pour tout* $q \in (2,\infty)$ *et tout* $T \in (0,\infty)$

$$\begin{cases} Si\ \rho_0 \in W^{1,q}(\Omega)\ et\ D^2 u_0 \in L^{\frac{q}{2}}(\Omega)\ alors \\ \rho \in \mathcal{C}([0,\infty); W^{1,q}(\Omega))\ et\ D^2 u \in L^q(\Omega \times (0,T)), \end{cases} \tag{1.12}$$

et il existe une unique solution (ρ, u) *vérifiant (1.11) et telle que* $\rho \in L^2((0,T); W^{1,q}(\Omega))$ *et* $u \in L^1((0,T); W^{1,\infty}(\Omega))$.

Dans le théorème 1.4, on peut obtenir plus de régularité sur ρ et u et sur leurs dérivées supérieures. Dans le cas de conditions au bord de Dirichlet, nous ne savons pas si les estimations (1.12) ont bien lieu et, par conséquent, nous n'avons pas d'information sur l'éventuelle unicité de la solution.

Le cas $\gamma = 1$ du théorème 1.4 a été traité pour des données périodiques par V.A. Weigant et A.V. Kazhikhov et dans le cas général par F.J. Chatelon et P. Orenga où les conditions suivantes étaient supposées :

$$u \cdot n = \text{rot } u (= \text{curl } u) = 0$$

où n désigne le vecteur normal extérieur à $\partial\Omega$. Ces conditions de bord permettent d'obtenir des résultats de régularité et d'unicité sur Ω.

Si $N = 3$ et $\gamma = 1$ il est aussi possible d'obtenir l'existence d'une solution (ρ, u) telle que

$$\rho \in L^\infty((0,\infty); L^1(\Omega)) \cap L^{\frac{N+2}{N}}(\Omega \times (0,\infty)), \quad \rho \log \rho \in L^\infty((0,\infty); L^1(\Omega)),$$

$$\forall T > 0, \quad u \in L^\infty((0,\infty); L^2(\Omega)) \cap L^2((0,T); H^1(\Omega)).$$

Dans le cas périodique et si $\gamma = 1$ et $N = 2$, l'unicité peut être obtenue sous des conditions plus faibles. En effet, dans ce cas, l'argument introduit par V.A. Weigant et A.V. Kazhikhov montre que l'unicité a lieu sous la seule restriction $\rho \in L^\infty(\Omega \times (0,\infty))$.

Chapitre 2

Solutions auto-similaires pour le problème d'approximation de type Stokes en 2D

2.1 Introduction

Les solutions auto-similaires avec une homogénéité appropriée jouent souvent un rôle crucial dans la théorie de la régularité et de la stabilité asymptotique des problèmes non-linéaires. Pour l'étude des fluides visqueux, l'importance des solutions auto-similaires dans la compréhension des interactions existantes entre les forces initiales et leur dissipation est connue depuis longtemps. En effet, dans son célèbre article [6], J.Leray soulève la question de l'existence de solutions auto-similaires pour l'équation tridimensionnelle incompressible de Navier-Stokes dès qu'il établit l'existence de solutions faibles pour ce système.
L'existence de solutions auto-similaires régressives reflète souvent la dissipation mécanique du problème non-linéaire, alors que l'existence de solutions auto-similaires progressives montre la dominance de la non-linéarité à travers la dissipation.

Pour le système de Navier-Stokes incompressible (1.1), l'existence de solutions auto-similaires régressives dans divers espaces (espaces de Morrey, de Besov, de Lebesgue faible...) a été obtenue par beaucoup d'auteurs. Le problème plus difficile est l'existence de solutions auto-similaires progressives, qui a été soulevé pour la première fois par J. Leray. Les estimations obtenues dans la théorie de la régularité partielle montrent qu'il n'existe pas de solutions auto-similaires progressives d'énergie finie localement.

Pour isoler les difficultés, nous considérons le modèle d'approximation de Stokes (1.10) en deux dimensions d'espace, où la pression joue un rôle dominant par rapport à la convection non-linéaire.

Dans le cas $\bar{\rho} = a = \mu = 1$ et $\xi = 0$, le système (1.10) devient

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \text{div } (\rho u) = 0 \\ \partial_t u - \triangle u = -\nabla \rho^\gamma \end{cases} \tag{2.1}$$

Notre but est de trouver des solutions auto-similaires progressives du système (2.1), c'est-à-dire des solutions (ρ, u) vérifiant

$$\rho(x,t) = \lambda^{\frac{2}{\gamma}} \rho(\lambda x, \lambda^2 t) \text{ et } u(x,t) = \lambda u(\lambda x, \lambda^2 t) \tag{2.2}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, $t > 0$ et $\lambda > 0$.

Avant d'aborder en détail la construction de solutions auto-similaires, nous expliquons d'abord la principale difficulté survenant ici. Remarquons que (2.2) implique que les fonctions

$$\rho_0(x) = \rho(x,0) \text{ et } u_0(x) = u(x,0) \tag{2.3}$$

doivent satisfaire

$$\rho_0(\lambda x) = \lambda^{-\frac{2}{\gamma}} \rho_0(x) \text{ et } u_0(\lambda x) = \lambda^{-1} u_0(x). \tag{2.4}$$

Autrement dit, (ρ_0, u_0) est homogène de degré $\big(-\dfrac{2}{\gamma}, -1\big)$ et toute donnée initiale donnant des solutions auto-similaires doit vérifier cette propriété. Malheureusement, ces fonctions ne sont dans aucun des espaces classiques de Sobolev ou Hölder. Nous allons les remplacer par les espaces de Besov homogènes qui contiennent de telles fonctions.

Le résultat principal est le suivant.

Théorème 2.1 *Soit (ρ_0, u_0), une fonction vérifiant (2.4). On suppose que*

$$\begin{array}{ll}
\|\rho_0\|_{\dot{B}^{-2+\frac{2}{p}}_{p,\infty}(\mathbb{R}^2)} \leq \delta,\ \|\rho_0\|_{L_M(\mathbb{R}^2)} \lesssim 1 \text{ et } \|\rho_0\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \lesssim 1 & \text{si } \gamma = 1 \text{ avec } 2 < p, q < 4; \\
\|\rho_0\|_{\dot{B}^{-1+\frac{2}{p}}_{p,\infty}(\mathbb{R}^2)} \leq \delta \text{ et } \|\rho_0\|_{L^\gamma(\mathbb{R}^2)} \lesssim 1 & \text{si } \gamma = 2 \text{ avec } p > 2\gamma,\ q > 2; \\
\|\rho_0\|_{\dot{B}^{-\frac{2}{\gamma}+\frac{2}{p}}_{p,\infty}(\mathbb{R}^2)} \leq \delta, \|\rho_0\|_{L^\gamma(\mathbb{R}^2)} \lesssim 1 \text{ et } \|\rho_0\|_{L^{\frac{\gamma}{2}}(\mathbb{R}^2)} \lesssim 1 & \text{si } 2 < \gamma \leq 4 \text{ avec } p > 2\gamma, q > 2; \\
\|u_0\|_{\dot{B}^{-1+\frac{2}{q}}_{q,\infty}(\mathbb{R}^2)} \leq \eta \text{ et } \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \lesssim 1 &
\end{array}$$

où δ et η sont des constantes suffisamment petites. Alors il existe une solution auto-similaire $(\rho(x,t), u(x,t))$ du problème (2.1) qui satisfait

$$\forall \quad 0 < t < T, \qquad \rho(x,t) = \frac{1}{t^{\frac{\gamma}{2}}} Q\big(\frac{x}{\sqrt{t}}\big) \text{ et } u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{t}} U\big(\frac{x}{\sqrt{t}}\big)$$

où

$$Q \in \dot{B}^{-\frac{2}{\gamma}+\frac{2}{p}}_{p,\infty}(\mathbb{R}^2) \cap L^p(\mathbb{R}^2) \text{ et } U \in \dot{B}^{-1+\frac{2}{q}}_{q,\infty}(\mathbb{R}^2).$$

Notons que les deux conditions

$$u_0(\lambda\cdot) = \lambda^{-1}u_0(\cdot) \text{ et } u_0 \in L^2(\mathbb{R}^2)$$

impliquent nécessairement $u_0 = 0$, ce qui nous amène à penser que ce théorème est vide de sens. Mais nous ignorerons cet aspect des choses et nous considérerons une fonction u_0 *a priori* non nulle.

Ce chapitre sera rédigé comme suit.
Dans la section 2.2, nous rappelons quelques propriétés des espaces de Besov homogènes grâce à la décomposition de Littlewood-Paley.
Puis dans la section 2.3, nous obtiendrons l'existence de solutions du problème (2.1) dans les espaces de Besov dans le cas où $\gamma = 1$.
Le passage à la limite dans ce cas sera étudié dans la section 2.4.
Dans la section 2.5, nous traiterons le cas général et démontrerons le théorème 2.1.

2.2 Théorie de Littlewood-Paley et espaces de Besov

Nous nous intéressons ici aux espaces de Besov homogènes ; ceux-ci peuvent aisément se définir en utilisant la décomposition de Littlewood-Paley.

Considérons tout d'abord une fonction φ définie sur $\mathbb{R}^2$ dont la transformée de Fourier $\hat{\varphi}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact et vérifie

$$0 \leq \hat{\varphi} \leq 1 \text{ et } \hat{\varphi}(\xi) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{pour } |\xi| \leq 1 \\ 0 & \text{pour } |\xi| \geq 2 \end{array} \right. ,$$

φ est alors dans la classe de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$. Posons à présent, pour des entiers $j \in \mathbb{Z}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi(x) = 4\varphi(2x) - \varphi(x) \\ \varphi_j(x) = 2^{2j}\varphi(2^j x) \\ \psi_j(x) = 2^{2j}\psi(2^j x) \\ S_j f = \varphi_j \star f \ , \ \Delta_j f = \psi_j \star f \end{array} \right.$$

où f est une distribution tempérée de $\mathbb{R}^2$.
On a alors les décompositions de Littlewood-Paley

$$f = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \Delta_j f = S_0 f + \sum_{j\geq 0} \Delta_j f.$$

Nous pouvons maintenant définir les espaces de Besov homogènes. Si α et p sont des réels avec $p \geq 1$, on introduit

$$\dot{B}^\alpha_{p,\infty} = \{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2), \|f\|_{\dot{B}^\alpha_{p,\infty}} := \sup_{j\in\mathbb{Z}} 2^{\alpha j}\|S_j f\|_{L^p} < \infty\}.$$

On vérifie que cette définition ne dépend pas de la fonction φ choisie.
Plus généralement, si $q \geq 1$, on dit que $f \in \dot{B}^{\alpha}_{p,q}$ lorsque

$$\|f\|_{\dot{B}^{\alpha}_{p,q}} := \Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}} (2^{\alpha j}\|\Delta_j f\|_p)^q\Big)^{1/q} < \infty.$$

Ces espaces de fonctions, tout comme les espaces de Lebesgue L^p sont dit homogènes car pour toute fonction ϕ, la quantité $\|\phi(\lambda.)\|$ est homogène pour tout $\lambda > 0$. Ceci nous amène à la définition suivante.

Définition 2.1 *Soit X un espace de Banach tel que $X \hookrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$. On dit que X est homogène s'il existe un réel r tel que pour toute $\phi \neq 0$ de X, on a*

$$\|\phi(\lambda\cdot)\|_X = \lambda^r \|\phi\|_X \ , \ \lambda > 0.$$

Ce nombre r est alors appelé le degré de régularité de X. On a donc

$$\deg(X) = \log_\lambda \Big(\frac{\|\phi(\lambda.)\|_X}{\|\phi\|_X}\Big)$$

où ϕ est une fonction non nulle de X. Cette quantité ne dépend pas de ϕ.

On vérifie aisément que les degrés des espaces fonctionnels usuels sont

$$\deg(L^p(\mathbb{R}^2)) = -\frac{2}{p}, \quad 1 \leq p \leq \infty,$$

$$\deg(W^{s,p}(\mathbb{R}^2)) = \deg(\dot{B}^{s}_{p,q}(\mathbb{R}^2)) = s - \frac{2}{p}, \quad 1 \leq p, q \leq \infty.$$

Voici maintenant quelques propriétés des espaces de Besov qui nous seront utiles dans la suite.

Proposition 2.1 *Pour $1 \leq p \leq \infty$ et $\alpha > 0$, les normes suivantes sont équivalentes*

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_{\dot{B}^{-\alpha}_{p,\infty}(\mathbb{R}^2)} &\approx \sup_{j\in\mathbb{Z}} \big(2^{-\alpha j}\|\triangle_j \cdot\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}\big) \approx \sup_{t\geq 0} \big(t^{\frac{\alpha}{2}}\|S(t)\cdot\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}\big) \\ &\approx \sup_{t\geq 0} \|S(t)\cdot\|_{\dot{B}^{-\alpha}_{p,\infty}(\mathbb{R}^2)} \end{aligned}$$

où $S(t) = \exp(t\triangle)$ désigne le noyau de la chaleur.

DEMONSTRATION : La première équivalence est une conséquence de l'identité

$$\triangle_j = S_{j+1} - S_j. \tag{2.5}$$

En effet, il vient

$$\begin{aligned} \sup_{j\in\mathbb{Z}} 2^{-\alpha j}\|\triangle_j u\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} &\leq \sup_{j\in\mathbb{Z}} 2^{-\alpha j}\big(\|S_{j+1}u\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} + \|S_j u\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}\big) \\ &\leq (2^\alpha + 1)\sup_{j\in\mathbb{Z}} 2^{-\alpha_j}\|S_j u\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}. \end{aligned}$$

Toujours d'après (2.5), on a

$$\begin{aligned}\sup_{j\in\mathbb{Z}} 2^{-\alpha j}\|S_j u\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} &= 2^{-\alpha}\sup_{j\in\mathbb{Z}} 2^{-\alpha_j}\|S_{j+1}u\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}\\ &\leq 2^{-\alpha}\big(\sup_{j\in\mathbb{Z}} 2^{-\alpha j}\|\triangle_j u\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} + \sup_{j\in\mathbb{Z}} 2^{-\alpha j}\|S_j u\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}\big)\end{aligned}$$

et donc, puisque $\alpha > 0$,

$$\sup_{j\in\mathbb{Z}} 2^{-\alpha j}\|S_j u\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \leq \frac{1}{1-2^{-\alpha}}\sup_{j\in\mathbb{Z}} 2^{-\alpha j}\|\triangle_j u\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}.$$

Proposition 2.2 *On a les injections continues*

$$L^2(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow \dot{B}^{-\alpha_1}_{p_1,\infty}(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow \dot{B}^{-\alpha_2}_{p_2,\infty}(\mathbb{R}^2)$$

avec

$$\alpha_i = 1 - \frac{2}{p_i}, \qquad 2 \leq p_1 \leq p_2 \leq \infty.$$

DEMONSTRATION : Ces injections sont conséquences des deux importantes inégalités :

1. INEGALITE DE YOUNG : Si $f \in L^p(\mathbb{R}^2)$ et $g \in L^q(\mathbb{R}^2)$ alors le produit de convolution $f \star g$ vérifie

$$\|f\star g\|_{L^r(\mathbb{R}^2)} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}\|g\|_{L^q(\mathbb{R}^2)}, \qquad 1+\frac{1}{r} = \frac{1}{p}+\frac{1}{q}, \qquad 1 \leq p,q,r \leq \infty.$$

2. INEGALITE DE BERNSTEIN : Soit $1 \leq p \leq q \leq \infty$. On suppose que $f \in L^p(\mathbb{R}^2)$ et que la transformée de Fourier $\hat{f}$ de f est portée par la boule $B(0,R)$; alors

$$\|f\|_{L^q(\mathbb{R}^2)} \lesssim R^{2\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}.$$

On peut à présent estimer simplement

$$\begin{aligned}\|u\|_{\dot{B}^{-\alpha_1}_{p_1,\infty}(\mathbb{R}^2)} &\approx \sup_{j\in\mathbb{Z}}\big(2^{-\alpha_1 j}\|\psi_j \star f\|_{L^{p_1}(\mathbb{R}^2)}\big)\\ &\lesssim \sup_{j\in\mathbb{Z}}\big(2^{-\alpha_1 j}\|\psi_j\|_{L^q(\mathbb{R}^2)}\big)\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}, \qquad \frac{1}{q} = \frac{1}{2}+\frac{1}{p_1}\\ &= \sup_{j\in\mathbb{Z}}\big(2^{-\alpha_1 j}2^{2j}2^{-\frac{2j}{q}}\|\psi\|_{L^q(\mathbb{R}^2)}\big)\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}.\end{aligned}$$

Puisque ψ est à décroissance rapide, la quantité $\|\psi\|_{L^q(\mathbb{R}^2)}$ est finie et, d'autre part, $2^{-\alpha_1 j}2^{2j}2^{-\frac{2j}{q}} = 2^{\left(2-\alpha_1-1+\frac{1}{p_1}\right)j} = 1$, ce qui prouve la première injection.

