Giona Veronelli

Institut Galilée, Université Paris 13 - Sorbonne Paris Cité
Laboratoire LAGA et Département de Mathématiques
giona.veronelli@gmail.com

Curriculum vitae

Aggiornato il 31 gennaio 2017

Indice

INFORMAZIONI PERSONALI

Nome:	Giona
Cognome:	Veronelli
Luogo di nascita:	Como (CO)
Data di nascita:	19/11/1983
Nazionalità:	Italiana
Sesso:	Maschile
Situazione familiare:	convivenza; 2 figli (nati nel 2014 e nel 2016)
Indirizzo professionale:	Institut Galilée, Université Paris 13 - Sorbonne Paris Cité
	Laboratoire LAGA et Département de Mathématiques
	Bureau D416, 99 avenue Jean-Baptiste Clément
	93430 Villetaneuse, France
Telefono:	+33 (0) 1 49 40 35 97
Mail:	veronelli@math.univ-paris13.fr
PEC:	giona.veronelli@pec.it
Pagina web:	`https://www.math.univ-paris13.fr/~veronell/`

IMPIEGO ATTUALE

da settembre 2012:	Maître de Conférences à l'Institut Galilée - Université de Paris 13 Laboratoire d'Analyse, Géométrie et Applications (LAGA) et Département de Mathématiques

ABILITAZIONE SCIENTIFICA NAZIONALE

dal 30/12/2014:	abilitazione scientifica nazionale alle funzioni di professore di seconda fascia nel settore concorsuale 01/A2 - Geometria e Algebra. Scadenza: 30/12/2020.

ESPERIENZE FORMATIVE E LAVORATIVE

Gennaio 2012 - Agosto 2012:	*INdAM Fellowships in Mathematics and/or Applications for Experienced Researchers cofunded by Marie Curie (type Outgoing)*
	Université de Cergy-Pontoise, Laboratoire Analyse, Géométrie et Modélisation (AGM)
Ottobre 2011 - Dicembre 2011:	demi-ATER, 26ème section, Université de Cergy-Pontoise, Laboratoire Analyse, Géométrie et Modélisation (AGM)
Ottobre 2010 - Settembre 2011:	Post-Doc all'Université de Cergy-Pontoise, Laboratoire Analyse, Géométrie et Modélisation (AGM), sotto la supervisione di Prof. Emmanuel Hebey
Novembre 2007 - Febbraio 2011:	Dottorato in Matematica all'Università degli Studi di Milano
Titolo della tesi:	*Some analytic and geometric aspects of the p-Laplacian on Riemannian manifolds*
Relatore:	Stefano Pigola (Università dell'Insubria - Como)
Ottobre 2007:	Laurea specialistica in Matematica (110 e lode), Università degli Studi dell'Insubria (Como)
Titolo della tesi:	*Ipersuperfici a curvatura media costante in $\mathbb{H}^n$: stime di curvatura e topologia all'infinito*
Gennaio 2006:	Laurea triennale in Matematica (110 e lode) all'Università degli Studi dell'Insubria (Como)
Giugno 2002:	Maturità scientifica (60/60), Liceo Scientifico Galileo Galilei (Erba(CO))

PUBBLICAZIONI

17) A. Naber, D. Valtorta, G. Veronelli, *Quantitative regularity for p-harmonic maps.* Accettato su Comm. Anal. Geom.

16) I. Izmestiev, F. Fillastre, G. Veronelli, *Hyperbolization of cusps with convex boundary.* Manuscripta Math. **150** (2016) no. 3-4, 475–492.

15) F. Fillastre, G. Veronelli, *Lorentzian area measures and the Christoffel problem* Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. Vol. **XVI** issue 2 (2016) 383–467.

14) S. Pigola, G. Veronelli, *On the homotopy Dirichlet problem for p-harmonic maps II: Cartan-Hadamard targets with special structure.* Proceedings of the Amer. Math. Soc. **144** (2016), no. 7, 3173–3180

13) S. Pigola, G. Veronelli, *On the homotopy Dirichlet problem for p-harmonic maps I: compact targets.* Geometriae Dedicata **177** (2015) 307–322.

12) E. Hebey, G. Veronelli, *The Lichnerowicz equation in the closed case of the Einstein-Maxwell Theory.* Transactions of the Amer. Math. Soc. **366** Number 3, March 2014, Pages 1179–1193.

