Les mesures d'aire lorentziennes et le problème de Christoffel

Giona Veronelli

Université Paris 13 - Institut Galilée
LAGA

en collaboration avec François Fillastre
(Université de Cergy-Pontoise)

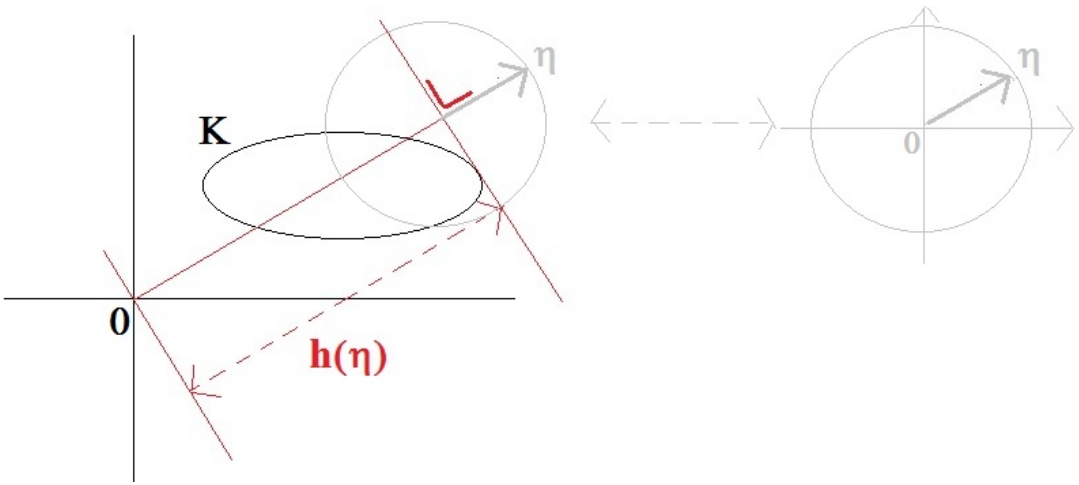
Séminaire Géométrie, EDP et Physique Mathématique

Plan

1. Théorie classique des corps convexes
2. Problèmes de courbure prescrite
3. Ensembles F-convexes
4. Mesures d'aire lorentziennes
5. Le problème de Christoffel
   - Cas fuchsien
   - Cas quasi-fuchsien
   - Cas $d = 1$
6. Problèmes et Perspectives

Théorie classique des corps convexes

$$\{\textit{corps convexes}\} = \{\textit{ensembles convexes compacts de } \mathbb{R}^{d+1}\}$$



Un corps convexe K est décrit par ses fonctions de support :

- restreinte $h_K : \mathbb{S}^d \to \mathbb{R}$, $h_K(\eta) := \max_{x \in K} \langle x, \eta \rangle_+$
- étendue $H_K : \mathbb{R}^{d+1} \to \mathbb{R}$, $H_K(\eta) := \max_{x \in K} \langle x, \eta \rangle_+$

où

- $\langle \cdot, \cdot \rangle_+$ produit scalaire Euclidien habituel
- Identification canonique $\mathbb{S}^d \hookrightarrow \mathbb{R}^{d+1}$

Remarques.

- H_K est 1-homogène, c'est à dire $H_K(\eta) = |\eta| H_K(\eta/|\eta|) = |\eta| h_K(\eta/|\eta|)$

- H_K et h_K sont continues.

- Soit $H : \mathbb{R}^{d+1} \to \mathbb{R}$ 1-homogène :

  H est fonction de support étendue d'un convexe

$\Leftrightarrow$ H est convexe

$\Leftrightarrow$ H est sous-linéaire, i.e. $H(x+y) \leq H(x) + H(y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}^{d+1}$

- Si $H_K \in C^2$ alors

  H_K est convexe $\Leftrightarrow$ $^{\mathbb{R}^{d+1}}\operatorname{Hess} H_K \geq 0 \Leftrightarrow \nabla^2_{\mathbb{S}^d} h_K + g_{\mathbb{S}^d} h_K \geq 0$,

  où $\nabla^2_{\mathbb{S}^d}$ est l'Hessienne sur $\mathbb{S}^d$.

Exemples :

- $K = \{p\}$ pour $p \in \mathbb{R}^{d+1}$

$\Rightarrow$ $H_{\{p\}}(\eta) = \langle p, \eta \rangle_+$ fonction convexe (linéaire) de $\mathbb{R}^{d+1}$.