Pour $u \in \dot{B}^{-\alpha_2}_{p_2,\infty}(\mathbb{R}^2)$, la fonction $\triangle_j u$ a son support dans la boule centrée en 0 et de rayon $C2^j$, il s'ensuit que

$$
\begin{aligned}
\|u\|_{\dot{B}^{-\alpha_2}_{p_2,\infty}(\mathbb{R}^2)} &\approx \sup_{j\in\mathbb{Z}} \left(2^{-\alpha_2 j}\|\triangle_j u\|_{L^{p_2}(\mathbb{R}^2)}\right)\\
&\lesssim \sup_{j\in\mathbb{Z}} \left(2^{-\alpha_2 j}2^{2j\left(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}\right)}\|\triangle_j u\|_{L^{p_1}(\mathbb{R}^2)}\right)\\
&= \sup_{j\in\mathbb{Z}} \left(2^{-\alpha_2 j}2^{(\alpha_2-\alpha_1)j}\|\triangle_j u\|_{L^{p_1}(\mathbb{R}^2)}\right)\\
&\approx \|u\|_{\dot{B}^{-\alpha_1}_{p_1,\infty}(\mathbb{R}^2)},
\end{aligned}
$$

ce qui prouve que $\dot{B}^{-\alpha_1}_{p_1,\infty}(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow \dot{B}^{-\alpha_2}_{p_2,\infty}(\mathbb{R}^2)$. $\square$

Proposition 2.3 *Les injections suivantes ont lieu pour $s \in \mathbb{R}$ et $1 \leq p, q, k, l \leq \infty$*

$$L^p(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow \dot{B}^{-\alpha}_{q,\infty}(\mathbb{R}^2) \text{ et } W^{s,k}(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow \dot{B}^{-\beta}_{l,\infty}(\mathbb{R}^2)$$

avec

$$\deg(L^p(\mathbb{R}^2)) = \deg(\dot{B}^{-\alpha}_{q,\infty}(\mathbb{R}^2)) \text{ et } \deg(W^{s,k}(\mathbb{R}^2)) = \deg(\dot{B}^{-\beta}_{l,\infty}(\mathbb{R}^2)),$$

c'est-à-dire

$$-\frac{2}{p} = -\alpha - \frac{2}{q} \text{ et } s - \frac{2}{k} = -\beta - \frac{2}{l}.$$

En particulier,

$$L^\gamma(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow \dot{B}^{-\frac{2}{\gamma}+\frac{2}{p}}_{p,\infty}(\mathbb{R}^2) \text{ dès que } p > \gamma.$$

DEMONSTRATION : On utilise à nouveau l'inégalité de Young pour trouver

$$
\begin{aligned}
\|u\|_{\dot{B}^{-\alpha}_{q,\infty}(\mathbb{R}^2)} &\lesssim \sup_{j\in\mathbb{Z}} \left(2^{-\alpha j}\|\psi_j\|_{L^r(\mathbb{R}^2)}\right)\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}, \qquad \frac{1}{r} = 1 + \frac{1}{q} - \frac{1}{p}\\
&= \sup_{j\in\mathbb{Z}} 2^{\left(2-\alpha-\frac{2}{r}\right)j}\|\psi\|_{L^r(\mathbb{R}^2)}\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}\\
&= \|\psi\|_{L^r(\mathbb{R}^2)}\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}.
\end{aligned}
$$

Pour démontrer le second point, on rappelle l'injection de Sobolev

$$W^{s,k}(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow L^r(\mathbb{R}^2) \text{ avec } \frac{1}{r} = \frac{1}{k} - \frac{s}{2}$$

et d'après la première injection,

$$W^{s,k}(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow L^r(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow \dot{B}^{-\beta}_{l,\infty}(\mathbb{R}^2). \quad \square$$

2.3 Problème de Cauchy du système d'approximation dans les espaces de Besov

L'existence de solutions auto-similaires du problème (2.1) va être obtenue comme limite de solution du système d'approximation

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \text{div } (\rho u) = \varepsilon \triangle \rho \\ \partial_t u - \triangle u = -\nabla \rho^\gamma \end{cases} \tag{2.6}$$

lorsque $\varepsilon \to 0$.
Si $(\rho(x,t), u(x,t))$ est une solution de (2.6) et si l'on pose $\tilde{\rho}(x,t) = \lambda^{\frac{2}{\gamma}} \rho(\lambda x, \lambda^2 t)$, $\tilde{u}(x,t) = \lambda u(\lambda x, \lambda^2 t)$, $(\lambda > 0)$, il vient alors

$$\partial_t \tilde{\rho} + \text{div } (\tilde{\rho}\tilde{u}) = \lambda^{2+\frac{2}{\gamma}} \big(\partial_t \rho + \text{div } (\rho u)\big) = \lambda^{2+\frac{2}{\gamma}} \varepsilon \triangle \rho = \varepsilon \triangle \tilde{\rho}$$

$$\partial_t \tilde{u} - \triangle \tilde{u} = \lambda^3 \big(\partial_t u - \triangle u\big) = -\lambda^3 \nabla \rho^\gamma = -\nabla \tilde{\rho}^\gamma,$$

ce qui montre que le système (2.6) est invariant par le changement d'échelle $(\rho(x,t), u(x,t)) = (\lambda^{\frac{2}{\gamma}} \rho(\lambda x, \lambda^2 t), \lambda u(\lambda x, \lambda^2 t))$.

Dans cette section, nous considérons le cas $\gamma = 1$, le problème de Cauchy associé à ce système s'écrit donc

$$\begin{cases} \partial_t \rho - \varepsilon \triangle \rho = -\text{div } (\rho u) \\ \partial_t u - \triangle u = -\nabla \rho \\ \rho(x,0) = \rho_0(x), \quad u(x,0) = u_0(x) \end{cases} \tag{2.7}$$

Nous supposons que les données initiales vérifient

$$\rho_0 \in \dot{B}_{p,\infty}^{-2+\frac{2}{p}}(\mathbb{R}^2) \text{ et } u_0 \in \dot{B}_{q,\infty}^{-1+\frac{2}{q}}(\mathbb{R}^2) \tag{2.8}$$

avec $p > 1$ et $q > 2$.

Les équations (2.7) s'écrivent sous forme intégrale

$$u(x,t) = S(t)u_0(x) - \int_0^t S(t-\tau) \nabla \rho(x,\tau) d\tau \tag{2.9}$$

$$\rho(x,t) = S(\varepsilon t)\rho_0(x) - \int_0^t S(\varepsilon(t-\tau)) \text{div } (\rho(x,\tau) u(x,\tau)) d\tau.$$

Combinées, ces deux équations fournissent

$$\begin{aligned} \rho(x,t) &= S(\varepsilon t)\rho_0(x) - \int_0^t S(\varepsilon(t-\tau)) \text{div } (\rho(x,\tau) S(\tau) u_0(x)) d\tau \\ &+ \int_0^t S(\varepsilon(t-\tau)) \text{div } \Big(\rho(x,\tau) \int_0^\tau S(\tau-\sigma) \nabla \rho(x,\sigma) d\sigma\Big) d\tau \end{aligned}$$

ou encore

$$\rho(x,t) = S(\varepsilon t)\rho_0(x) - \mathcal{A}[\rho, u_0](x,t) + \mathcal{B}[\rho,\rho](x,t) \tag{2.10}$$

avec

$$\mathcal{A}[\rho,u](x,t) = \int_0^t S(\varepsilon(t-\tau))\mathrm{div}\ (\rho(x,\tau)S(\tau)u(x))d\tau$$

$$\mathcal{C}[\rho](x,t) = \int_0^t S(t-\tau)\nabla\rho(x,\tau)d\tau$$

$$\text{et } \mathcal{B}[\rho,\sigma](x,t) = \int_0^t S(\varepsilon(t-\tau))\mathrm{div}\ \big(\rho(x,\tau)\mathcal{C}[\sigma](x,\tau)\big)d\tau.$$

Remarquons que l'équation (2.10) ne fait pas intervenir $u(x,t)$, celui-ci étant donné à partir de $\rho(x,t)$ dans (2.9). L'existence de solutions de (2.10) va être établie par une méthode de point fixe dans un espace fonctionnel bien choisi. Posons pour cela

$$Y = \mathcal{C}_w\big([0,\infty); \dot{B}^{-2+\frac{2}{p}}_{p,\infty}(\mathbb{R}^2)\big) \cap t^{1-\frac{1}{p}}L^\infty\big([0,\infty); L^p(\mathbb{R}^2)\big), \quad 2<p<4$$

muni de la norme

$$\|\cdot\|_Y = \sup_{t\geq 0}\|\cdot\|_{\dot{B}^{-2+\frac{2}{p}}_{p,\infty}(\mathbb{R}^2)} + \sup_{t\geq 0} t^{1-\frac{1}{p}}\|\cdot\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}$$

où $\mathcal{C}_w\big([0,\infty); E\big)$ est l'espace des fonctions $\rho(t) : [0;\infty) \to E$ continues pour la topologie faible $\sigma(E,E')$, c'est-à-dire

$$\lim_{t\to t_0}\langle \rho(x,t) - \rho(x,t_0), \psi\rangle = 0, \qquad \forall \psi(x) \in E'$$

E' étant le dual topologique de E. Notons qu'une suite $(f_j)_j$ d'éléments d'un espace $X \hookrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ converge faiblement vers $f \in X$ si et seulement si la suite $(\|f_j\|_X)_j$ est bornée et $f_j \rightharpoonup f$ au sens des distributions.

Visiblement, Y est un espace de Banach.

Nous avons tout d'abord besoin d'estimations dans Y des opérateurs $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$.

Lemme 2.1 *Pour $\varphi \in L^r(\mathbb{R}^2)$ et pour tout $t>0$, on a les inégalités*

$$\|S(t)\varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \lesssim t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}}\|\varphi\|_{L^r(\mathbb{R}^2)}, \quad 1 \leq r \leq p < \infty \tag{2.11}$$

$$\|S(t)div\ \varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \lesssim t^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{p}-\frac{1}{r}}\|\varphi\|_{L^r(\mathbb{R}^2)}, \quad 1 \leq r \leq p < \infty, r \neq \infty \tag{2.12}$$

DEMONSTRATION : On désigne par C une constante indépendante du temps. Le noyau de la chaleur peut s'écrire $S(t) = \dfrac{C}{t}\exp\big(-\dfrac{|x|^2}{4t}\big)$, d'où l'estimation L^q

$$\begin{aligned}
\|S(t)\|_{L^q(\mathbb{R}^2)} &= \frac{C}{t}\Big(\int_{\mathbb{R}^2}\exp\big(-q\frac{|x|^2}{4t}\big)dx\Big)^{\frac{1}{q}} \\
&= \frac{C}{t}t^{\frac{1}{q}}\Big(\int_{\mathbb{R}^2}\exp(-|u|^2)du\Big)^{\frac{1}{q}} \\
&= Ct^{\frac{1}{q}-1}.
\end{aligned}$$

L'inégalité de Young nous donne

$$\|S(t)\varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \lesssim \|S(t)\|_{L^q(\mathbb{R}^2)}\|\varphi\|_{L^r(\mathbb{R}^2)} \text{ avec } 1+\frac{1}{p}=\frac{1}{q}+\frac{1}{r}$$

et par suite, (2.11) est prouvée avec $r \leq p$.

Pour établir (2.12), on procède de la même manière en remarquant que $S(t)\mathrm{div}\ \varphi = \mathrm{div}\ S(t)\varphi$. Pour $i=1,2$, on a

$$\partial_{x_i} S(t) = C\frac{x_i}{t^2}\exp\big(-\frac{|x|^2}{4t}\big)$$

et donc

$$\begin{aligned}
\|\partial_{x_i} S(t)\|_{L^q(\mathbb{R}^2)} &= \frac{C}{t^2}\Big(\int_{\mathbb{R}^2} x_i^q \exp\big(-q\frac{|x|^2}{4t}\big)dx\Big)^{\frac{1}{q}}\\
&= \frac{C}{t^2}t^{\frac{1}{q}}\Big(\int_{\mathbb{R}^2} t^{\frac{q}{2}}u_i^q \exp\big(-|u|^2\big)du\Big)^{\frac{1}{q}}\\
&= Ct^{\frac{1}{q}-\frac{3}{2}}.
\end{aligned}$$

Appliquant encore l'inégalité de Young, on trouve

$$\|S(t)\mathrm{div}\ \varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \lesssim \|\partial_{x_i}S(t)\|_{L^q(\mathbb{R}^2)}\|\varphi\|_{L^r(\mathbb{R}^2)} \text{ avec } 1+\frac{1}{p}=\frac{1}{q}+\frac{1}{r},$$

d'où la deuxième inégalité recherchée. □

Lemme 2.2 *Si p et q sont tels que $2 < p, q < 4$, alors on a*

$$\|\mathcal{A}[\rho,u_0]\|_Y \lesssim \varepsilon^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}\|\rho\|_Y\|u_0\|_{\dot{B}^{-1+\frac{2}{q}}_{q,\infty}(\mathbb{R}^2)}.$$

DEMONSTRATION : Par l'injection de Sobolev $L^1(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow \dot{B}^{-2+\frac{2}{p}}_{p,\infty}(\mathbb{R}^2)$, on a

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{A}[\rho,u_0]\|_{\dot{B}^{-2+\frac{2}{p}}_{p,\infty}(\mathbb{R}^2)} &\lesssim \|\mathcal{A}[\rho,u_0]\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}\\
&\lesssim \sup_{t\geq 0}\int_0^t \|S(\varepsilon(t-\tau))\mathrm{div}\ \big(\rho(x,\tau)S(\tau)u_0(x)\big)\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}d\tau
\end{aligned}$$

puis par (2.12) avec $p=1$ et $r=\dfrac{pq}{p+q}$,

$$\|\mathcal{A}[\rho,u_0]\|_{\dot{B}^{-2+\frac{2}{p}}_{p,\infty}(\mathbb{R}^2)} \lesssim \varepsilon^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\sup_{t\geq 0}\int_0^t |t-\tau|^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\|\rho(x,\tau)S(\tau)u_0(x)\|_{L^{\frac{pq}{p+q}}(\mathbb{R}^2)}d\tau.$$

On applique ensuite l'inégalité de Hölder

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{A}[\rho,u_0]\|_{\dot B^{-2+\frac{2}{p}}_{p,\infty}(\mathbb{R}^2)} &\lesssim \varepsilon^{-\frac12-\frac1q}\sup_{t\geq 0}\int_0^t |t-\tau|^{\frac12-\frac1p-\frac1p}\|\rho(x,\tau)\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}\|S(\tau)u_0(x)\|_{L^q(\mathbb{R}^2)}d\tau\\
&= \varepsilon^{-\frac12-\frac1q}\sup_{t\geq 0}\int_0^t \left[\tau^{-\frac32+\frac1p+\frac1q}|t-\tau|^{\frac12-\frac1p-\frac1q}\right]\left[\tau^{1-\frac1p}\|\rho(x,\tau)\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}\right]\\
&\quad \left[\tau^{\frac12-\frac1q}\|S(\tau)u_0(x)\|_{L^q(\mathbb{R}^2)}\right]d\tau\\
&\lesssim \varepsilon^{-\frac12-\frac1q}\|\rho\|_Y\|u_0\|_{\dot B^{-1+\frac2q}_{q,\infty}(\mathbb{R}^2)}\sup_{t\geq 0}\int_0^t \tau^{-\frac32+\frac1p+\frac1q}|t-\tau|^{\frac12-\frac1p-\frac1q}d\tau\\
&= \varepsilon^{-\frac12-\frac1q}\|\rho\|_Y\|u_0\|_{\dot B^{-1+\frac2q}_{q,\infty}(\mathbb{R}^2)}\sup_{t\geq 0}\int_0^1 |1-\sigma|^{\frac12-\frac1p-\frac1q}\sigma^{-\frac32+\frac1p+\frac1q}d\sigma
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé la proposition 2.1. Puisque $2 < p,q < 4$ par hypothèse, il vient $-\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q} > -1$ et $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{q} > -1$ donc

$$\int_0^1 |1-\sigma|^{\frac12-\frac1p-\frac1q}\sigma^{-\frac32+\frac1p+\frac1q}d\sigma < \infty$$

et

$$\sup_{t\geq 0}\|\mathcal{A}[\rho,u_0]\|_{\dot B^{-2+\frac2p}_{p,\infty}(\mathbb{R}^2)} \lesssim \varepsilon^{-\frac12-\frac1q}\|\rho\|_Y\|u_0\|_{\dot B^{-1+\frac2q}_{q,\infty}(\mathbb{R}^2)}. \tag{2.13}$$

Toujours d'après (2.12) et par Hölder,

$$\begin{aligned}
\sup_{t\geq 0} t^{1-\frac1p}\|\mathcal{A}[\rho,u_0]\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} &\lesssim \varepsilon^{-\frac12-\frac1q}\sup_{t\geq 0}t^{1-\frac1p}\int_0^t |t-\tau|^{-\frac12-\frac1q}\|\rho(x,\tau)S(\tau)u_0(x)\|_{L^{\frac{pq}{p+q}}(\mathbb{R}^2)}d\tau\\
&\lesssim \varepsilon^{-\frac12-\frac1q}\sup_{t\geq 0}t^{1-\frac1p}\int_0^t \left[\tau^{-\frac32+\frac1p+\frac1p}|t-\tau|^{-\frac12-\frac1q}\right]\left[\tau^{1-\frac1p}\|\rho\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}\right]\\
&\quad \left[\tau^{\frac12-\frac1q}\|S(\tau)u_0\|_{L^q(\mathbb{R}^2)}\right]d\tau\\
&\lesssim \varepsilon^{-\frac12-\frac1q}\|\rho\|_Y\|u_0\|_{\dot B^{-1+\frac2q}_{q,\infty}(\mathbb{R}^2)}\sup_{t\geq 0}\int_0^t t^{1-\frac1p}\tau^{-\frac32+\frac1p+\frac1q}|t-\tau|^{-\frac12-\frac1q}d\tau\\
&\lesssim \varepsilon^{-\frac12-\frac1q}\|\rho\|_Y\|u_0\|_{\dot B^{-1+\frac2q}_{q,\infty}(\mathbb{R}^2)}\int_0^1 \sigma^{-\frac32+\frac1p+\frac1q}|1-\sigma|^{-\frac12-\frac1q}d\sigma.
\end{aligned}$$

Les choix de p et q étant tels que cette dernière intégrale est finie, on trouve

$$\sup_{t\geq 0} t^{1-\frac1p}\|\mathcal{A}[\rho,u_0]\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \lesssim \varepsilon^{-\frac12-\frac1q}\|\rho\|_Y\|u_0\|_{\dot B^{-1+\frac2q}_{q,\infty}(\mathbb{R}^2)}. \tag{2.14}$$

Finalement, les inégalités (2.13) et (2.14) valident le lemme. □

Nous allons maintenant faire des estimations similaires sur $\mathcal{B}$.