11) M. Rimoldi, G. Veronelli, *Topology of steady and expanding gradient Ricci solitons via f-harmonic maps.* Differential Geom. Appl. **31** no. 5 (2013) 623–638.

10) S. Pigola, G. Veronelli, *Remarks on L^p-vanishing results in geometric analysis.* International Journal of Mathematics **23** no. 1 (2012), 1250008 (18 pages)

9) D. Valtorta, G. Veronelli, *Stokes' theorem, volume growth and parabolicity.* Tohoku Mathematical Journal **63** no. 3 (2011), p. 397–412.

8) G. Veronelli, *A general comparison theorem for p-harmonic maps in homotopy class.* Journal of Mathematical Analysis and Applications **391** (2012) p. 335–349

7) G. Veronelli, *Uniform decay estimates for solutions of the Yamabe equation.* Geometriae Dedicata **155** (2011) p. 1–20

6) P. Mastrolia, M. Rimoldi, G. Veronelli, *Myers' type theorems and some related oscillation results.* Journal of Geometric Analysis **22** (2012), no. 3, p. 763–779

5) S. Pigola, G. Veronelli, *Uniform decay estimates for finite-energy solutions of semi-linear elliptic inequalities and geometric applications.* Differential Geometry and Its Applications **29** Issue 1 (2011), p. 35–54.

4) I. Holopainen, S. Pigola, G. Veronelli, *Global comparison principles for the p-Laplace operator on Riemannian manifolds.* Potential Analysis **34** no. 4 (2011), p. 371–384.

3) S. Pigola, G. Veronelli, *Lower volume estimates and Sobolev inequalities.* Proceedings of the American Mathematical Society**138** (2010), no. 12, p. 4479–4486.

2) G. Veronelli, *On p-harmonic maps and convex functions.* Manuscripta Mathematica **131** (2010), no. 3-4, p. 537–546

1) S. Pigola, G. Veronelli, *On the homotopy class of maps with finite p-energy into non-positively curved manifolds.* Geometriae Dedicata **143** (2009), Issue 1, p. 109–116

PREPUBBLICAZIONI

- S. Pigola, G. Veronelli, *Sobolev spaces of maps and the Dirichlet problem for harmonic maps.*
- S. Pigola, G. Veronelli, *The Riemannian extension problem.*
- M. Rimoldi, G. Veronelli, *Extremals of Log Sobolev inequality on non-compact manifolds and Ricci soliton structures.*

CONFERENZE E SCUOLE ORGANIZZATE

Luglio 2016:	Centro Volta, Como, Italie, II Scuola *Geometric Analysis on Riemannian and singular metric spaces*
Mini-corsi tenuti da:	H.-D. Cao, N. Gigli, T. Ilmanen, R. Schoen, C. Sormani, X.-P. Zhu
Comitato scientifico:	G. Besson, S. Pigola, A. Setti, M. Troyanov.

Ottobre 2013:	Centro Volta, Como, Italie, Scuola *Geometric Analysis on Riemannian and singular metric spaces*
Mini-corsi tenuti da:	S. Alexander, G. Carron, E. Hebey, U. Lang, A. Neves
Comitato scientifico:	G. Besson, S. Pigola, A. Setti, M. Troyanov.

SEMINARI

Gennaio 2017:	Scuola Normale Superiore di Pisa
Gennaio 2017:	Università dell'Insubria, workshop *A geometry day in Como*
Giugno 2016:	Université Paris 7, *Séminaire de Géométrie*
Maggio 2015:	Université Paris 13 - Institut Galilée, *Séminaire de Topologie Algébrique*
Marzo 2014:	EPFL - Lausanne, *Geometry and dynamical systems seminar*
Febbraio 2014:	UFC - Fortaleza, *VII Workshop on Geometric Analysis*
Aprile 2013:	Université Paris 13 - Institut Galilée *Journée du LAGA*
Marzo 2013:	Université de Cergy-Pontoise, *Séminaire Géométrie, EDP et Physique Mathématique*
Febbraio 2013:	Université Paris 6, Journée du projet ANR: *ACG - Aspects Conformes de la Géométrie*
Ottobre 2012:	Université Paris 13 - Institut Galilée, *Groupe de travail EDP non-linéaires*
Agosto 2012:	Banff, Canada, BIRS workshop: *Recent trends in geometric and non linear analysis*
Febbraio 2012:	Université de Nice, *Séminaire d'Analyse et Géométrie*
Gennaio 2012:	Université de Nancy, *Journées Nancéiennes de Géométrie*
Maggio 2011:	University of Helsinki, *Geometrisen analyysin seminaari*
Marzo 2011:	Université de Cergy-Pontoise, *Séminaire Géométrie, EDP et Physique Mathématique*
Febbraio 2011:	Università di Milano Bicocca, *1st Bicocca HART: Harmonic Analysis and Related Topics*
Giugno 2009:	Centro De Giorgi, Pisa, *Geometric flows and geometric operators*