Lemme 2.3 *Pour $2 < p < 4$, l'opérateur $\mathcal{B}$ satisfait*

$$\|\mathcal{B}[\rho,\rho]\|_Y \lesssim \varepsilon^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}\|\rho\|_Y^2.$$

DEMONSTRATION : L'injection de Sobolev $L^1(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow \dot{B}_{p,\infty}^{-2+\frac{2}{p}}(\mathbb{R}^2)$, la relation (2.12), et l'inégalité de Hölder nous permettent d'écrire successivement

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{B}[\rho,\rho]\|_{\dot{B}_{p,\infty}^{-2+\frac{2}{p}}(\mathbb{R}^2)} &\lesssim \sup_{t\geq 0}\int_0^t \|S(\varepsilon(t-\tau))\text{div}\,\big(\rho(x,\tau)\mathcal{C}[\rho](x,\tau)\big)\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}d\tau \\
&\lesssim \varepsilon^{\frac{1}{2}-\frac{2}{p}}\sup_{t\geq 0}\int_0^t |t-\tau|^{\frac{1}{2}-\frac{2}{p}}\|\rho(x,\tau)\mathcal{C}[\rho](x,\tau)\|_{L^{\frac{p}{2}}(\mathbb{R}^2)}d\tau \\
&\lesssim \varepsilon^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}\sup_{t\geq 0}\int_0^t |t-\tau|^{\frac{1}{2}-\frac{2}{p}}\|\rho(x,\tau)\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}\|\mathcal{C}[\rho](x,\tau)\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}d\tau.
\end{aligned}$$

Puis on fait apparaître la quantité $\|\rho\|_Y$

$$\|\mathcal{B}[\rho,\rho]\|_{\dot{B}_{p,\infty}^{-2+\frac{2}{p}}(\mathbb{R}^2)} \lesssim \varepsilon^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}\|\rho\|_Y\sup_{t\geq 0}\int_0^t |t-\tau|^{\frac{1}{2}-\frac{2}{p}}\tau^{-1+\frac{1}{p}}\Big(\int_0^\tau \|S(\tau-\sigma)\text{div}\,\rho(x,\sigma)\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}d\sigma\Big)d\tau$$

et à nouveau par (2.12),

$$\begin{aligned}
\int_0^\tau \|S(\tau-\sigma)\text{div}\,\rho(x,\sigma)\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}d\sigma &\lesssim \int_0^\tau |\tau-\sigma|^{-\frac{1}{2}}\|\rho(x,\sigma)\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}d\sigma \\
&\lesssim \|\rho\|_Y\int_0^\tau |\tau-\sigma|^{-\frac{1}{2}}\sigma^{-1+\frac{1}{p}}d\sigma \\
&= \|\rho\|_Y\tau^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{p}}\int_0^1 |1-\sigma|^{\frac{1}{2}-\frac{2}{p}}\sigma^{-1+\frac{1}{p}}d\sigma \\
&\lesssim \|\rho\|_Y\tau^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Il vient donc

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{B}[\rho,\rho]\|_{\dot{B}_{p,\infty}^{-2+\frac{2}{p}}(\mathbb{R}^2)} &\lesssim \varepsilon^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}\|\rho\|_Y^2\sup_{t\geq 0}\int_0^t |t-\tau|^{\frac{1}{2}-\frac{2}{p}}\tau^{\frac{3}{2}+\frac{2}{p}}d\tau \\
&\lesssim \varepsilon^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}\|\rho\|_Y^2\int_0^1 |1-\sigma|^{\frac{1}{2}-\frac{2}{p}}\sigma^{-\frac{3}{2}+\frac{2}{p}}d\sigma \\
&\lesssim \varepsilon^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}\|\rho\|_Y^2. \qquad (2.15)
\end{aligned}$$

Nous avons utilisé le fait que $\dfrac{1}{2}-\dfrac{2}{p}$, $-\dfrac{3}{2}+\dfrac{2}{p}$ et $-1+\dfrac{1}{p}$ sont > -1.

Par des arguments similaires,

$$\begin{aligned}
\sup_{t\geq 0} t^{1-\frac{1}{p}} \|\mathcal{B}[\rho,\rho]\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} &\lesssim \sup_{t\geq 0} \int_0^t t^{1-\frac{1}{p}} \|S(\varepsilon(t-\tau))\mathrm{div}\, \big(\rho(x,\tau)\mathcal{C}[\rho](x,\tau)\big)\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} d\tau \\
&\lesssim \varepsilon^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} \sup_{t\geq 0} \int_0^t t^{1-\frac{1}{p}} |t-\tau|^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} \|\rho(x,\tau)\mathcal{C}[\rho](x,\tau)\|_{L^{\frac{p}{2}}(\mathbb{R}^2)} d\tau \\
&\lesssim \varepsilon^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} \sup_{t\geq 0} \int_0^t t^{1-\frac{1}{p}} |t-\tau|^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} \|\rho(x,\tau)\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \|\mathcal{C}[\rho](x,\tau)\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} d\tau \\
&\lesssim \varepsilon^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} \|\rho\|_Y \sup_{t\geq 0} \int_0^t t^{1-\frac{1}{p}} |t-\tau|^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} \tau^{-1+\frac{1}{p}} \|\mathcal{C}[\rho](x,\tau)\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} d\tau.
\end{aligned}$$

Comme précédemment, on a

$$\|\mathcal{C}[\rho](x,\tau)\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \lesssim \|\rho\|_Y \tau^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{p}},$$

ce qui nous amène à

$$\begin{aligned}
\sup_{t\geq 0} t^{1-\frac{1}{p}} \|\mathcal{B}[\rho,\rho]\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} &\lesssim \varepsilon^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} \|\rho\|_Y^2 \sup_{t\geq 0} \int_0^t t^{1-\frac{1}{p}} |t-\tau|^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} \tau^{-\frac{3}{2}+\frac{2}{p}} d\tau \\
&= \varepsilon^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} \|\rho\|_Y^2 \int_0^1 |1-\sigma|^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} \sigma^{-\frac{3}{2}+\frac{2}{p}} d\sigma \\
&\lesssim \varepsilon^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} \|\rho\|_Y^2.
\end{aligned}$$

Associée avec (2.15), cette estimation donne le résultat désiré. □

Nous sommes désormais en mesure d'énoncer et de démontrer un résultat d'existence et d'unicité de l'équation (2.10).

Théorème 2.2 *A ε fixé et pour tout $2 < p,q < 4$ et toute donnée initiale $\rho_0 \in \dot{B}_{p,\infty}^{-2+\frac{2}{p}}(\mathbb{R}^2)$, $u_0 \in \dot{B}_{q,\infty}^{-1+\frac{2}{q}}(\mathbb{R}^2)$ vérifiant*

$$\|\rho_0\|_{\dot{B}_{p,\infty}^{-2+\frac{2}{p}}(\mathbb{R}^2)} \leq \delta \ \text{et}\ \|u_0\|_{\dot{B}_{q,\infty}^{-1+\frac{2}{q}}(\mathbb{R}^2)} \leq \eta \tag{2.16}$$

avec δ et η suffisamment petits, il existe une unique solution $\rho(x,t) \in Y$ de (2.10) qui satisfait

$$\rho(t) - S(\varepsilon t)\rho_0(x) \in L^\infty([0,\infty); L^1(\mathbb{R}^2)) \tag{2.17}$$

$$\|\rho\|_Y = \sup_{t\geq 0} \|\rho\|_{\dot{B}_{p,\infty}^{-2+\frac{2}{p}}(\mathbb{R}^2)} + \sup_{t\geq 0} t^{1-\frac{1}{p}} \|\rho\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \leq C \tag{2.18}$$

où C est une constante qui ne dépend que de ρ_0, u_0, p, q et ε.

DEMONSTRATION : Nous allons travailler dans l'espace

$$Y_\delta = \{\rho(t) \in Y; \|\rho\|_Y \leq 2C\delta\}.$$

Muni de la distance

$$d(\rho_1,\rho_2)=\sup_{t\geq 0} t^{1-\frac{1}{p}}\|\rho_1-\rho_2\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}, \qquad \rho_1,\rho_2\in Y_\delta,$$

cet espace est complet. Introduisons maintenant l'opérateur

$$\mathcal{T}\rho = S(\varepsilon t)\rho_0-\mathcal{A}[\rho,u_0]+\mathcal{B}[\rho,\rho]$$

défini sur Y_δ. Afin d'appliquer le théorème de point fixe de Banach, nous devons montrer que $\mathcal{T}$ est une contraction de Y_δ, mais commençons par vérifier que $\mathcal{T}\rho\in Y_\delta$ lorsque $\rho\in Y_\delta$. Dans la démonstration des lemmes 2.2 et 2.3, nous avons établi les inégalités

$$t^{1-\frac{1}{p}}\|\mathcal{A}[\rho,u_0]\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}\lesssim \varepsilon^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}\sup_{0\leq\tau\leq t}\tau^{1-\frac{1}{p}}\|\rho\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \tag{2.19}$$

$$t^{1-\frac{1}{p}}\|\mathcal{B}[\rho,\rho]\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}\lesssim \varepsilon^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}\big(\sup_{0\leq\tau\leq t}\tau^{1-\frac{1}{p}}\|\rho\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}\big)^2 \tag{2.20}$$

$$\|\mathcal{A}[\rho,u_0]\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}\lesssim \varepsilon^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\sup_{0\leq\tau\leq t}\tau^{1-\frac{1}{p}}\|\rho\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \tag{2.21}$$

$$\|\mathcal{B}[\rho,\rho]\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}\lesssim \varepsilon^{\frac{1}{2}-\frac{2}{p}}\big(\sup_{0\leq\tau\leq t}\tau^{1-\frac{1}{p}}\|\rho\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}\big)^2 \tag{2.22}$$

En utilisant l'équivalence des normes de la proposition 2.1, on voit que

$$\sup_{t\geq 0}\|S(\varepsilon t)\rho_0\|_{\dot{B}^{-2+\frac{2}{p}}_{p,\infty}(\mathbb{R}^2)}\approx\|\rho_0\|_{\dot{B}^{-2+\frac{2}{p}}_{p,\infty}(\mathbb{R}^2)}<\infty,$$

et d'autre part, il est clair que $S(\varepsilon t)\rho_0$ converge vers $S(\varepsilon t_0)\rho_0$ au sens des distributions pour $t\to t_0$. Ceci montre que $S(\varepsilon t)\rho_0\in\mathcal{C}_w([0,\infty);\dot{B}^{-2+\frac{2}{p}}_{p,\infty}(\mathbb{R}^2))$. Toujours par la proposition 2.1,

$$\sup_{t\geq 0}t^{1-\frac{1}{p}}\|S(\varepsilon t)\rho_0\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}\approx\|\rho_0\|_{\dot{B}^{-2+\frac{2}{p}}_{p,\infty}(\mathbb{R}^2)}<\infty$$

donc $t^{1-\frac{1}{p}}S(\varepsilon t)\rho_0\in L^\infty([0,\infty);L^p(\mathbb{R}^2))$ puis $S(\varepsilon t)\rho_0\in Y$.
Les estimations (2.21) et (2.22) et l'injection $L^1(\mathbb{R}^2)\hookrightarrow\dot{B}^{-2+\frac{2}{p}}_{p,\infty}(\mathbb{R}^2)$ impliquent que

$$\sup_{t\geq 0}\|\mathcal{A}[\rho,u_0]\|_{\dot{B}^{-2+\frac{2}{p}}_{p,\infty}(\mathbb{R}^2)}<\infty \text{ et } \sup_{t\geq 0}\|\mathcal{B}[\rho,\rho]\|_{\dot{B}^{-2+\frac{2}{p}}_{p,\infty}(\mathbb{R}^2)}<\infty.$$

De plus, $\mathcal{A}[\rho,u_0](t)\underset{t\to t_0}{\longrightarrow}\mathcal{A}[\rho,u_0](t_0)$ et $\mathcal{B}[\rho,\rho](t)\underset{t\to t_0}{\longrightarrow}\mathcal{B}[\rho,\rho](t_0)$ au sens des distributions, donc $\mathcal{A}[\rho,u_0],\mathcal{B}[\rho,\rho]\in\mathcal{C}_w([0,\infty);\dot{B}^{-2+\frac{2}{p}}_{p,\infty}(\mathbb{R}^2))$.
Les inégalités (2.19) et (2.20) montrent que $\mathcal{A}[\rho,u_0],\mathcal{B}[\rho,\rho]\in t^{1-\frac{1}{p}}L^\infty([0,\infty);L^p(\mathbb{R}^2))$ et finalement $\mathcal{T}\rho\in Y$.

Grâce à l'égalité

$$\sup_{t\geq 0}\|\cdot\|_{\dot B^{-\alpha}_{p,\infty}(\mathbb{R}^2)} = \sup_{t\geq 0} t^{\frac{\alpha}{2}}\|S(t)\cdot\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}, \tag{2.23}$$

on a

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{T}\rho\|_Y &= \sup_{t\geq 0}\|\mathcal{T}\rho\|_{\dot B^{-2+\frac{2}{p}}_{p,\infty}(\mathbb{R}^2)} + \sup_{t\geq 0} t^{1-\frac{1}{p}}\|S(t)\mathcal{T}\rho\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}\\
&\leq 2\sup_{t\geq 0}\|\mathcal{T}\rho\|_{\dot B^{-2+\frac{2}{p}}_{p,\infty}(\mathbb{R}^2)}\\
&\leq 2\sup_{t\geq 0}\|S(\varepsilon t)\rho_0\|_{\dot B^{-2+\frac{2}{p}}_{p,\infty}(\mathbb{R}^2)} + 2\sup_{t\geq 0}\|\mathcal{A}[\rho,u_0]\|_{\dot B^{-2+\frac{2}{p}}_{p,\infty}(\mathbb{R}^2)} + 2\sup_{t\geq 0}\|\mathcal{B}[\rho,\rho]\|_{\dot B^{-2+\frac{2}{p}}_{p,\infty}(\mathbb{R}^2)}
\end{aligned}$$

et toujours en appliquant (2.23),

$$\begin{aligned}
\|S(\varepsilon t)\rho_0\|_{\dot B^{-2+\frac{2}{p}}_{p,\infty}(\mathbb{R}^2)} &\leq \sup_{t\geq 0} t^{1-\frac{1}{p}}\|S(t)(S(\varepsilon t)\rho_0)\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}\\
&\leq \sup_{t\geq 0} t^{1-\frac{1}{p}}\|S(\varepsilon t)\rho_0\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}\\
&= \varepsilon^{\frac{1}{p}-1}\|\rho_0\|_{\dot B^{-2+\frac{2}{p}}_{p,\infty}(\mathbb{R}^2)}.
\end{aligned}$$

donc, avec les lemmes 2.2 et 2.3

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{T}\rho\|_Y &\leq 2\varepsilon^{\frac{1}{p}-1}\|\rho_0\|_{\dot B^{-2+\frac{2}{p}}_{p,\infty}(\mathbb{R}^2)} + C_1\varepsilon^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\|\rho\|_{Y_\delta}\|u_0\|_{\dot B^{-1+\frac{2}{q}}_{q,\infty}(\mathbb{R}^2)} + C_2\varepsilon^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}\|\rho\|^2_{Y_\delta}\\
&\leq 2\varepsilon^{\frac{1}{p}-1}\delta + 2C_1\varepsilon^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}C\eta\delta + 4C_2\varepsilon^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}C^2\delta^2\\
&= 2\varepsilon^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}\delta(1+C_1C\eta+2C_2C\delta).
\end{aligned}$$

Il est alors possible de choisir C de sorte que $\|\mathcal{T}\rho\|_Y \leq 2C\delta$ pour η, δ assez petits, et on a donc $\mathcal{T}\rho \in Y_\delta$.