INVITI

8-12 Febbraio 2016:	Université de Fribourg
9 Febbraio - 3 Marzo 2015	Università dell'Insubria Como
9-23 Febbraio 2014:	UFC - Fortaleza
19-27 Maggio 2011:	University of Helsinki

ALTRE INFORMAZIONI

- Nel 2016, responsabile (e unico membro) del progetto *PEPS Insmi Jeunes chercheurs(-ses)* (3880€ da utilizzare per missioni e inviti).
- Nel 2015/2016, responsabile scientifico del post-doc Michele Rimoldi, che ha passato 10 mesi all'Université Paris 13, con una borsa finanziata dalla FSMP (*Fondation Sciences Mathématiques de Paris*).
- Reporter per l'archivio Mathscinet dell' American Mathematical Society (13 report effettuati)

- Webmaster dell'*équipe PMEDP* del laboratorio LAGA - Université Paris 13

ATTIVITÀ DIDATTICHE

Sono entrato in servizio all'Université Paris 13 come *maître de conférences* nel settembre 2012. Durante i primi due anni ho usufruito du una riduzione del carico didattico *jeune MCF* effettuando quindi 128 htd[1] all'anno. Negli anni successivi ho effettuato almeno l'intero carico didattico previsto (ovvero 192 htd). Piu' precisamente ho svolto 195 htd di lezione nel A.A. 2014/2015, 210 htd nel A.A. 2015/2016 e ne sto svolgendo 215 nell'A.A. 2016/2017 in corso.

Riguardo al tipo di lezioni effettuate, si tratta soprattutto di corsi e *TD* (*Travaux Dirigés*, ovvero delle esercitazioni) per la *Licence* (laurea triennale) di Matematica, Informatica, Ingegneria e Biologia, e all'interno del *Cursus Préparatoire Intégré de l'école d'ingénieur SupGalilée de l'Université Paris 13*[2]. Tuttavia ho anche avuto l'occasione di intervenire nel *Master* (Laurea Specialistica) per delle esercitazioni di *Distribuzioni* e di *Varietà differenziali*.

Seguono i dettagli delle lezioni effettuate sinora.

A.A. 2016/2017 in corso, Université Paris 13 (MCF) (215 htd):

- TD "Variétés différentiables" M1 math (18 htd)
- TD "Analyse 2" L2 Science pour l'Ingegnieur (36 htd)
- Corso e TD "Introduction aux structures mathématiques" L1 tronc commun (70.5 htd)
- TD "Analyse 1A" L1 tronc commun (57 htd)
- Corso e TD "Équations différentielles" Cursus préparatoire intégré, 2ème année (45 htd)

A.A. 2015/2016, Université Paris 13 (MCF) (204 htd insegnate + 6 ore di *congé paternité*):

- TD "Variétés différentiables" M1 math (18 htd)
- TD "Analyse 2" L2 Science pour l'Ingegnieur (36 htd)
- Corso e TD "Mathémathiques 3" Cursus préparatoire intégré, 2ème année (32,5 htd)
- Corso e TD "Introduction aux structures mathématiques" L1 tronc commun (70.5 htd)
- Corso e TD "Équations différentielles" Cursus préparatoire intégré, 2ème année (45 htd)

Année 2014/2015, Université Paris 13 (MCF) (195 htd):

- TD "Analyse 2" L2 Science pour l'Ingegnieur (36 htd)
- Corso e TD "Mathémathiques 3" Cursus préparatoire intégré, 2ème année (32,5 htd)
- TD "Analyse 3" L2 math/info (58.5 htd)
- Corso e TD "Équations différentielles" Cursus préparatoire intégré, 2ème année (45 htd)
- TD "Mathématiques 1 et 2" STI2D (20.5 htd)

Année 2013/2014, Université Paris 13 (MCF, 128 htd):

- TD "Analyse 2" L2 Science pour l'Ingegnieur (36 heures)
- Corso e TD "Mathémathiques 3" Cursus préparatoire intégré, 2ème année (32,5 htd)

[1] Un'*heure équivalent TD* (htd) equivale a un'ora effettiva di insegnamento per delle esercitazioni o a 40 minuti per un corso magistrale.