Ensuite, on remarque que

$$d(\mathcal{T}\rho_1,\mathcal{T}\rho_2) \leq \sup_{t\geq 0} t^{1-\frac{1}{p}}\|\mathcal{A}[\rho_1-\rho_2,u_0]\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} + \sup_{t\geq 0} t^{1-\frac{1}{p}}\|\mathcal{B}[\rho_1-\rho_2,\rho_1-\rho_2]\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}$$

puis on estime chacun des deux termes de cette somme comme dans les lemmes 2.2 et 2.3.

$$\begin{aligned}
\sup_{t\geq 0} t^{1-\frac{1}{p}}\|\mathcal{A}[\rho_1-\rho_2,u_0]\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} &\lesssim \sup_{t\geq 0} t^{1-\frac{1}{p}}\int_0^t \left\|S(\varepsilon(t-\tau))\mathrm{div}\,\Big((\rho_1-\rho_2)S(\tau)u_0(x)\Big)\right\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} d\tau\\
&\lesssim \varepsilon^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}\sup_{t\geq 0} t^{1-\frac{1}{p}}\int_0^t |t-\tau|^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}\|(\rho_1-\rho_2)S(\tau)u_0\|_{L^{\frac{pq}{p+q}}(\mathbb{R}^2)} d\tau\\
&\lesssim \varepsilon^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}\sup_{t\geq 0} t^{1-\frac{1}{p}}\int_0^t |t-\tau|^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}\|\rho_1-\rho_2\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}\|S(\tau)u_0\|_{L^q(\mathbb{R}^2)} d\tau\\
&\lesssim \varepsilon^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}\|u_0\|_{\dot B^{-1+\frac{2}{q}}_{q,\infty}(\mathbb{R}^2)} d(\rho_1,\rho_2)\sup_{t\geq 0} t^{1-\frac{1}{p}}\int_0^t |t-\tau|^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}\tau^{-\frac{3}{2}+\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} d\tau\\
&\lesssim \varepsilon^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}\eta d(\rho_1,\rho_2)
\end{aligned}$$

et de la même façon

$$\sup_{t\geq 0} t^{1-\frac{1}{p}} \|\mathcal{B}[\rho_1-\rho_2,\rho_1-\rho_2]\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \lesssim \sup_{t\geq 0} t^{1-\frac{1}{p}} \int_0^t \left\| S(\varepsilon(t-\tau))\mathrm{div}\,(\rho_1\mathcal{C}[\rho_1]-\rho_2\mathcal{C}[\rho_2])\right\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} d\tau$$
$$\lesssim \varepsilon^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} \sup_{t\geq 0} t^{1-\frac{1}{p}} \int_0^t |t-\tau|^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} \|\rho_1\mathcal{C}[\rho_1]-\rho_2\mathcal{C}[\rho_2]\|_{L^{\frac{p}{2}}(\mathbb{R}^2)} d\tau$$
$$\lesssim \varepsilon^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} \sup_{t\geq 0} t^{1-\frac{1}{p}} \int_0^t |t-\tau|^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} (\|\rho_1-\rho_2\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}\|\mathcal{C}[\rho_1]\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} + \|\rho_2\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}\|\mathcal{C}[\rho_1-\rho_2]\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}) d\tau$$
$$\lesssim \varepsilon^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} \sup_{t\geq 0} t^{1-\frac{1}{p}} \int_0^t |t-\tau|^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} \tau^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{p}} (\|\rho_1-\rho_2\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}\|\rho_1\|_Y + \|\rho_2\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}\|\rho_1-\rho_2\|_{Y_\delta}) d\tau$$
$$\lesssim \varepsilon^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} (\|\rho_1\|_Y+\|\rho_2\|_Y) d(\rho_1,\rho_2) \sup_{t\geq 0} \int_0^t |t-\tau|^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} \tau^{-\frac{3}{2}+\frac{2}{p}} d\tau$$
$$\lesssim \varepsilon^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} \delta d(\rho_1,\rho_2).$$

$\mathcal{T}$ est donc un opérateur de Y_δ vérifiant

$$d(\mathcal{T}\rho_1,\mathcal{T}\rho_2) \lesssim (\varepsilon^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}\eta + \varepsilon^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}\delta) d(\rho_1,\rho_2), \qquad \forall \rho_1,\rho_2 \in Y_\delta$$

pour des constantes η et δ arbitrairement petites, c'est donc une contraction de Y_δ, ce qui prouve l'existence et l'unicité de $\rho \in Y_\delta$ tel que $\mathcal{T}\rho = \rho$.
Notons enfin que (2.21) et (2.22) prouvent (2.17) parce que

$$\rho(t) - S(\varepsilon t)u_0 = \mathcal{T}\rho - S(\varepsilon t)u_0 = -\mathcal{A}[\rho,u_0] + \mathcal{B}[\rho,\rho] \qquad \square$$

Maintenant que l'existence de $\rho(x,t)$ est établie, on trouve $u(x,t)$ par la formule

$$u(x,t) = S(t)u_0(x) - \mathcal{C}[\rho](x,t).$$

On a donc l'estimation

$$\|u\|_{\dot{B}^{-1+\frac{2}{q}}_{q,\infty}(\mathbb{R}^2)} \leq \|S(t)u_0\|_{\dot{B}^{-1+\frac{2}{q}}_{q,\infty}(\mathbb{R}^2)} + \|\mathcal{C}[\rho]\|_{\dot{B}^{-1+\frac{2}{q}}_{q,\infty}(\mathbb{R}^2)}.$$

Avec (2.23), on voit que

$$\|S(t)u_0\|_{\dot{B}^{-1+\frac{2}{q}}_{q,\infty}(\mathbb{R}^2)} = \|u_0\|_{\dot{B}^{-1+\frac{2}{q}}_{q,\infty}(\mathbb{R}^2)}.$$

De plus, les inégalités suivantes ont lieu

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{C}[\rho]\|_{\dot{B}^{-1+\frac{2}{q}}_{q,\infty}(\mathbb{R}^2)} &\lesssim \|\mathcal{C}[\rho]\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \\
&\lesssim \sup_{t\geq 0} \int_0^t |t-\tau|^{-\frac{1}{p}} \|\rho\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} d\tau \\
&\lesssim \|\rho\|_Y \sup_{t\geq 0} \int_0^t |t-\tau|^{-\frac{1}{p}} \tau^{-1+\frac{1}{p}} d\tau \\
&\lesssim \|\rho\|_Y.
\end{aligned}$$

Ainsi, du théorème 2.2 on déduit le

Théorème 2.3 *A ε fixé et pour tout $2 < p, q < 4$ et toute donnée initiale $\rho_0 \in \dot{B}_{p,\infty}^{-2+\frac{2}{p}}(\mathbb{R}^2)$, $u_0 \in \dot{B}_{q,\infty}^{-1+\frac{2}{q}}(\mathbb{R}^2)$ vérifiant*

$$\|\rho_0\|_{\dot{B}_{p,\infty}^{-2+\frac{2}{p}}(\mathbb{R}^2)} \leq \delta \text{ et } \|u_0\|_{\dot{B}_{q,\infty}^{-1+\frac{2}{q}}(\mathbb{R}^2)} \leq \eta$$

avec δ et η suffisamment petits, il existe une unique solution $(\rho(x,t), u(x,t))$ de (2.7) qui satisfait

$$(\rho(t), u(t)) \in \mathcal{C}_w([0,\infty); \dot{B}_{p,\infty}^{-2+\frac{2}{p}}(\mathbb{R}^2)) \times \mathcal{C}_w([0,\infty); \dot{B}_{q,\infty}^{-1+\frac{1}{q}}(\mathbb{R}^2))$$

$$\rho(t) \in L^\infty([0,\infty); L^1(\mathbb{R}^2))$$

$$\sup_{t\geq 0} \|\rho\|_{\dot{B}_{p,\infty}^{-2+\frac{2}{p}}(\mathbb{R}^2)} + \sup_{t\geq 0} t^{1-\frac{1}{p}} \|\rho\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} + \sup_{t\geq 0} \|u\|_{\dot{B}_{q,\infty}^{-1+\frac{1}{q}}(\mathbb{R}^2)} \leq C$$

où C est une constante qui ne dépend que de ρ_0, u_0, p, q et ε.

2.4 Le passage à la limite

Dans cette section, nous désirons passer à la limite lorsque $\varepsilon \to 0$ dans le système

$$\begin{cases} \partial_t \rho^\varepsilon - \varepsilon \triangle \rho^\varepsilon = -\text{div } (\rho^\varepsilon u^\varepsilon) \\ \partial_t u^\varepsilon - \triangle u^\varepsilon = -\nabla \rho^\varepsilon \\ \rho^\varepsilon(x,0) = \rho_0(x), \quad u^\varepsilon(x,0) = u_0(x) \end{cases}. \tag{2.24}$$

Puisque nous ne pouvons pas obtenir d'estimation d'énergie dans un espace homogène, nous devons, pour passer à la limite, considérer des sous-espaces des espaces de Besov utilisés précédemment. Plus précisément, nous allons travailler dans des espaces de Sobolev et d'Orlicz ; en effet, nous avons les injections

$$L^2(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow \dot{B}_{q,\infty}^{-1+\frac{2}{q}}(\mathbb{R}^2) \text{ et } L_M(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow H^{-1}(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow \dot{B}_{p,\infty}^{2+\frac{2}{p}}(\mathbb{R}^2) \tag{2.25}$$

avec $p > 1$, $q > 2$ et M est la fonction $M(s) = (1+s)\log(1+s) - s$.

On commence par démontrer une inégalité d'énergie.

Lemme 2.4 *Si $(\rho^\varepsilon, u^\varepsilon)$ est une solution régulière de (2.24) et si l'on pose*

$$E(t) = \int_{\mathbb{R}^2} \Big(\frac{1}{2}(u^\varepsilon)^2 + (\rho^\varepsilon + 1)\log(1+\rho^\varepsilon)\Big)(x,t)dx,$$

alors on a

$$E(t) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} \Big(\frac{1}{2}|\nabla u^\varepsilon|^2 + \varepsilon \frac{|\nabla \rho^\varepsilon|^2}{1+\rho^\varepsilon}\Big) dx d\tau \leq E(0) \exp\Big(\frac{T}{2}\Big) \tag{2.26}$$

pour tout $t \in [0,T]$, $0 < T < \infty$.

DEMONSTRATION : Un calcul direct utilisant (2.24) donne

$$\begin{aligned}
\frac{dE}{dt} &= \int_{\mathbb{R}^2} \Big(u^\varepsilon \partial_t u^\varepsilon + \partial_t \rho^\varepsilon \log(1+\rho^\varepsilon) + \partial_t \rho^\varepsilon \Big) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \big(u^\varepsilon \triangle u^\varepsilon - u^\varepsilon \nabla \rho^\varepsilon + \varepsilon \triangle \rho^\varepsilon \log(1+\rho^\varepsilon) - \operatorname{div}\, (\rho^\varepsilon u^\varepsilon) \log(1+\rho^\varepsilon) + \partial_t \rho^\varepsilon \Big) dx.
\end{aligned}$$

Puis on intègre par parties et on se souvient de (1.6) :

$$\begin{aligned}
\frac{dE}{dt} &= \int_{\mathbb{R}^2} \big(- |\nabla u^\varepsilon|^2 - u \nabla \rho^\varepsilon - \varepsilon \frac{|\nabla \rho^\varepsilon|^2}{1+\rho^\varepsilon} + \rho^\varepsilon u^\varepsilon \frac{\nabla \rho^\varepsilon}{1+\rho^\varepsilon} \big) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \big(- |\nabla u^\varepsilon|^2 - \varepsilon \frac{|\nabla \rho^\varepsilon|^2}{1+\rho^\varepsilon} - \frac{u^\varepsilon \nabla \rho^\varepsilon}{1+\rho^\varepsilon} \big) dx.
\end{aligned}$$

On a donc

$$\frac{dE}{dt} + \int_{\mathbb{R}^2} \Big(|\nabla u^\varepsilon|^2 + \varepsilon \frac{|\nabla \rho^\varepsilon|^2}{1+\rho^\varepsilon} \Big) dx \leq \int_{\mathbb{R}^2} |\operatorname{div}\, u^\varepsilon| \log(1+\rho^\varepsilon) dx. \tag{2.27}$$

D'autre part, en utilisant l'inégalité de Hölder, il vient

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} |\operatorname{div}\, u^\varepsilon| \log(1+\rho^\varepsilon) dx &\leq \Big(\int_{\mathbb{R}^2} |\operatorname{div}\, u^\varepsilon|^2 dx \Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\int_{R^2} (\log(1+\rho^\varepsilon))^2 dx \Big)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u^\varepsilon|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} (\log(1+\rho^\varepsilon))^2 dx \\
&\leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u^\varepsilon|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} (1+\rho^\varepsilon) \log(1+\rho^\varepsilon) dx,
\end{aligned}$$

la dernière inégalité étant dû au fait que $\log(x) \leq x, \forall x > 0$. On en déduit

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\operatorname{div}\, u^\varepsilon| \log(1+\rho^\varepsilon) dx \leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u^\varepsilon|^2 dx + \frac{1}{2} E(t)$$

ce qui donne combinée avec (2.27)

$$\frac{dE}{dt} + \int_{\mathbb{R}^2} \Big(\frac{1}{2} |\nabla u^\varepsilon|^2 + \varepsilon \frac{|\nabla \rho^\varepsilon|^2}{1+\rho^\varepsilon} \Big) dx \leq \frac{1}{2} E(t).$$

On conclut avec le lemme de Gronwall. $\square$

Ce résultat est vrai si $E(0) < \infty$, condition qui a lieu lorsque

$$u_0 \in L^2(\mathbb{R}^2), \qquad \rho_0 \in L_M(\mathbb{R}^2) \cap L^1(\mathbb{R}^2),$$

ce que nous supposerons dorénavant. L'inégalité (2.26) et les injections (2.25) entraînent alors

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|u^\varepsilon\|_{\dot{B}^{-1+\frac{2}{q}}_{q,\infty}(\mathbb{R}^2)} \lesssim \sup_{0 \leq t \leq T} \|u^\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq C_1,$$

$$\sup_{0\le t\le T}\|\rho^\varepsilon\|_{\dot B_{p,\infty}^{-2+\frac{2}{p}}(\mathbb{R}^2)} \lesssim \sup_{0\le t\le T}\|\rho^\varepsilon\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^2)} \lesssim \sup_{0\le t\le T}\|\rho^\varepsilon\|_{L_M(\mathbb{R}^2)} \le C_2,$$
$$\|\nabla u^\varepsilon\|_{L^2([0,T];L^2(\mathbb{R}^2))} \le C_3$$

où C_1, C_2 et C_3 ne dépendent pas de ε. Autrement dit, les familles $(\rho^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ et $(u^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ sont bornées respectivement dans $L^\infty([0,T];L_M(\mathbb{R}^2))$ et dans $L^2([0,T];H^1(\mathbb{R}^2))$; donc d'après le théorème de Banach-Alaoglu, on peut en extraire une sous-famille encore notée $(\rho^\varepsilon, u^\varepsilon)$ telle que

$$\begin{cases} \rho^\varepsilon \rightharpoonup \rho \text{ faiblement-}* \text{ dans } L^\infty([0,T];L_M(\mathbb{R}^2)), \\ u^\varepsilon \rightharpoonup u \text{ faiblement-}* \text{ dans } L^2([0,T];H^1(\mathbb{R}^2)). \end{cases} \tag{2.28}$$

Pour prouver que la fonction (ρ, u) ainsi obtenue est bien solution de (2.1)-(2.3), nous avons besoin du résultat de compacité suivant, dont la démonstration peut être trouvée dans [4] :

Lemme 2.5 *Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^2$ et soit $p, q > 1$ deux nombres conjugués. Supposons que $\{g^\varepsilon(x,t)\}_{\varepsilon>0}$ et $\{v^\varepsilon(x,t)\}_{\varepsilon>0}$ sont deux familles uniformément bornées de $L^p([0,T];L_M(\Omega))$ et $L^q([0,T];H^1(\Omega))$ respectivement et telles que, lorsque $\varepsilon\to 0$, g_ε et v_ε converge faiblement vers g et v dans $L^p([0,T];L_M(\Omega))$ et $L^q([0,T];H^1(\Omega))$. Alors, si $\{\partial_t g_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ est uniformément bornée dans $L^\lambda([0,T];W^{-m,1}(\Omega))$ pour un certain $\lambda>1$ et un $m>0$, $g_\varepsilon v_\varepsilon$ converge faiblement vers gv au sens des distributions (i.e. dans $\mathcal{D}'(\Omega\times(0,T))$) lorsque $\varepsilon\to 0$.*

Pour tout $K\subset\mathbb{R}^2$, l'estimation (2.26) implique que $(u^\varepsilon)_\varepsilon$ est bornée dans $L^2([0,T];H^1(K))$ uniformément en ε. D'autre part, d'après $(2.24)_1$ et (2.26), $(\partial_t\rho^\varepsilon)_\varepsilon$ est uniformément borné dans $L^\infty([0,T];W^{-1,1}(K))$, donc le lemme précédent entraîne que

$$\rho^\varepsilon u^\varepsilon \rightharpoonup \rho u \text{ dans } \mathcal{D}'(K\times[0,T]).$$

Il est maintenant facile de passer à la limite dans (2.24) puisque les différents opérateurs de dérivation ∂_t, div , $\triangle$ et ∇ sont continus sur $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2\times[0,T])$. On obtient le théorème suivant :

Théorème 2.4 *Pour tout $\rho_0\in\dot B_{p,\infty}^{-2+\frac{2}{p}}(\mathbb{R}^2)$ et $u_0\in\dot B_{q,\infty}^{-1+\frac{2}{q}}(\mathbb{R}^2)$, si*

$$\|\rho_0\|_{\dot B_{p,\infty}^{-2+\frac{2}{p}}(\mathbb{R}^2)}\le\delta,\quad \|\rho_0\|_{L_M(\mathbb{R}^2)}\le C_1,\quad \|\rho_0\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}\le C_2,$$

$$\|u_0\|_{\dot B_{q,\infty}^{-1+\frac{2}{q}}(\mathbb{R}^2)}\le\eta,\quad \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\le C_3$$

avec $2<p,q<4$ et où δ et η sont suffisamment petits, et C_1, C_2, C_3 sont des constantes absolues, alors il existe une solution (ρ,u) de (2.1)-(2.3) avec $\gamma=1$ et telle que

$$(\rho,u)\in\mathcal{C}_w([0,T];\dot B_{p,\infty}^{-2+\frac{2}{p}}(\mathbb{R}^2))\times\mathcal{C}_w([0,T];\dot B_{q,\infty}^{-1+\frac{2}{q}}(\mathbb{R}^2)),\quad \forall 0<T<\infty.$$

2.5 Le cas général

Par des arguments similaires, nous allons étudier l'existence de solutions auto-similaires du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t\rho + \text{div }(\rho u) = 0 \\ \partial_t u - \triangle u + \nabla\rho^\gamma = 0 \\ \rho(\cdot,0) = \rho_0(\cdot), \quad u(\cdot,0) = u_0(\cdot) \end{cases} \tag{2.29}$$

avec $\gamma > 1$.

Remarquons tout d'abord que le système (2.29) est invariant par le changement d'échelle

$$(\rho(x,t), u(x,t)) = (\lambda^{\frac{2}{\gamma}}\rho(\lambda x, \lambda^2 t), \lambda u(\lambda x, \lambda^2 t))$$

donc la fonction initiale (ρ_0, u_0) est homogène de degré $\big(-\dfrac{2}{\gamma}, -1\big)$. Il paraît alors naturel d'étudier (2.29) dans l'espace de Besov $(\dot{B}_{p,\infty}^{-\frac{2}{\gamma}+\frac{2}{p}}(\mathbb{R}^2), \dot{B}_{q,\infty}^{-1+\frac{2}{q}}(\mathbb{R}^2))$, $p > \gamma$, $q > 2$ car il contient de telles fonctions.