[2] Il *Cursus Préparatoire* sono i due anni che preparano all'accesso alle Grandes Écoles (tramite concorso o selezione su titoli)

- TD “EDP et distributions” M1 math (13.5 heures)
- Corso e TD “Analyse Hilbertienne” Cursus préparatoire intégré, 2ème année (45 htd)

A.A. 2012/2013, Université Paris 13 (MCF, (133,5 htd):

- TD “Analyse 2” L2 Science pour l’Ingegnieur (36 heures)
- TD “Intégration et probabilités” L3 Mathématiques (78 heures)
- TD “EDP et distributions” M1 math (19.5 heures)

A.A. 2011/2012, Université de Cergy-Pontoise:

- TD MS4C Bilingue” (Probabilità, esercitazioni effettuate in inglese, 24 ore)

A.A. 2008/2009, Università degli Studi dell’Insubria - Como. Esercitazioni (*Seminari didattici*) per i corsi di

- “Analisi Matematica I” (10 ore)
- “Analisi Matematica II” (10 ore)

A.A 2007/2008, Università degli Studi dell’Insubria - Como. Esercitazioni (*Seminari didattici*) per il corso di

- “Analisi Matematica I” (10 ore)

A.A. 2006/2007, Università degli Studi dell’Insubria - Como. Tutorato per i corsi di Calcolo II et Geometria (25 ore)

ATTIVITÀ DI RICERCA

Temi di ricerca

- Varietà con bordo
- Corpi convessi e immersioni convesse di superfici
- Mappe armoniche e loro generalizzazioni (p-armoniche, f-armoniche,...)
- Solitoni di Ricci
- Equazioni ellittiche non-lineari e semi-lineari su varietà riemanniane
- Disuguagliaze di Sobolev su varietà

Riassunto

Nella tesi di dottorato, discussa a Milano nel febbraio 2011, ho studiato alcuni problemi relativi alla caratterizzazione dei rappresentanti p-armonici in una classe d’omotopia di mappe tra varietà riemanniane fissata, in particolare quando la varietà d’arrivo ha curvatura sezionale negativa. Ricordiamo che una mappa $u : M \to N$ tra due varietà riemanniane M e N è detta p-armonica se è un punto stazionario C^1-regolare della p-energia $E_p(u) = \int_M |du|^p$ rispetto a variazioni della mappa definite sulla varietà d’arrivo. Quando $p = 2$ una mappa p-armonica è detta semplicemente armonica[3]. In tutti i risultati della tesi, le mappe considerate son definite su varietà complete, solitamente non compatte, e senza bordo. In questo contesto, sono stati ottenuti in particolare

[3]In letteratura si trovano diverse altre nozioni simili alla (p-)armonicità, alcune delle quali menzionate nel seguito: mappe p-minimizzanti, p-stazionarie, debolmente p-armoniche, ...; [HW08]

risultati d'esistenza e di trivialità del rappresentante p-armonico, oltre alla caratterizzazione del rappresentante in certi casi in cui questo non è unico.

Una parte dei problemi affrontati in seguito rappresenta uno sviluppo naturale di questa linea di ricerca, ossia l'analisi delle mappe armoniche tra varietà. Questo studio ha preso più direzioni differenti.

In collaborazione con Stefano Pigola abbiamo studiato il caso di mappe armoniche definite su una varietà compatta con bordo. In particolare, ci siamo interessati all'esistenza (e l'eventuale unicità) di una soluzione regolare $u \in C^{1,\alpha}$ al problema di Dirichlet per mappe (p-)armoniche in una classe di omotopia assegnata (relativa al bordo). Nell'ordine, abbiamo risolto questo problema quando N è

- compatta con curvatura sezionale negativa;
- semplicemente connessa con curvatura negativa (quindi non compatta) e bidimensionale o rotazionalemente simmetrica;
- una bolla geodetica su cui la funzione "distanza dal centro al quadrato" è convessa.