Comme dans la section 2.3, nous allons considérer dans un premier temps le système approché

$$\begin{cases} \partial_t\rho - \varepsilon\triangle\rho = -\text{div }(\rho u) \\ \partial_t u - \triangle u = -\nabla\rho^\gamma \\ \rho(\cdot,0) = \rho_0(\cdot), \quad u(\cdot,0) = u_0(\cdot) \end{cases} \tag{2.30}$$

puis nous passerons à la limite pour $\varepsilon \to 0$. Visiblement, ce système possède les mêmes propriétés d'invariance par changement d'échelle que (2.29) et on peut donc espérer qu'il s'agit d'une bonne approximation dans les espaces de Besov.

L'étude de (2.30) se fait comme dans la section 2.3. On introduit l'espace de Banach

$$\tilde{Y} = \mathcal{C}_w([0,\infty); \dot{B}_{p,\infty}^{-\frac{2}{\gamma}+\frac{2}{p}}(\mathbb{R}^2)) \cap t^{\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{p}} L^\infty([0,\infty); L^p(\mathbb{R}^2))$$

muni de la norme

$$\|\cdot\|_{\tilde{Y}} = \sup_{t\geq 0} \|\cdot\|_{\dot{B}_{p,\infty}^{-\frac{2}{\gamma}+\frac{2}{p}}(\mathbb{R}^2)} + \sup_{t\geq 0} t^{\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{p}} \|\cdot\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}$$

puis on écrit les équations $(2.30)_1$ - $(2.30)_2$ sous forme intégrale

$$\rho(x,t) = S(\varepsilon t)\rho_0(x) - \tilde{\mathcal{A}}[\rho, u_0](x,t) + \tilde{\mathcal{B}}[\rho,\rho](x,t)$$

$$u(x,t) = S(t)u_0(x) - \tilde{\mathcal{C}}[\rho](x,t)$$

avec

$$\tilde{\mathcal{A}}[\rho, u_0](x,t) = \int_0^t S(\varepsilon(t-\tau))\text{div }(\rho(x,\tau)S(\tau)u_0(x))d\tau,$$

$$\tilde{\mathcal{B}}[\rho,\rho](x,t) = \int_0^t S(\varepsilon(t-\tau))\text{div }(\rho(x,\tau)\tilde{\mathcal{C}}[\rho](x,\tau))d\tau$$

et

$$\tilde{\mathcal{C}}[\rho](x,t) = \int_0^t S(t-\tau)\nabla\rho^\gamma d\tau.$$

On démontre alors les estimations suivantes :

Lemme 2.6 *Pour $p > 2\gamma$, $\gamma \geq 2$, $q > 2$ et $(\rho_0, u_0) \in \dot{B}_{p,\infty}^{-\frac{2}{\gamma}+\frac{2}{p}}(\mathbb{R}^2) \times \dot{B}_{q,\infty}^{-1+\frac{2}{q}}(\mathbb{R}^2)$, on a*

$$\|\tilde{\mathcal{A}}[\rho, u_0]\|_{\tilde{Y}} \lesssim \varepsilon^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}\|\rho\|_{\tilde{Y}}\|u_0\|_{\dot{B}_{q,\infty}^{-1+\frac{2}{q}}(\mathbb{R}^2)},$$

$$\|\tilde{\mathcal{B}}[\rho,\rho]\|_{\tilde{Y}} \lesssim \varepsilon^{-\frac{1}{2}-\frac{\gamma}{p}}\|\rho\|_{\tilde{Y}}^{\gamma+1}.$$

DEMONSTRATION : On utilise encore le lemme 2.1 et l'injection $L^\gamma(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow \dot{B}_{p,\infty}^{-\frac{2}{\gamma}+\frac{2}{p}}(\mathbb{R}^2)$ pour déduire que

$$\begin{aligned}
\|\tilde{\mathcal{A}}[\rho, u_0]\|_{\dot{B}_{p,\infty}^{-\frac{2}{\gamma}+\frac{2}{p}}(\mathbb{R}^2)} &\lesssim \|\tilde{\mathcal{A}}[\rho, u_0]\|_{L^\gamma(\mathbb{R}^2)} \\
&\lesssim \varepsilon^{\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{2}-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \sup_{t\geq 0}\int_0^t |t-\tau|^{\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{2}-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\|\rho S(\tau)u_0(x)\|_{L^{\frac{pq}{p+q}}(\mathbb{R}^2)}d\tau \\
&\lesssim \varepsilon^{\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{2}-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \sup_{t\geq 0}\int_0^t |t-\tau|^{\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{2}-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\|\rho\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}\|S(\tau)u_0(x)\|_{L^q(\mathbb{R}^2)}d\tau \\
&\lesssim \varepsilon^{\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{2}-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \sup_{t\geq 0}\int_0^t \left[\tau^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}|t-\tau|^{\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{2}-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\right]\left[\tau^{\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{p}}\|\rho\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}\right] \\
&\qquad \left[\tau^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}\|S(\tau)u_0(x)\|_{L^q(\mathbb{R}^2)}\right]d\tau \\
&\lesssim \varepsilon^{\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{2}-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\|\rho\|_{\tilde{Y}}\|u_0\|_{\dot{B}_{q,\infty}^{-1+\frac{2}{q}}(\mathbb{R}^2)} \sup_{t\geq 0}\int_0^t \tau^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}|t-\tau|^{\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{2}-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}d\tau.
\end{aligned}$$

Le choix de p, q et γ étant tel que

$$\sup_{t\geq 0}\int_0^t \tau^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}|t-\tau|^{\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{2}-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}d\tau < \infty,$$

on a donc

$$\sup_{t\geq 0}\|\tilde{\mathcal{A}}[\rho, u_0]\|_{\dot{B}_{p,\infty}^{-\frac{2}{\gamma}+\frac{2}{p}}(\mathbb{R}^2)} \lesssim \varepsilon^{\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{2}-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\|\rho\|_{\tilde{Y}}\|u_0\|_{\dot{B}_{q,\infty}^{-1+\frac{2}{q}}(\mathbb{R}^2)}.$$

Ensuite, nous avons

$$\begin{aligned}
\sup_{t\geq 0} t^{\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{p}}\|\tilde{\mathcal{A}}[\rho, u_0]\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} &\lesssim \varepsilon^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}\sup_{t\geq 0} t^{\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{p}}\int_0^t |t-\tau|^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}\|\rho S(\tau)u_0(x)\|_{L^{\frac{pq}{p+q}}(\mathbb{R}^2)}d\tau \\
&\lesssim \varepsilon^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}\|\rho\|_{\tilde{Y}}\|u_0\|_{\dot{B}_{q,\infty}^{-1+\frac{2}{q}}(\mathbb{R}^2)} \sup_{t\geq 0}\int_0^t t^{\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{p}}|t-\tau|^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}\tau^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}d\tau \\
&= \varepsilon^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}\|\rho\|_{\tilde{Y}}\|u_0\|_{\dot{B}_{q,\infty}^{-1+\frac{2}{q}}(\mathbb{R}^2)} \int_0^1 |1-\sigma|^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}\sigma^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}d\sigma \\
&\lesssim \varepsilon^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}\|\rho\|_{\tilde{Y}}\|u_0\|_{\dot{B}_{q,\infty}^{-1+\frac{2}{q}}(\mathbb{R}^2)}.
\end{aligned}$$

Puisque $\varepsilon^{\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{2}-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \leq \varepsilon^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}$ $(0<\epsilon<1)$, il vient

$$\|\tilde{\mathcal{A}}[\rho,u_0]\|_{\tilde{Y}} \lesssim \varepsilon^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}\|\rho\|_{\tilde{Y}}\|u_0\|_{\dot{B}_{q,\infty}^{-1+\frac{2}{q}}(\mathbb{R}^2)}.$$

On estime de la même façon la norme de $\tilde{\mathcal{B}}[\rho,\rho]$ dans $\tilde{Y}$:

$$\begin{aligned}
&\|\tilde{\mathcal{B}}[\rho,\rho]\|_{\dot{B}_{p,\infty}^{-\frac{2}{\gamma}+\frac{2}{p}}(\mathbb{R}^2)} \lesssim \|\tilde{\mathcal{B}}[\rho,\rho]\|_{L^\gamma(\mathbb{R}^2)}\\
\lesssim\ & \varepsilon^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{\gamma}-\frac{\gamma+1}{p}} \sup_{t\geq 0}\int_0^t |t-\tau|^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{\gamma}-\frac{\gamma+1}{p}}\|\rho\tilde{\mathcal{C}}[\rho]\|_{L^{\frac{p}{\gamma+1}}(\mathbb{R}^2)}d\tau\\
\lesssim\ & \varepsilon^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{\gamma}-\frac{\gamma+1}{p}} \sup_{t\geq 0}\int_0^t |t-\tau|^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{\gamma}-\frac{\gamma+1}{p}}\|\rho\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}\|\tilde{\mathcal{C}}[\rho]\|_{L^{\frac{p}{\gamma}}(\mathbb{R}^2)}d\tau\\
\lesssim\ & \varepsilon^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{\gamma}-\frac{\gamma+1}{p}}\|\rho\|_{\tilde{Y}} \sup_{t\geq 0}\int_0^t |t-\tau|^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{\gamma}-\frac{\gamma+1}{p}}\tau^{-\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{p}}\Big(\int_0^\tau|\tau-\sigma|^{-\frac{1}{2}}\|\rho^\gamma\|_{L^{\frac{p}{\gamma}}(\mathbb{R}^2)}d\sigma\Big)d\tau\\
\lesssim\ & \varepsilon^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{\gamma}-\frac{\gamma+1}{p}}\|\rho\|_{\tilde{Y}}^{\gamma+1} \sup_{t\geq 0}\int_0^t |t-\tau|^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{\gamma}-\frac{\gamma+1}{p}}\tau^{-\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{p}}\Big(\int_0^\tau|\tau-\sigma|^{-\frac{1}{2}}\sigma^{-1+\frac{\gamma}{p}}d\sigma\Big)d\tau\\
=\ & \varepsilon^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{\gamma}-\frac{\gamma+1}{p}}\|\rho\|_{\tilde{Y}}^{\gamma+1} \sup_{t\geq 0}\int_0^t |t-\tau|^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{\gamma}-\frac{\gamma+1}{p}}\tau^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{\gamma}+\frac{\gamma+1}{p}}\Big(\int_0^1|1-\sigma|^{-\frac{1}{2}}\sigma^{-1+\frac{\gamma}{p}}d\sigma\Big)d\tau\\
\lesssim\ & \varepsilon^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{\gamma}-\frac{\gamma+1}{p}}\|\rho\|_{\tilde{Y}}^{\gamma+1}\int_0^1|1-\sigma|^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{\gamma}-\frac{\gamma+1}{p}}\sigma^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{\gamma}+\frac{\gamma+1}{p}}d\sigma\\
\lesssim\ & \varepsilon^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{\gamma}-\frac{\gamma+1}{p}}\|\rho\|_{\tilde{Y}}^{\gamma+1}.
\end{aligned}$$

De façon similaire,

$$\begin{aligned}
\sup_{t\geq 0} t^{\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{p}}\|\tilde{\mathcal{B}}[\rho,\rho]\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} &\lesssim \varepsilon^{-\frac{1}{2}-\frac{\gamma}{p}}\sup_{t\geq 0} t^{\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{p}}\int_0^t|t-\tau|^{-\frac{1}{2}-\frac{\gamma}{p}}\|\rho\tilde{\mathcal{C}}[\rho]\|_{L^{\frac{p}{\gamma+1}}(\mathbb{R}^2)}d\tau\\
&\lesssim \varepsilon^{-\frac{1}{2}-\frac{\gamma}{p}}\sup_{t\geq 0}\int_0^t t^{\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{p}}|t-\tau|^{-\frac{1}{2}-\frac{\gamma}{p}}\|\rho\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}\|\tilde{\mathcal{C}}[\rho]\|_{L^{\frac{p}{\gamma}}(\mathbb{R}^2)}d\tau\\
&\lesssim \varepsilon^{-\frac{1}{2}-\frac{\gamma}{p}}\|\rho\|_{\tilde{Y}}\sup_{t\geq 0}\int_0^t t^{\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{p}}|t-\tau|^{-\frac{1}{2}-\frac{\gamma}{p}}\tau^{-\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{p}}\|\tilde{\mathcal{C}}[\rho]\|_{L^{\frac{p}{\gamma}}(\mathbb{R}^2)}d\tau\\
&\lesssim \varepsilon^{-\frac{1}{2}-\frac{\gamma}{p}}\|\rho\|_{\tilde{Y}}^{\gamma+1}\sup_{t\geq 0}\int_0^t t^{\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{p}}|t-\tau|^{-\frac{1}{2}-\frac{\gamma}{p}}\tau^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{\gamma}+\frac{\gamma+1}{p}}d\tau\\
&\lesssim \varepsilon^{-\frac{1}{2}-\frac{\gamma}{p}}\|\rho\|_{\tilde{Y}}^{\gamma+1}\int_0^1|1-\sigma|^{-\frac{1}{2}-\frac{\gamma}{p}}\sigma^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{\gamma}+\frac{\gamma+1}{p}}d\sigma\\
&\lesssim \varepsilon^{-\frac{1}{2}-\frac{\gamma}{p}}\|\rho\|_{\tilde{Y}}^{\gamma+1}.
\end{aligned}$$

On remarque finalement que $\varepsilon^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{\gamma}-\frac{\gamma+1}{p}} \leq \varepsilon^{-\frac{1}{2}-\frac{\gamma}{p}}$ pour achever la démonstration du lemme. □

Voici à présent l'analogue du théorème 2.3.

Théorème 2.5 *A ε fixé et pour tout $p > 2\gamma$, $\gamma \geq 2$, $q > 2$ et toute donnée initiale $\rho_0 \in \dot{B}_{p,\infty}^{-\frac{2}{\gamma}+\frac{2}{p}}(\mathbb{R}^2)$, $u_0 \in \dot{B}_{q,\infty}^{-1+\frac{2}{q}}(\mathbb{R}^2)$ vérifiant*

$$\|\rho_0\|_{\dot{B}_{p,\infty}^{-\frac{2}{\gamma}+\frac{2}{p}}(\mathbb{R}^2)} \leq \delta \text{ et } \|u_0\|_{\dot{B}_{q,\infty}^{-1+\frac{2}{q}}(\mathbb{R}^2)} \leq \eta$$

avec δ et η suffisamment petits, il existe une unique solution $(\rho(x,t), u(x,t))$ de (2.30) qui satisfait

$$(\rho(t), u(t)) \in \mathcal{C}_w([0,\infty); \dot{B}_{p,\infty}^{-\frac{2}{\gamma}+\frac{2}{p}}(\mathbb{R}^2)) \times \mathcal{C}_w([0,\infty); \dot{B}_{q,\infty}^{-1+\frac{2}{q}}(\mathbb{R}^2))$$

$$\rho(t) \in L^\infty([0,\infty); L^\gamma(\mathbb{R}^2))$$

$$\sup_{t\geq 0} \|\rho\|_{\dot{B}_{p,\infty}^{-\frac{2}{\gamma}+\frac{2}{p}}(\mathbb{R}^2)} + \sup_{t\geq 0} t^{\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{p}} \|\rho\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} + \sup_{t\geq 0} \|u\|_{\dot{B}_{q,\infty}^{-1+\frac{2}{q}}(\mathbb{R}^2)} \leq C$$

où C est une constante qui ne dépend que de ρ_0, u_0, p, q, γ et ε.

DEMONSTRATION : On définit l'espace

$$\tilde{Y}_\delta = \{\rho(t) \in \tilde{Y}; \|\rho\|_{\tilde{Y}} \leq 2C\delta\}$$

muni de la distance

$$d(\rho_1, \rho_2) = \sup_{t\geq 0} t^{\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{p}} \|\rho_1 - \rho_2\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}$$

et l'opérateur

$$\widetilde{\mathcal{T}}\rho = S(\varepsilon t)\rho_0 - \tilde{\mathcal{A}}[\rho, u_0] + \tilde{\mathcal{B}}[\rho, \rho], \quad \rho \in \tilde{Y}_\delta.$$

D'après la proposition 2.1, on a

$$\sup_{t\geq 0} \|S(\varepsilon t)\rho_0\|_{\dot{B}_{p,\infty}^{-\frac{2}{\gamma}+\frac{2}{p}}(\mathbb{R}^2)} \approx \|\rho_0\|_{\dot{B}_{p,\infty}^{-\frac{2}{\gamma}+\frac{2}{p}}(\mathbb{R}^2)} < \infty$$

et

$$\sup_{t\geq 0} t^{\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{p}} \|S(\varepsilon t)\rho_0\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \approx \varepsilon^{\frac{1}{p}-\frac{1}{\gamma}} \|\rho_0\|_{\dot{B}_{p,\infty}^{-\frac{2}{\gamma}+\frac{2}{p}}(\mathbb{R}^2)} < \infty$$

puis il vient $S(\varepsilon t)\rho_0 \in \tilde{Y}$. Le lemme précédent entraîne que $\tilde{\mathcal{A}}[\rho, u_0]$, $\tilde{\mathcal{B}}[\rho, \rho] \in \tilde{Y}$ donc $\widetilde{\mathcal{T}}\rho \in \tilde{Y}$. D'autre part, on a grâce à (2.23)

$$\begin{aligned}
\|\widetilde{\mathcal{T}}\rho\|_{\tilde{Y}} &= \sup_{t\geq 0} \|\widetilde{\mathcal{T}}\rho\|_{\dot{B}_{p,\infty}^{-\frac{2}{\gamma}+\frac{2}{p}}(\mathbb{R}^2)} + \sup_{t\geq 0} t^{\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{p}} \|\widetilde{\mathcal{T}}\rho\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \\
&\leq 2\sup_{t\geq 0} \|\widetilde{\mathcal{T}}\rho\|_{\dot{B}_{p,\infty}^{-\frac{2}{\gamma}+\frac{2}{p}}(\mathbb{R}^2)} \\
&\leq 2\sup_{t\geq 0} \|S(\varepsilon t)\rho_0\|_{\dot{B}_{p,\infty}^{-\frac{2}{\gamma}+\frac{2}{p}}(\mathbb{R}^2)} + 2\sup_{t\geq 0} \|\tilde{\mathcal{A}}[\rho, u_0]\|_{\dot{B}_{p,\infty}^{-\frac{2}{\gamma}+\frac{2}{p}}(\mathbb{R}^2)} + 2\sup_{t\geq 0} \|\tilde{\mathcal{B}}[\rho, \rho]\|_{\dot{B}_{p,\infty}^{-\frac{2}{\gamma}+\frac{2}{p}}(\mathbb{R}^2)}.
\end{aligned}$$

Or, toujours d'après (2.23),

$$\begin{aligned}\|S(\varepsilon t)\rho_0\|_{\dot{B}^{-\frac{2}{\gamma}+\frac{2}{p}}_{p,\infty}(\mathbb{R}^2)} &\leq \sup_{t\geq 0} t^{\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{p}}\|S(t)(S(\varepsilon t)\rho_0)\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}\\ &\leq \sup_{t\geq 0} t^{\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{p}}\|S(\varepsilon t)\rho_0\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}\\ &= \varepsilon^{\frac{1}{p}-\frac{1}{\gamma}}\|\rho_0\|_{\dot{B}^{-\frac{2}{\gamma}+\frac{2}{p}}_{p,\infty}(\mathbb{R}^2)}\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\|\widetilde{\mathcal{T}}\rho\|_{\tilde{Y}} &\leq 2\varepsilon^{\frac{1}{p}-\frac{1}{\gamma}}\|\rho_0\|_{\dot{B}^{-\frac{2}{\gamma}+\frac{2}{p}}_{p,\infty}(\mathbb{R}^2)} + C_1\varepsilon^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}\|\rho\|_{\tilde{Y}_\delta}\|u_0\|_{\dot{B}^{-1+\frac{2}{q}}_{q,\infty}(\mathbb{R}^2)} + C_2\varepsilon^{-\frac{1}{2}-\frac{\gamma}{p}}\|\rho\|^{\gamma+1}_{\tilde{Y}_\delta}\\ &\leq 2\delta\big(\varepsilon^{\frac{1}{p}-\frac{1}{\gamma}}\delta + C_1\varepsilon^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}C\eta + 2C_2\varepsilon^{-\frac{1}{2}-\frac{\gamma}{p}}C^{\gamma+1}\delta^\gamma\big).\end{aligned}$$

On peut alors choisir C de sorte que pour δ et η suffisamment petits, $\|\widetilde{\mathcal{T}}\rho\|_{\tilde{Y}} \leq 2C\delta$; d'où $\widetilde{\mathcal{T}}\rho \in \tilde{Y}_\delta$.

Afin de montrer que $\widetilde{\mathcal{T}}$ est contractant, on estime

$$\begin{aligned}\sup_{t\geq 0} t^{\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{p}}\|\tilde{\mathcal{A}}[\rho_1-\rho_2,u_0]\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} &\lesssim \varepsilon^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}\sup_{t\geq 0} t^{\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{p}}\int_0^t |t-\tau|^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}\|\rho_1-\rho_2\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}\|S(t)u_0\|_{L^q(\mathbb{R}^2)}d\tau\\ &\lesssim \varepsilon^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}d(\rho_1,\rho_2)\|u_0\|_{\dot{B}^{-1+\frac{2}{q}}_{q,\infty}(\mathbb{R}^2)}\sup_{t\geq 0}\int_0^t t^{\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{p}}|t-\tau|^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}\tau^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}d\tau\\ &\lesssim \varepsilon^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}d(\rho_1,\rho_2)\eta\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}&\sup_{t\geq 0} t^{\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{p}}\|\tilde{\mathcal{B}}[\rho_1,\rho_1]-\tilde{\mathcal{B}}[\rho_2,\rho_2]\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \lesssim \sup_{t\geq 0} t^{\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{p}}\int_0^t \|S(\varepsilon(t-\tau))\mathrm{div}\,(\rho_1\tilde{\mathcal{C}}[\rho_1]-\rho_2\tilde{\mathcal{C}}[\rho_2])\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}d\tau\\ &\lesssim \varepsilon^{-\frac{1}{2}-\frac{\gamma}{p}}\sup_{t\geq 0} t^{\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{p}}\int_0^t |t-\tau|^{-\frac{1}{2}-\frac{\gamma}{p}}\|\rho_1\tilde{\mathcal{C}}[\rho_1]-\rho_2\tilde{\mathcal{C}}[\rho_2]\|_{L^{\frac{p}{\gamma+1}}(\mathbb{R}^2)}d\tau\\ &\lesssim \varepsilon^{-\frac{1}{2}-\frac{\gamma}{p}}\sup_{t\geq 0} t^{\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{p}}\int_0^t |t-\tau|^{-\frac{1}{2}-\frac{\gamma}{p}}\tau^{-\frac{1}{2}+\frac{\gamma}{p}}(\|\rho_1-\rho_2\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}\|\rho_1\|^\gamma_{\tilde{Y}} + \|\rho_2\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}\|\rho_1-\rho_2\|^\gamma_{\tilde{Y}_\delta})d\tau\\ &\lesssim \varepsilon^{-\frac{1}{2}-\frac{\gamma}{p}}d(\rho_1,\rho_2)\sup_{t\geq 0} t^{\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{p}}\int_0^t |t-\tau|^{-\frac{1}{2}-\frac{\gamma}{p}}\tau^{-\frac{1}{2}+\frac{\gamma+1}{p}-\frac{1}{\gamma}}(\|\rho_1\|^\gamma_{\tilde{Y}} + \|\rho_2\|_{\tilde{Y}_\delta}\|\rho_1-\rho_2\|^{\gamma-1}_{\tilde{Y}_\delta})d\tau\\ &\lesssim \varepsilon^{-\frac{1}{2}-\frac{\gamma}{p}}d(\rho_1,\rho_2)\delta^\gamma\sup_{t\geq 0} t^{\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{p}}\int_0^t |t-\tau|^{-\frac{1}{2}-\frac{\gamma}{p}}\tau^{-\frac{1}{2}+\frac{\gamma+1}{p}-\frac{1}{\gamma}}d\tau\\ &\lesssim \varepsilon^{-\frac{1}{2}-\frac{\gamma}{p}}d(\rho_1,\rho_2)\delta^\gamma.\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $\rho_1,\rho_2 \in \tilde{Y}_\delta$, on a

$$\begin{aligned}d(\rho_1,\rho_2) &\lesssim \sup_{t\geq 0} t^{\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{p}}\|\tilde{\mathcal{A}}[\rho_1-\rho_2,u_0]\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} + \sup_{t\geq 0} t^{\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{p}}\|\tilde{\mathcal{B}}[\rho_1,\rho_1]-\tilde{\mathcal{B}}[\rho_2,\rho_2]\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}\\ &\lesssim (\varepsilon^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}\eta + \varepsilon^{-\frac{1}{2}-\frac{\gamma}{p}}\delta^\gamma)d(\rho_1,\rho_2)\end{aligned}$$

ce qui prouve que pour δ et η suffisamment proches de 0, $\widetilde{\mathcal{T}}$ est une contraction et qu'il existe un unique $\rho \in \tilde{Y}_\delta$ vérifiant $\widetilde{\mathcal{T}}\rho = \rho$.

La fonction u est alors donnée de façon unique par la relation

$$u(x,t) = S(t)u_0(x) - \tilde{\mathcal{C}}[\rho](x,t).$$

De plus, u vérifie

$$\begin{aligned}
\|u\|_{\dot{B}^{-1+\frac{2}{q}}_{q,\infty}(\mathbb{R}^2)} &\lesssim \|S(t)u_0\|_{\dot{B}^{-1+\frac{2}{q}}_{q,\infty}(\mathbb{R}^2)} + \|\tilde{\mathcal{C}}[\rho]\|_{\dot{B}^{-1+\frac{2}{q}}_{q,\infty}(\mathbb{R}^2)} \\
&\lesssim \|u_0\|_{\dot{B}^{-1+\frac{2}{q}}_{q,\infty}(\mathbb{R}^2)} + \|\tilde{\mathcal{C}}[\rho]\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \\
&\lesssim \|u_0\|_{\dot{B}^{-1+\frac{2}{q}}_{q,\infty}(\mathbb{R}^2)} + \sup_{t\geq 0}\int_0^t |t-\tau|^{-\frac{\gamma}{p}} \|\rho^\gamma\|_{L^{\frac{p}{\gamma}}(\mathbb{R}^2)} \\
&\lesssim \|u_0\|_{\dot{B}^{-1+\frac{2}{q}}_{q,\infty}(\mathbb{R}^2)} + \|\rho\|^\gamma_{\tilde{Y}} \\
&\lesssim \eta + \delta^\gamma.
\end{aligned}$$

Ceci termine la preuve du théorème. □

Lorsque $1 < \gamma < 2$, le théorème précédent est encore vrai à condition de supposer

$$2\gamma < p < \frac{2\gamma(\gamma+1)}{2-\gamma} \text{ et } q > 2.$$

Nous voulons maintenant passer à la limite dans le système (2.30) pour $\varepsilon \to 0$. Nous aurons besoin pour cela de résultats de compacité de la famille $(\rho^\varepsilon, u^\varepsilon)_\varepsilon$ (que nous noterons encore (ρ, u) pour alléger l'écriture). Voici une première estimation.

Lemme 2.7 *Si (ρ, u) est une solution régulière de (2.30) et si l'on pose*

$$E_1(t) = \int_{\mathbb{R}^2} \Big(\frac{1}{2}u^2 + \frac{\rho^\gamma}{\gamma-1}\Big)dx,$$

alors l'inégalité d'énergie suivante a lieu :

$$E_1(t) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} \Big(|\nabla u|^2 + \frac{4\varepsilon}{\gamma}|\nabla \rho^{\frac{\gamma}{2}}|^2\Big)dxd\tau \leq E_1(0)$$

pour tout $t \in [0,T]$ et $\gamma > 1$.

DEMONSTRATION : Un calcul direct donne

$$\begin{aligned}
\frac{dE_1}{dt} &= \int_{\mathbb{R}^2} \Big(u\partial_t u + \frac{\gamma}{\gamma-1}\rho^{\gamma-1}\partial_t\rho\Big)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \Big(u\partial_t u + \varepsilon\frac{\gamma}{\gamma-1}\rho^{\gamma-1}\triangle\rho - \frac{\gamma}{\gamma-1}\rho^{\gamma-1}\text{div }(\rho u)\Big)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \Big(u\partial_t u - \varepsilon\gamma\rho^{\gamma-2}|\nabla\rho|^2 + \gamma\rho^{\gamma-1}u\nabla\rho\Big)dx \qquad (2.31)
\end{aligned}$$

En multipliant $(2.30)_2$ par u et en intégrant sur $\mathbb{R}^2$, on trouve

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathbb{R}^2} \big(u\partial_t u - u\triangle u + u\nabla\rho^\gamma\big)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \big(u\partial_t u + |\nabla u|^2 + \gamma\rho^{\gamma-1}u\nabla\rho\big)dx \end{aligned} \tag{2.32}$$

Les inégalités (2.31) et (2.32) fournissent

$$\frac{dE_1}{dt} + \int_{\mathbb{R}^2} \big(|\nabla u|^2 + \varepsilon\gamma|\nabla\rho|^2\rho^{\gamma-2}\big)dx = 0.$$

Une intégration sur l'intervalle $[0,t]$ donne alors

$$\begin{aligned} E_1(t) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} \Big(|\nabla u|^2 + \frac{4\varepsilon}{\gamma}|\nabla\rho^{\frac{\gamma}{2}}|^2\Big)dxd\tau &= E_1(0) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} \Big(\frac{4\varepsilon}{\gamma}|\nabla\rho^{\frac{\gamma}{2}}|^2 - \varepsilon\gamma|\nabla\rho|^2\rho^{\gamma-2}\Big)dxd\tau \\ &\leq E_1(0). \quad \Box \end{aligned}$$

Ce lemme est vrai si l'on suppose

$$\rho_0 \in L^\gamma(\mathbb{R}^2) \text{ et } u_0 \in L^2(\mathbb{R}^2), \tag{2.33}$$

conditions que nous imposerons dorénavant.

Une autre inégalité d'énergie qui nous sera utile est donnée par le

Lemme 2.8 *Si (ρ,u) est une solution régulière de (2.30) et si l'on pose*

$$E_2(t) = \int_{\mathbb{R}^2} \Big(\frac{1}{2}u^2 + \frac{\rho^\gamma}{\gamma-1} + \frac{2\rho^{\frac{\gamma}{2}}}{\gamma-2}\Big)dx,$$

alors on a

$$E_2(t) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} \Big(\frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \frac{4\varepsilon}{\gamma}|\nabla\rho^{\frac{\gamma}{2}}|^2 + \frac{8\varepsilon}{\gamma}|\nabla\rho^{\frac{\gamma}{4}}|^2\Big)dxd\tau \leq E_2(0)\exp\Big(\frac{\gamma-1}{2}T\Big)$$

pour tout $t \in [0,T]$ et $\gamma > 2$.

DEMONSTRATION : Le lemme précédent et la condition $\gamma > 2$ impliquent que $\rho \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^2 \times (0,T))$ donc l'équation $(2.30)_1$ est vérifiée au sens des solutions renormalisées (voir [3]), c'est-à-dire

$$\partial_t(b(\rho)) + \text{div } (b(\rho)u) + (b'(\rho)\rho - b(\rho))\text{div } u = \varepsilon b'(\rho)\triangle\rho$$

pour toute fonction $b \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ et convexe. Formellement, nous avons multiplié $(2.30)_1$ par $b'(\rho)$.
En particulier,

$$\partial_t\rho^{\frac{\gamma}{2}} + \text{div } (\rho^{\frac{\gamma}{2}}u) = \frac{\varepsilon\gamma}{2}\rho^{\frac{\gamma}{2}-1}\triangle\rho + \big(1 - \frac{\gamma}{2}\big)\rho^{\frac{\gamma}{2}}\text{div } u. \tag{2.34}$$

En intégrant cette dernière égalité sur $\mathbb{R}^2$, il vient

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathbb{R}^2}\frac{2}{\gamma-2}\rho^{\frac{\gamma}{2}}dx+\int_{\mathbb{R}^2}\frac{2}{\gamma-2}\text{div }(\rho^{\frac{\gamma}{2}}u)dx &= \int_{\mathbb{R}^2}\frac{\varepsilon\gamma}{\gamma-2}\rho^{\frac{\gamma}{2}-1}\triangle\rho dx-\int_{\mathbb{R}^2}\rho^{\frac{\gamma}{2}}\text{div } udx\\ &= -\int_{\mathbb{R}^2}\frac{\varepsilon\gamma}{2}\rho^{\frac{\gamma}{2}-2}|\nabla\rho|^2dx-\int_{\mathbb{R}^2}\rho^{\frac{\gamma}{2}}\text{div } udx\\ &= -\int_{\mathbb{R}^2}\frac{8\varepsilon}{\gamma}|\nabla\rho^{\frac{\gamma}{4}}|^2dx-\int_{\mathbb{R}^2}\rho^{\frac{\gamma}{2}}\text{div } udx\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathbb{R}^2}\frac{2}{\gamma-2}\rho^{\frac{\gamma}{2}}dx+\int_{\mathbb{R}^2}\frac{8\varepsilon}{\gamma}|\nabla\rho^{\frac{\gamma}{4}}|^2dx &= -\int_{\mathbb{R}^2}\frac{2}{\gamma-2}\text{div }(\rho^{\frac{\gamma}{2}}u)dx-\int_{\mathbb{R}^2}\rho^{\frac{\gamma}{2}}\text{div } udx\\ &\le \int_{\mathbb{R}^2}\rho^{\frac{\gamma}{2}}|\text{div } u|dx.\end{aligned}$$

Par ailleurs, nous avons vu dans la démonstration précédente que

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathbb{R}^2}\Big(\frac{1}{2}u^2+\frac{\rho^\gamma}{\gamma-1}\Big)dx+\int_{\mathbb{R}^2}\Big(|\nabla u|^2+\frac{4\varepsilon}{\gamma}|\nabla\rho^{\frac{\gamma}{2}}|^2\Big)dx=0$$

donc

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathbb{R}^2}\Big(\frac{1}{2}u^2+\frac{\rho^\gamma}{\gamma-1}+\frac{2}{\gamma-2}\rho^{\frac{\gamma}{2}}\Big)+\int_{\mathbb{R}^2}\Big(|\nabla u|^2+\frac{4\varepsilon}{\gamma}|\nabla\rho^{\frac{\gamma}{2}}|^2+\frac{8\varepsilon}{\gamma}|\nabla\rho^{\frac{\nabla}{4}}|^2\Big)dx\\ &\le\int_{\mathbb{R}^2}\rho^{\frac{\gamma}{2}}|\text{div } u|dx\\ &\le\Big(\int_{\mathbb{R}^2}\rho^\gamma dx\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla u|^2dx\Big)^{\frac{1}{2}}\\ &\le\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}\rho^\gamma dx+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla u|^2dx\\ &\le\frac{\gamma-1}{2}E_2(t)+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla u|^2dx.\end{aligned}$$

Cette inégalité s'écrit aussi

$$\frac{\partial E_2(t)}{\partial t}+\int_{\mathbb{R}^2}\Big(\frac{1}{2}|\nabla u|^2+\frac{4\varepsilon}{\gamma}|\nabla\rho^{\frac{\gamma}{2}}|^2+\frac{8\varepsilon}{\gamma}|\nabla\rho^{\frac{\gamma}{4}}|^2\Big)dx\le\frac{\gamma-1}{2}E_2(t)$$

ce qui permet de conclure avec le lemme de Gronwall. □

Nous devons ajouter aux conditions (2.33) l'hypothèse

$$\rho_0\in L^{\frac{\gamma}{2}}(\mathbb{R}^2)$$

pour assurer la validité du lemme 2.8.