Per N di curvatura negativa abbiamo anche ottenuto un risultato generale di unicità.

Riguardo alla regolarità delle mappe, in collaborazione con Aaron Naber e Daniele Valtorta abbiamo adattato al caso p-armonico la tecnica detta *stratificazione quantitativa* introdotta da A. Naber e J. Cheeger, [CN13] al fine di stimare il contenuto di Minkowski dell'insieme dei punti del dominio in cui una mappa, p-minimizzante o p-stazionaria, è singolare (cioè non continua).

Un'altra possibile generalizzazione delle mappe armoniche sono le mappe f-armoniche, introdotte da A. Lichnerowicz nel caso di varietà compatte, [Lic77]. Si tratta di punti stazionari dell'energia quando la densità di energia $|du|^2$ é integrata rispetto a una misura pesata su M (assolutamente continua rispetto alla misura di volume riemanniano). In collaborazione con Michele Rimoldi abbiamo generalizzato alle mappe f-armoniche (una parte de) la teoria delle mappe armoniche di R. Schoen e S.-T. Yau, [SY97]. I risultati astratti ottenuti si applicano allo studio dei solitoni di Ricci (ovvero le soluzioni di un flusso di Ricci costanti a meno di diffeomorfismi) di tipo gradiente, dando condizioni topologiche necessarie all'esisitenza.

Qualche anno dopo abbiamo proseguito lo studio dei solitoni di Ricci chiedendoci se ogni solitone di Ricci ammetta una struttura di solitone di tipo gradiente. Nel caso di solitoni di Ricci compatti, una risposta completa a questo problema era stata data da G. Perelman, [Per03]. Nel caso noncompatto, invece, erano noti solo risultati parziali, dovuti indipendentemente a A. Naber e Q. Zhang [Nab10, Zha12]. Con M. Rimoldi abbiamo migliorato il risultato di Zhang, dimostrando che ogni solitone contrattivo è di tipo gradiente, sotto delle ipotesi spettrali, di curvatura limitata e di non-degenerazione del raggio di iniettività.

Altri lavori svolti in parallelo nello stesso periodo, seppur non direttamente connessi alle mappe armoniche, si basano anch'essi sullo studio di alcune equazioni ellittiche non-lineari su varietà riemanniane.

Insieme con Stefano Pigola abbiamo ottenuto un teorema di Liouville L^p per soluzioni di un equazione di tipo Simon-Bochner. L'applicazione più importante di questo teorema consente di ottenere una dimostrazione analitica del fatto ben noto per cui ogni sotto-varietà minimale di $\mathbb{R}^n$ in co-dimensione 1 che ha curvatura totale finita è necessariamente un iperpiano.

In un lavoro in collaborazione con Emmanuel Hebey, effettuato durante il mio post-doc all'Université de Cergy-Pontoise, abbiamo studiato un'equazione semi-lineare su di una varietà compatta, che nasce dalle equazioni di vincolo di Einstein nel contesto della teoria di Einstein-Maxwell con costante cosmologica. Questo lavoro contiene risultati di esistenza e di stabilità delle soluzioni.

L'approccio all'analisi geometrica intrapreso dalla comunità matematica negli ultimi anni è sempre più legato all'analisi di (e su) spazi metrici più generali, e in particolare spazi non lisci. Questo interesse si riscontra nell'attenzione crescente per le nozioni di curvatura per spazi metrici. Innanzitutto, le nozioni di curvatura limitata nel senso di Alexandrov o di Busemann, introdotte già da parecchi decenni, sono sempre più conosciute e capite. Inoltre, nuove definizioni di curvatura sono state proposte di recente, come per esempio le varie nozioni metriche di curvatura di Ricci, e si sono talvolta rivelate molto utili. Nell'ultimo periodo mi sono quindi rivolto verso la geometria metrica, con l'obiettivo di capire meglio la natura delle varietà singolari, quali le varietà a bordo o le varietà topologiche munite di una struttura metrica non liscia (in particolare in presenza di un controllo sulla curvatura di Alexandrov).