Réunis, les deux lemmes qui précèdent fournissent le corollaire suivant.

Corollaire 2.1 *Si* (ρ, u) *est une solution régulière de (2.30), alors l'inégalité*

$$\varepsilon \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla\rho|^2 dxdt \leq C$$

a lieu pour tout $\gamma \in [2,4]$ *et où* C *ne dépend pas de* ε.

DEMONSTRATION : Le cas $\gamma = 2$ est une conséquence immédiate du lemme 2.7. Supposons donc $2 < \gamma \leq 4$. Le lemme 2.8 nous indique alors que les quantités

$$\varepsilon \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla\rho^{\frac{\gamma}{2}}|^2 dxdt \text{ et } \varepsilon \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla\rho^{\frac{\gamma}{4}}|^2 dxdt$$

sont majorées par une constante indépendante de ε.
D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
\varepsilon \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla\rho|^2 dxdt &= \varepsilon \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \rho^{(\frac{\gamma}{2}-1)(\frac{8}{\gamma}-2)} |\nabla\rho|^{\frac{8}{\gamma}-2} \rho^{(\frac{\gamma}{4}-1)(4-\frac{8}{\gamma})} |\nabla\rho|^{4-\frac{8}{\gamma}} dxdt \\
&= C\varepsilon \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla\rho^{\frac{\gamma}{2}}|^{\frac{8}{\gamma}-2} |\nabla\rho^{\frac{\gamma}{4}}|^{4-\frac{8}{\gamma}} dxdt
\end{aligned}$$

et puisque $\big(\frac{4}{\gamma}-1\big) + \big(2-\frac{4}{\gamma}\big) = 1$ avec $\frac{4}{\gamma}-1, 2-\frac{4}{\gamma} \in [0,1]$ pour $2 < \gamma \leq 4$, il vient

$$\begin{aligned}
\varepsilon \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla\rho|^2 dxdt &\leq C\varepsilon \int_0^T \Big(\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla\rho^{\frac{\gamma}{2}}|^2 dx\Big)^{\frac{4}{\gamma}-1} \Big(\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla\rho^{\frac{\gamma}{4}}|^2 dx\Big)^{2-\frac{4}{\gamma}} dt \\
&\leq C\varepsilon \Big(\int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla\rho^{\frac{\gamma}{2}}|^2 dxdt\Big)^{\frac{4}{\gamma}-1} \Big(\int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla\rho^{\frac{\gamma}{4}}|^2 dxdt\Big)^{2-\frac{4}{\gamma}} \\
&= C\Big(\varepsilon \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla\rho^{\frac{\gamma}{2}}|^2 dxdt\Big)^{\frac{4}{\gamma}-1} \Big(\varepsilon \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla\rho^{\frac{\gamma}{4}}|^2 dxdt\Big)^{2-\frac{4}{\gamma}} \\
&\leq C,
\end{aligned}$$

d'où le résultat désiré. □

Soit maintenant $(\rho^\varepsilon, u^\varepsilon)$ la solution du problème d'approximation (2.30) donnée par le théorème 2.5. On a vu dans la section 2.2 que pour $p > 2\gamma$, $\gamma \geq 2$, et $q > 2$ on a les injections

$$L^2(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow \dot{B}_{q,\infty}^{-1+\frac{2}{q}}(\mathbb{R}^2) \text{ et } L^\gamma(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow \dot{B}_{p,\infty}^{-\frac{2}{\gamma}+\frac{2}{p}}(\mathbb{R}^2).$$

On déduit donc du lemme 2.7 que

$$\sup_{0\leq t\leq T} \|u^\varepsilon\|_{\dot{B}_{q,\infty}^{-1+\frac{2}{q}}(\mathbb{R}^2)} \lesssim \sup_{0\leq t\leq T} \|u^\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq C_1,$$

$$\sup_{0\leq t\leq T} \|\rho^\varepsilon\|_{\dot{B}_{p,\infty}^{-\frac{2}{\gamma}+\frac{2}{p}}(\mathbb{R}^2)} \lesssim \sup_{0\leq t\leq T} \|\rho^\varepsilon\|_{L^\gamma(\mathbb{R}^2)} \leq C_2,$$

$$\|\nabla u^\varepsilon\|_{L^2([0,T];L^2(\mathbb{R}^2))} \leq C_3$$

où C_1, C_2 et C_3 ne dépendent pas de ε. Donc par le théorème de Banach-Alaoglu, on peut extraire de $(\rho^\varepsilon, u^\varepsilon)$ une sous-famille encore notée $(\rho^\varepsilon, u^\varepsilon)$ telle que

$$\begin{cases} \rho^\varepsilon \rightharpoonup \rho \text{ faiblement-}* \text{ dans } L^\infty([0,T]; L^\gamma(\mathbb{R}^2)), \\ u^\varepsilon \rightharpoonup u \text{ faiblement-}* \text{ dans } L^2([0,T]; H^1(\mathbb{R}^2)). \end{cases} \tag{2.35}$$

Afin de prouver que le couple (ρ, u) ainsi obtenu est bien solution du système (2.29), nous avons besoin d'une estimation en espace-temps de ρ donnée par le

Lemme 2.9 *Si (ρ, u) est une solution faible de (2.30), alors pour tout $\gamma \geq 2$, on a l'estimation*

$$\int_0^T \int_K \rho^{\frac{3\gamma}{2}} dxdt \leq C$$

vraie pour tout $T > 0$ et où $K \subset \mathbb{R}^2$ est borné et où C ne dépend que de T, $E_1(0)$, $E_2(0)$ et K.

DEMONSTRATION : On suppose dans un premier temps $\gamma > 2$. Pour $j = 1, 2$ on considère les fonctions test

$$\varphi_j(x,t) = \psi(t)\phi(x)\mathcal{A}_j[\rho^{\frac{\gamma}{2}}]$$

où $\psi \in \mathcal{D}(0,T)$, $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$, et où $\mathcal{A}_j$ est l'opérateur pseudodifférentiel définit en transformée de Fourier par

$$\widehat{\mathcal{A}_j[f]}(\xi) = -i\frac{\xi_j}{|\xi|^2}\hat{f}(\xi), \quad i^2 = -1,$$

ou encore

$$\mathcal{A}_j = (-\triangle)^{-1}\partial_j.$$

Un calcul immédiat utilisant (2.34) donne

$$\begin{aligned} \partial_t \varphi_j(x,t) &= \psi'(t)\phi(x)\mathcal{A}[\rho^{\frac{\gamma}{2}}] + \psi(t)\phi(x)\mathcal{A}_j[\partial_t \rho^{\frac{\gamma}{2}}] \\ &= \psi'(t)\phi(x)\mathcal{A}_j[\rho^{\frac{\gamma}{2}}] + \psi(t)\phi(x)\mathcal{A}_j\Big[-\text{div }(\rho^{\frac{\gamma}{2}}u) + \varepsilon\frac{\gamma}{2}\rho^{\frac{\gamma}{2}-1}\triangle\rho + \big(1-\frac{\gamma}{2}\big)\rho^{\frac{\gamma}{2}}\text{div } u\Big] \end{aligned}$$

$$\partial_k \varphi_j(x,t) = \psi(t)\partial_k\phi(x)\mathcal{A}_j[\rho^{\frac{\gamma}{2}}] + \psi(t)\phi(x)\partial_k\mathcal{A}_j[\rho^{\frac{\gamma}{2}}].$$

Or, on vérifie aisément que $\sum_{j=1,2} \partial_j \mathcal{A}_j = Id$, donc

$$\sum_{j=1,2} \partial_j \varphi_j(x,t) = \sum_{j=1,2} \psi(t)\partial_j\phi(x)\mathcal{A}_j[\rho^{\frac{\gamma}{2}}] + \psi(t)\phi(x)\rho^{\frac{\gamma}{2}}.$$

On en déduit

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \psi(t)\phi(x)\rho^{\frac{3\gamma}{2}} dxdt = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \rho^\gamma \Big(\sum_{j=1,2} \partial_j \varphi_j - \psi(t) \sum_{j=1,2} \partial_j \phi \mathcal{A}_j[\rho^{\frac{\gamma}{2}}] \Big) dxdt$$
$$= -\sum_{j=1,2} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \partial_j(\rho^\gamma)\varphi_j dxdt - \sum_{j=1,2} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \rho^\gamma \psi \partial_j \phi \mathcal{A}_j[\rho^{\frac{\gamma}{2}}] dxdt$$

et

$$-\sum_{j=1,2} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \partial_j(\rho^\gamma)\varphi_j dxdt = \sum_{j=1,2} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} (\triangle u_j - \partial_t u_j)\varphi_j dxdt$$
$$= \sum_{j=1,2} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \nabla u_j \partial_j \varphi_j dxdt - \sum_{j=1,2} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} u_j \partial_t \varphi_j dxdt + \sum_{j=1,2} \Big[\int_{\mathbb{R}^2} u_j \varphi_j dx \Big]_{t=0}^{t=T}$$

d'où finalement

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \psi(t)\phi(x)\rho^{\frac{3\gamma}{2}} dxdt$$
$$\leq \sum_{j=1,2} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} |\rho^\gamma \psi \partial_j \phi \mathcal{A}_j[\rho^\gamma 2]| dxdt + \sum_{j=1,2} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} |\psi \partial_j \phi \nabla u_j \mathcal{A}_j[\rho^{\frac{\gamma}{2}}]| dxdt$$
$$+ \sum_{j=1,2} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} |\psi \phi \nabla u_j \partial_j \mathcal{A}_j[\rho^{\frac{\gamma}{2}}]| dxdt + \sum_{j=1,2} \in_0^T \int_{\mathbb{R}^2} |\psi' \phi u_j \mathcal{A}_j[\rho^{\frac{\gamma}{2}}]| dxdt$$
$$+ \sum_{j=1,2} \Big| \Big[\int_{\mathbb{R}^2} \psi \phi u_j \mathcal{A}_j[\rho^{\frac{\gamma}{2}}] dx \Big]_{t=0}^{t=T} \Big| + \sum_{j=1,2} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \psi \phi u_j \mathcal{A}_j[\mathrm{div}\ (\rho^{\frac{\gamma}{2}} u)]| dxdt$$
$$+ \sum_{j=1,2} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} |\psi \phi \mathcal{A}_j[(\frac{\gamma}{2} - 1)\rho^{\frac{\gamma}{2}} \mathrm{div}\ u]| dxdt + \sum_{j=1,2} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} |\psi \phi \mathcal{A}_j[\varepsilon \frac{\gamma}{2} \rho^{\frac{\gamma}{2}-1} \triangle \rho]| dxdt$$
$$=: \sum_{k=1}^{8} I_k.$$

Nous voulons maintenant estimer chacun des I_k. D'après le théorème de Marcinkiewicz [9], on a

$$\|\mathcal{A}_j[f]\|_{W^{1,s}(\mathbb{R}^2)} \leq C(s)\|f\|_{L^s(\mathbb{R}^2)}, \quad 1 < s < \infty. \tag{2.36}$$

Rappelons l'injection de Sobolev

$$W^{1,s}(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^2), \quad \forall q \in [s,p] \text{ avec } \frac{1}{p} = \frac{1}{s} - \frac{1}{2}$$

qui nous permet d'obtenir l'inégalité

$$\|\mathcal{A}_j[f]\|_{L^q(\mathbb{R}^2)} \leq C(q,s)\|f\|_{L^s(\mathbb{R}^2)}, \quad \frac{1}{q} \geq \frac{1}{s} - \frac{1}{2}. \tag{2.37}$$

D'autre part, le théorème de Morrey (voir [1]) entraîne que

$$\|\mathcal{A}_j[f]\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \leq C(s)\|f\|_{L^s(\mathbb{R}^2)}, \quad \forall s > 2.$$

1. Estimation de I_1 : En utilisant (2.37),

$$\begin{aligned} I_1 &\leq C\int_0^T\int_{\mathbb{R}^2}|\rho^\gamma\mathcal{A}_j[\rho^{\frac{\gamma}{2}}]|dxdt \leq C\int_0^T\|\rho^\gamma\|_{L^{\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^2)}\|\mathcal{A}_j[\rho^{\frac{\gamma}{2}}]\|_{L^3(\mathbb{R}^2)}dt \\ &\leq C\int_0^T\|\rho^\gamma\|_{L^{\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^2)}\|\rho^{\frac{\gamma}{2}}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}dt \leq C\|\rho^{\frac{\gamma}{2}}\|_{L^\infty((0,T);L^2(\mathbb{R}^2))}\int_0^T\|\rho^\gamma\|_{L^{\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^2)}dt \\ &\leq CE_1(0)^{\frac{1}{2}}\int_0^T\|\rho\|^\gamma_{L^{\frac{3\gamma}{2}}(\mathbb{R}^2)}dt. \end{aligned}$$

   La concavité de $x \rightarrowtail x^{\frac{2}{3}}$ sur $\mathbb{R}_+$ implique que pour tout $\nu > 0$ il existe $C > 0$ tel que pour $x > 0$, on a $x^{\frac{2}{3}} \leq \nu x + C$. On en déduit qu'il existe $\nu > 0$ petit tel que

$$I_1 \leq \nu\int_0^T\int_{\mathbb{R}^2}\rho^{\frac{3\gamma}{2}}dxdt + C.$$

2. Estimation de I_2 :

$$\begin{aligned} I_2 &\leq C\int_0^T\|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\|\mathcal{A}_j[\rho^{\frac{\gamma}{2}}]\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}dt \leq C\int_0^T\|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\|\rho^{\frac{\gamma}{2}}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}dt \\ &\leq C\Big(\int_0^T\|\nabla u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}dt\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_0^T\|\rho\|^\gamma_{L^\gamma(\mathbb{R}^2)}dt\Big)^{\frac{1}{2}} \leq CE_1(0)T^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

3. Estimation de I_3 : Grâce à (2.36), on a

$$\begin{aligned} I_3 &\leq C\int_0^T\|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\|\partial_j\mathcal{A}_j[\rho^{\frac{\gamma}{2}}]\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}dt \leq C\int_0^T\|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\|\rho^{\frac{\gamma}{2}}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}dt \\ &\leq C\Big(\int_0^T\|\nabla u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}dt\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_0^T\|\rho^{\frac{\gamma}{2}}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}dt\Big)^{\frac{1}{2}} \leq CE_1(0)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_0^T\|\rho\|^\gamma_{L^\gamma(\mathbb{R}^2)}dt\Big)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq CE_1(0)T^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

4. Estimation de I_4 :

$$\begin{aligned} I_4 &\leq C\int_0^T\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\|\mathcal{A}_j[\rho^{\frac{\gamma}{2}}]\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}dt \leq C\int_0^T\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\|\rho^{\frac{\gamma}{2}}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}dt \\ &\leq C\Big(\int_0^T\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}dt\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_0^T\|\rho\|^\gamma_{L^\gamma(\mathbb{R}^2)}dt\Big)^{\frac{1}{2}} \leq CE_1(0). \end{aligned}$$

5. Estimation de I_5 :

$$\begin{aligned} I_5 &\leq C\sup_{0\leq t\leq T}\big(\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\|\mathcal{A}_j[\rho^{\frac{\gamma}{2}}]\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\big) \leq C\sup_{0\leq t\leq T}\big(\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\|\rho^{\frac{\gamma}{2}}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\big) \\ &\leq CE_1(0). \end{aligned}$$

6. Estimation de I_6 : Toujours avec (2.36) et Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned}
I_6 &\leq C\int_0^T \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\|\mathcal{A}_j[\text{div }(\rho^{\frac{\gamma}{2}}u)]\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}dt \leq C\int_0^T \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\|\rho^{\frac{\gamma}{2}}u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}dt\\
&\leq C\Big(\int_0^T \|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}dt\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_0^T \|\rho^{\frac{\gamma}{2}}u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}dt\Big)^{\frac{1}{2}} \leq CT^{\frac{1}{2}}\sup_{0\leq t\leq T}\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}\Big(\int_0^T \|\rho\|^{\gamma}_{L^\gamma(\mathbb{R}^2)}dt\Big)^{\frac{1}{2}}\\
&\leq CTE_1(0)^{\frac{3}{2}}.
\end{aligned}$$

7. Estimation de I_7 :

$$\begin{aligned}
I_7 &\leq C\int_0^T \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\|\mathcal{A}_j[\rho^{\frac{\gamma}{2}}\text{div } u]\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}dt \leq C\int_0^T \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\|\rho^{\frac{\gamma}{2}}\text{div } u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}dt\\
&\leq C\Big(\int_0^T \|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}dt\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_0^T \|\rho^{\frac{\gamma}{2}}\text{div } u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}dt\Big)^{\frac{1}{2}}\\
&\leq CT^{\frac{1}{2}}\sup_{0\leq t\leq T}\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\Big(\int_0^T \|\rho^{\frac{\gamma}{2}}\text{div } u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}dt\Big)^{\frac{1}{2}}\\
&\leq CT^{\frac{1}{2}}E_1(0)\Big(\int_0^T \|\text{div } u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}dt\Big)^{\frac{1}{2}}\\
&\leq CT^{\frac{1}{2}}E_1(0)^{\frac{3}{2}}.
\end{aligned}$$

8. Estimation de I_8 : On utilise cette fois-ci (2.37) pour obtenir

$$\begin{aligned}
I_8 &\leq C\int_0^T \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\|\mathcal{A}_j[\varepsilon\rho^{\frac{\gamma}{2}-1}\triangle\rho\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}dt\\
&\leq C\int_0^T \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\|\mathcal{A}_j[\varepsilon\triangle\rho^{\frac{\gamma}{2}} + \varepsilon|\nabla\rho^{\frac{\gamma}{4}}|^2\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}dt\\
&\leq C\int_0^T \big(\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\|\mathcal{A}_j[\varepsilon\triangle\rho^{\frac{\gamma}{2}}]\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\|\mathcal{A}_j[\varepsilon|\nabla\rho^{\frac{\gamma}{4}}|^2]\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\big)dt\\
&\leq C\int_0^T \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\|\varepsilon\nabla\rho^{\frac{\gamma}{2}}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}dt + C\int_0^T \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\|\varepsilon|\nabla\rho^{\frac{\gamma}{4}}|^2\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}dt\\
&= C\int_0^T \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\|\varepsilon\nabla\rho^{\frac{\gamma}{2}}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}dt + C\int_0^T \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\|\varepsilon\nabla\rho^{\frac{\gamma}{4}}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}dt\\
&\leq C\varepsilon\Big(\int_0^T \|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}dt\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_0^T \|\nabla\rho^{\frac{\gamma}{2}}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}dt\Big)^{\frac{1}{2}} + C\varepsilon\sup_{0\leq t\leq T}\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\int_0^T \|\nabla\rho^{\frac{\gamma}{4}}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}dt\\
&\leq C\varepsilon\int_0^T \|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}dt + C\varepsilon\int_0^T \|\nabla\rho^{\frac{\gamma}{2}}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}dt + C\varepsilon\sup_{0\leq t\leq T}\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\int_0^T \|\nabla\rho^{\frac{\gamma}{4}}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}dt\\
&\leq C\varepsilon E_1(0)T + CE_1(0) + CE_1(0)^{\frac{1}{2}}E_2(0)\exp\big(\frac{\gamma-1}{2}T\big) \leq C
\end{aligned}$$

On choisit à présent $\psi|_{(0,T)} = 1$ et $\phi|_K = \nu + 1$, il vient donc

$$\int_0^T\int_K \rho^{\frac{3\gamma}{2}}dxdt \leq \int_0^T\int_{\mathbb{R}^2}(\phi(x)-\nu)\rho^{\frac{3\gamma}{2}}dxdt \leq C,$$

ce qui est bien l'estimation désirée.
Le cas $\gamma = 2$ se traite de la même façon en prenant pour fonctions test

$$\tilde{\varphi}_j(x,t) = \psi(t)\phi(x)\mathcal{A}_j[\rho].$$

Dans ce cas, l'inégalité d'énergie devient

$$\int_{\mathbb{R}^2} \Big(\frac{1}{2}|u|^2 + \rho^2\Big) dx + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \big(|\nabla u|^2 + 4\varepsilon|\nabla\rho|^2\big) dxdt \leq E_1(0).$$

Toutes les estimations précédentes sont encores vraies à l'exception de

$$\begin{aligned} \tilde{I}_8 &\leq C\int_0^T \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\|\mathcal{A}_j[\varepsilon\triangle\rho]\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}dt \leq C\int_0^T \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}\|\varepsilon\nabla\rho\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}dt \\ &\leq C\varepsilon\int_0^T \|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}dt + C\varepsilon\int_0^T \|\nabla\rho\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}dt \leq C\varepsilon E_1(0)T + CE_1(0) \leq C. \quad \square \end{aligned}$$

Voici une conséquence directe du lemme précédent.

Corollaire 2.2 *Soit (ρ, u), une solution faible de (2.30) satisfaisant (2.33), alors on a*

$$\int_0^T \int_K \rho^{\gamma+1} dxdt \leq C$$

pour tout $\gamma \geq 2$, $K \subset \mathbb{R}^2$ bornée et avec C indépendant de ε.

DEMONSTRATION : L'inégalité de Hölder permet d'obtenir l'inégalité d'interpolation

$$\|f\|_{L^1(K)} \leq \|f\|^{\theta}_{L^p(K)}\|f\|^{1-\theta}_{L^q(K)}, \quad \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{q} = 1, \quad \theta \in [0,1]$$

pour toute $f \in L^1(K)$. Donc, pour $\theta = \dfrac{\gamma-2}{\gamma+1} \in [0,1]$, on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_K \rho^{\gamma+1} dxdt &\leq \int_0^T (\|\rho\|^{\theta}_{L^{\gamma}(K)}\|\rho\|^{1-\theta}_{L^{\frac{3\gamma}{2}}(K)})^{\gamma+1} dt \\ &\leq \sup_{0\leq t\leq T} \|\rho\|^{\theta}_{L^{\gamma}(K)} \int_0^T \|\rho\|^3_{L^{\frac{3\gamma}{2}}(K)} dt \\ &\leq CT^{1-\frac{2}{\gamma}} \Big(\int_0^T \int_K \rho^{\frac{3\gamma}{2}} dxdt\Big)^{\frac{2}{\gamma}} \\ &\leq C \end{aligned}$$

avec C qui ne dépend pas de ε. $\square$

On en déduit que la famille $((\rho^{\varepsilon})^{\gamma}))$ est uniformément bornée dans $L^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}(K)$ et on peut donc supposer, quitte à en extraire une sous-famille, que

$$(\rho^{\varepsilon})^{\gamma} \rightarrow \overline{\rho^{\gamma}} \text{ faiblement dans } L^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}(K),$$

$$(\rho^\varepsilon)^{\gamma+1} \to \overline{\rho^{\gamma+1}} \text{ faiblement dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2 \times (0,T)).$$

D'autre part, les estimations uniformes d'énergie impliquent que

$$\varepsilon \triangle \rho^\varepsilon \to 0 \text{ dans } L^2(0,T; W^{-1,2}(\mathbb{R}^2)).$$

Le lemme 2.8 entraîne lui

$$\int_{\mathbb{R}^2} (\rho^\varepsilon u^\varepsilon)^{\frac{2\gamma}{2+\gamma}} dx \leq \Big(\int_{\mathbb{R}^2} u^2 dx\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\int_{\mathbb{R}^2} \rho^\gamma dx\Big)^{\frac{1}{\gamma}} \leq C$$

et pour $2 < m < \infty$,

$$\int_0^T \int_{R^2} (\rho^\varepsilon u^\varepsilon)^{\frac{m\gamma}{m+\gamma}} dxdt \leq \int_0^T \|\rho\|_{L^\gamma(\mathbb{R}^2)} \|u\|_{L^m(\mathbb{R}^2)} \leq C,$$

et donc $(\rho^\varepsilon u^\varepsilon)$ est uniformément bornée dans $L^\infty(0,T; L^{\frac{2\gamma}{2+\gamma}}(\mathbb{R}^2)) \cap L^2(0,T; L^{\frac{m\gamma}{m+\gamma}}(\mathbb{R}^2))$.
Puisque $\partial_t \rho^\varepsilon = \varepsilon \triangle \rho^\varepsilon - \text{div } (\rho^\varepsilon u^\varepsilon)$, la famille $(\partial_t \rho^\varepsilon)$ est uniformément bornée dans $L^2(0,T; W^{-1,\frac{m\gamma}{m+\gamma}}(\mathbb{R}^2))$.
D'après le théorème de Rellich (voir [1]),

$$L^\gamma(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow W^{-1,\frac{m\gamma}{m+\gamma}}(\mathbb{R}^2) \text{ avec injection compacte.}$$

Le théorème d'Ascoli nous permet alors d'affirmer que

$$(\rho^\varepsilon) \text{ est précompact dans } \mathcal{C}([0,T], W^{-1,\frac{m\gamma}{m+\gamma}}(\mathbb{R}^2))$$

et par conséquent,

$$\rho^\varepsilon \to \rho \text{ dans } \mathcal{C}([0,T], L^\gamma_w(\mathbb{R}^2)) \text{ et faiblement dans } L^{\frac{3\gamma}{2}}(\mathbb{R}^2 \times (0,T)). \qquad (2.38)$$

La limite (ρ, u) obtenue dans (2.35) satisfait alors

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \text{div } (\rho u) = 0 \\ \partial_t u - \triangle u + \nabla \overline{\rho^\gamma} = 0 \end{cases}$$

dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2 \times (0,T))$.

Il s'agit maintenant de montrer que $\overline{\rho^\gamma} = \rho^\gamma$. Ceci va être rendu possible grâce au lemme suivant.

Lemme 2.10 *Soit $\psi(x)$ et $\phi(x)$ comme dans le lemme 2.9. Si $(\rho^\varepsilon, u^\varepsilon)$ est une solution faible de (2.30) pour $\gamma \geq 2$ et (ρ, u) une solution faible du système limite (2.29), alors*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \psi(t)\phi(x)(\rho^\varepsilon)^{\gamma+1} dxdt = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \psi(t)\phi(x)\overline{\rho^\gamma}\rho dxdt.$$

DEMONSTRATION : On considère encore les fonctions test φ^j définies par

$$\varphi^j(x,t) = \psi(t)\phi(x)\mathcal{A}_j[\rho^\varepsilon], \quad j = 1, 2.$$

On a alors

$$\partial_t \varphi^j(x,t) = \psi' \phi \mathcal{A}_j[\rho^\varepsilon] + \phi\phi \mathcal{A}_j[\partial_t \rho^\varepsilon],$$
$$\partial_k \varphi^j(x,t) = \psi \partial_k \phi \mathcal{A}_j[\rho^\varepsilon] + \psi\phi \partial_k \mathcal{A}_j[\rho^\varepsilon]$$

et

$$\psi\phi\rho^\varepsilon = \sum_{j=1,2} \partial_j \varphi^j(x,t) - \sum_{j=1,2} \psi \partial_j \phi \mathcal{A}_j[\rho^\varepsilon].$$

On en déduit comme au lemme 2.9

$$\begin{aligned}
\int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \psi\phi(\rho^\varepsilon)^{\gamma+1} dxdt &= \sum_{j=1,2} \Big[\psi\phi u_j^\varepsilon \mathcal{A}_j[\rho^\varepsilon] dx\Big]_{t=0}^{t=T} - \sum_{j=1,2} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \psi' \phi u_j^\varepsilon \mathcal{A}_j[\rho^\varepsilon] dxdt \\
&+ \sum_{j=1,2} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \psi\phi u_j^\varepsilon \mathcal{A}_j[\varepsilon \triangle \rho^\varepsilon] dxdt + \sum_{j=1,2} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \psi\phi u_j^\varepsilon \mathcal{A}_j[\text{div } (\rho^\varepsilon u^\varepsilon)] dxdt \\
&+ \sum_{j=1,2} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \psi \partial_j \phi \partial_j u_j^\varepsilon \mathcal{A}_j[\rho^\varepsilon] dxdt + \sum_{j=1,2} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \phi\phi \partial_j u_j^\varepsilon \partial_j \mathcal{A}_j[\rho^\varepsilon] dxdt \\
&- \sum_{j=1,2} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \psi \partial_j \phi (\rho^\varepsilon)^\gamma \mathcal{A}_j[\rho^\varepsilon] dxdt. \qquad (2.39)
\end{aligned}$$

De la même manière, en considérant les fonctions

$$\tilde{\varphi}^j(x,t) = \psi(t)\phi(x)\mathcal{A}_j[\rho],$$

on obtient

$$\begin{aligned}
\int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \psi\phi \overline{\rho^\gamma} \rho dxdt &= \sum_{j=1,2} \Big[\int_{\mathbb{R}^2} \psi\phi u_j \mathcal{A}_j[\rho] dx\Big]_{t=0}^{t=T} - \sum_{j=1,2} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \psi' \phi u_j \mathcal{A}_j[\rho] dxdt \\
&+ \sum_{j=1,2} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \psi\phi u_j \mathcal{A}_j[\text{div } (\rho u)] dxdt + \sum_{j=1,2} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \psi \partial_j \phi \partial_j u_j \mathcal{A}_j[\rho] dxdt \\
&+ \sum_{j=1,2} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \psi\phi \partial_j u_j \partial_j \mathcal{A}_j[\rho] dxdt \\
&- \sum_{j=1,2} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \psi \partial_j \phi \overline{\rho^\gamma} \mathcal{A}_j[\rho] dxdt. \qquad (2.40)
\end{aligned}$$

D'autre part, le corollaire 2.1 implique que

$$\begin{aligned}
\varepsilon \Big| \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \psi\phi u_j^\varepsilon \mathcal{A}_j[\triangle \rho^\varepsilon] dxdt \Big| &\leq C\varepsilon \int_0^T \|u_j^\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \|\mathcal{A}_j[\triangle \rho^\varepsilon]\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} dt \\
&\leq C\varepsilon \int_0^T \|u_j^\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \|\nabla \rho^\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} dt \\
&\to 0 \qquad (2.41)
\end{aligned}$$

lorsque $\varepsilon \to 0$.
La convergence obtenue en (2.38) et l'inégalité (2.36) entraînent que

$$\mathcal{A}_j[\rho^\varepsilon] \to \mathcal{A}_j[\rho] \text{ dans } \mathcal{C}(\mathbb{R}^2 \times (0,T)), \tag{2.42}$$

$$\partial_j \mathcal{A}_j[\rho^\varepsilon] \to \partial_j \mathcal{A}_j[\rho] \text{ dans } \mathcal{C}([0,T]; L^\gamma_w(\mathbb{R}^2)). \tag{2.43}$$

Par les injections de Sobolev et le théorème d'Ascoli, on a

$$u^\varepsilon \to u \text{ dans } L^2(0,T; L^p(\mathbb{R}^2)), \quad 1 < p < \infty,$$

$$\rho^\varepsilon u^\varepsilon \to \rho u \text{ dans } \mathcal{C}([0,T], L_w^{\frac{2\gamma}{2+\gamma}}(\mathbb{R}^2))$$

et donc

$$\mathcal{A}_j[\text{div } (\rho^\varepsilon)] \to \mathcal{A}_j[\text{div } (\rho u)] \text{ dans } \mathcal{C}([0,T], L^{\frac{2\gamma}{2+\gamma}}(\mathbb{R}^2)). \tag{2.44}$$

Par comparaison des égalités (2.39) et (2.40) et en passant à la limite grâce à (2.41)-(2.44), on obtient le résultat désiré. □

Maintenant, puisque la fonction $P(z) = z^\gamma$ est monotone, on déduit

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \psi\phi(P(\rho^\varepsilon) - P(\nu))(\rho^\varepsilon - \nu)dxdt \geq 0$$

et à la limite,

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} (\psi\phi\overline{\rho^\gamma}\rho + \psi\phi\nu^{\gamma+1})dxdt - \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \psi\phi(\overline{\rho^\gamma}\nu + \nu^\gamma\rho)dxdt \geq 0.$$

Par conséquent, pour $\psi|_{(0,T)} = \phi|_K = 1$

$$\int_0^T \int_K (\overline{\rho^\gamma} - \nu^\gamma)(\rho - \nu)dxdt \geq 0$$

pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^2$. On choisit alors $\nu = \rho + \eta\theta$, $\eta \to 0$ et θ arbitraire ; il vient alors

$$\int_0^T \int_K (\overline{\rho^\gamma} - \rho^\gamma)dxdt \geq 0$$

et donc $\overline{\rho^\gamma} \geq \rho^\gamma$. Le même raisonnement permet d'obtenir l'inégalité inverse et donc

$$\overline{\rho^\gamma} = \rho^\gamma.$$

Finalement, le théorème 2.5, le lemme 2.8 et les arguments de compacité qui précèdent nous donnent le résultat annoncé :

Théorème 2.6 *Pour tout* $\rho_0 \in \dot{B}_{p,\infty}^{-\frac{2}{\gamma}+\frac{2}{p}}(\mathbb{R}^2)$ *et* $u_0 \in \dot{B}_{q,\infty}^{-1+\frac{2}{q}}(\mathbb{R}^2)$*, si*

$$\|\rho_0\|_{\dot{B}_{p,\infty}^{-\frac{2}{\gamma}+\frac{2}{p}}(\mathbb{R}^2)} \leq \delta, \quad \|\rho_0\|_{L^\gamma(\mathbb{R}^2)} \leq C_1, \quad \|\rho_0\|_{L^{\frac{\gamma}{2}}(\mathbb{R}^2)} \leq C_2 \text{ (pour } \gamma > 2\text{)},$$

$$\|u_0\|_{\dot{B}_{q,\infty}^{-1+\frac{2}{q}}(\mathbb{R}^2)} \leq \eta, \quad \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq C_3$$

avec $p > 2\gamma$, $2 \leq \gamma \leq 4$, $q > 2$ *et où* δ *et* η *sont suffisamment petits, et* C_1, C_2, C_3 *sont des constantes absolues, alors il existe une solution* (ρ, u) *de (2.29) telle que*

$$(\rho, u) \in \mathcal{C}_w([0,T]; \dot{B}_{p,\infty}^{-\frac{2}{\gamma}+\frac{2}{p}}(\mathbb{R}^2)) \times \mathcal{C}_w([0,T]; \dot{B}_{q,\infty}^{-1+\frac{2}{q}}(\mathbb{R}^2)), \quad 0 < T < \infty.$$

Bibliographie

[1] H. Brezis. *Analyse Fonctionnelle*. Dunod, 1999.

[2] E. Feireisl. *On Compactness of solutions to the compressible isentropic Navier-Stokes equations when the density is not square integrable*. 1989.

[3] E. Feireisl. *Viscous and/or heat conducting compressible fluids*. Handbook of mathematical fluid dynamics, 2002.

[4] S. Jiang and P. Zhang. *Remarks on Weak Solutions to the Navier-Stokes Equations for 2-D Compressible Isothermal Fluids with Spherically Symetric Initial Data*. 2002.

[5] P.G. Lemarié-Rieusset. *Recent developments in the Navier-Stokes problem*. Chapman and Hall/CRC, 2002.

[6] J. Leray. *Essai sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace*. 1934.

[7] P.-L. Lions. *Mathematical Topics in Fluid Mechanics - Incompressible Models*, volume 1. Oxford Science Plublication, 1996.

[8] P.-L. Lions. *Mathematical Topics in Fluid Mechanics - Compressible Models*, volume 2. Oxford Science Plublication, 1998.

[9] E. M. Stein. *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*. Princeton University Press, 1970.

[10] G. Zhenhua. *Self-similar Solutions to the Stokes Approximation Equations for Two Dimensional Compressible Flows*. 2003.