Con François Fillastre abbiamo definito e analizzato una nuova classe di ipersuperfici convesse non compatte dello spazio euclideo, munendo quest'ultimo della sua struttura minkowskiana canonica. Come nel caso classico dei corpi convessi omeomorfi alla sfera, per queste ipersuperfici si possono introdurre diverse nozioni, in generale singolari, di curvatura, tra cui la *prima misura d'area*. Il problema di Christoffel consiste nel cercare un insieme convesso la cui prima misura d'area è data. Nella seconda parte del nostro lavoro abbiamo quindi risolto il problema di Christoffel per gli F-convessi.

Come è ben noto, un'ipersuperficie convessa di $\mathbb{R}^n$ ha curvatura positiva nel senso di Alexandrov, e viceversa ogni metrica di curvatura strattamente positiva sulla sfera bidimensionale ammette un embedding isometrico convesso in $\mathbb{R}^3$. In un lavoro successivo, svolto in collaborazione anche con Ivan Izmestiev, abbiamo generalizzato questo risultato dimostrando che ogni superficie compatta di curvatura minorata da k nel senso di Alexandrov ammette un embedding isometrico convesso in uno spazio di forma di curvatura costante k. In effetti, il caso delle metriche sul toro di curvatura > -1 era l'unico a restare irrisolto.

Con Stefano Pigola abbiamo studiato le varietà riemanniane a bordo, domandandoci quanto sia fedele l'intuizione che le dipinge come "pezzi" di varietà senza bordo. In particolare abbiamo dimostrato che questa interpretazione è giusta quando si richiede solo la completezza della metrica, mentre delle ostruzioni inaspettate posso talvolta comparire se si richiede che l'estensione rispetti una stessa condizione di curvatura (del tipo Curv $\geq C$) che la varietà a bordo originaria.

Tra i numerosi problemi ancora aperti vi sono:

- l'esistenza di estensioni riemanniane in presenza di alcuni vincoli di curvatura non ancora analizzati, come per esempio estensioni con magioranti o minoranti non nulli per la curvatura sezionale;
- nei casi in cui risulta impossibile un'estensione che mantenga le stesse proprietà d curvatura della varietà con bordo originaria, quantificare quanta curvatura si è costretti a "perdere" nel processo di estensione;
- il problema dell'estensione riemanniana sotto vincoli che non siano né di completezza né di curvautura (come crescite dei volumi, proprietà spettrali, etc.).

Prossimamente vorremmo in particolare studiare il caso di condizioni "rigide" di curvaura. Ci si chiede per esempio se una varietà riemanniana con bordo con curvatura sezionale costante ammetta un'estensione che soddisfi la stessa proprietà di curvatura, cercando eventualemente di caratterizzare la/le estensione/i. Un problema analogo riguarda l'estensione per metriche di tipo Einstein. Per questo studio, ci proponiamo di utilzzare tecniche analitiche (per esempio teoremi di continuazione unica per il sistema di equazioni soddisfatto dalla metrica a causa della condizione di curvatura), così come risultati strutturali (come la classificazione di metriche piatte o iperboliche).

Riferimenti bibliografici

[CN13] Jeff Cheeger and Aaron Naber. Quantitative stratification and the regularity of harmonic maps and minimal currents. *Comm. Pure Appl. Math.*, 66(6):965–990, 2013.

[Gro14] Misha Gromov. Dirac and Plateau billiards in domains with corners. *Cent. Eur. J. Math.*, 12(8):1109–1156, 2014.

[HW08] Frédéric Hélein and John C. Wood. Harmonic maps. In *Handbook of global analysis*, pages 417–491, 1213. Elsevier Sci. B. V., Amsterdam, 2008.

[Lic77] André Lichnerowicz. *Geometry of groups of transformations*. Noordhoff International Publishing, Leyden, 1977. Translated from the French and edited by Michael Cole.

[Nab10] Aaron Naber. Noncompact shrinking four solitons with nonnegative curvature. *J. Reine Angew. Math.*, 645:125–153, 2010.

[Per03] G. Perelman. The entropy formula for the Ricci flow. arXiv:math/0211159v1, 2003.

[Sor03] C. Sormani. Scalar curvature and intrinsic flat convergence. arXiv:1606.08949, 2003.

[SY97] R. Schoen and S. T. Yau. *Lectures on harmonic maps*. Conference Proceedings and Lecture Notes in Geometry and Topology, II. International Press, Cambridge, MA, 1997.

[Zha12] Qi S. Zhang. Extremal of log Sobolev inequality and W entropy on noncompact manifolds. *J. Funct. Anal.*, 263(7):2051–2101, 2012.