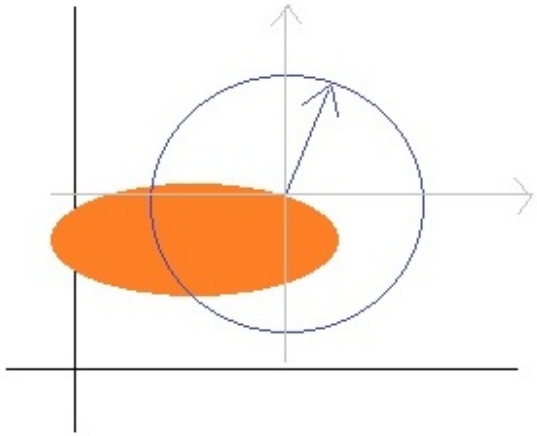
- $K = \overline{B(0,t)} \subset \mathbb{R}^{d+1} \Rightarrow h_K \equiv t$, $H_K(\eta) = t|\eta|$

Remarques.

- Si K est lisse et strictement convexe

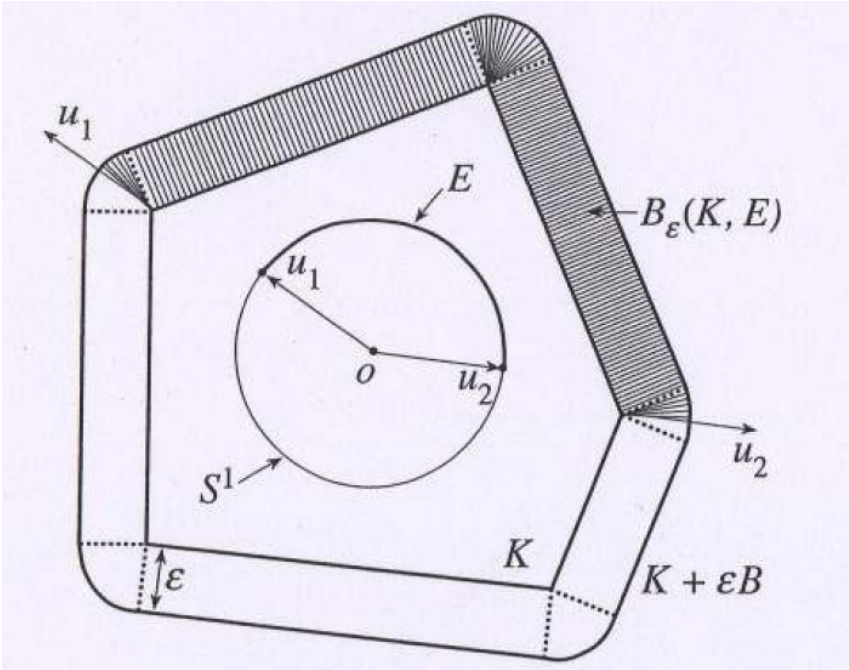
$\Rightarrow$ il y a un homéomorphisme $G_K : \partial K \to \mathbb{S}^d$ (application de Gauss).

- $G_K(x)$ est la normale à K au point $x \in \partial K$



- En général G_K est une fonction multivaluée

Mesures d'aire



1

Soit K corps convexe et $E \subset \mathbb{S}^d$ un borélien de $\mathbb{S}^d$. On définit :

- P_K la projection orthogonale sur K et

$$B_\epsilon(K, E) := \left\{ x \in \mathbb{R}^{d+1} : d_{\mathbb{R}^{d+1}}(x, P_K(x)) \leq \epsilon, \ \frac{x - P_K(x)}{|x - P_K(x)|} \in E \right\}$$

[1] dessin par R. Gardner, *Geometric Tomography*

Proposition (Fenchel-Jensen'38)

Le volume de $B_\epsilon(K, E)$ est un polynôme en ϵ de dégré $d+1$.

Déf. À une constante près, ses coefficients sont notés $S_i(K, E)$

$$V(B_\epsilon(K, E)) = \sum_{i=0}^{d} \frac{1}{d+1} \binom{d+1}{i} S_i(K, E) \epsilon^{d+1-i}.$$

- $S_i(K, \cdot)$ est une mesure de Radon (borélienne + localement finie + intérieurement régulière) sur $\mathbb{S}^d$
- $S_i(K, \cdot)$ est dite *mesure d'aire d'ordre i*.
- **Rmq.** $S_0(K, \cdot) = \mathrm{d}\mathbb{S}^d$ est la mesure de volume canonique sur la sphère $\mathbb{S}^d$.

Cas régulier :

- K est lisse $\Rightarrow$ on peut définir ses *courbures principales* $\lambda_1, \dots, \lambda_d$.
- Si K est strictement convexe ($\Rightarrow \lambda_i > 0$), les *rayons de courbure* sont $r_i := \lambda_i^{-1}$.
- Soit h_K fonction de support restreinte

$\Rightarrow$ $r_i(K)$ sont les valeurs propres de $\nabla^2_{\mathbb{S}^d} h_K + h_K g_{\mathbb{S}^d}$.

- $s_j(K)$ fonctions symétriques élémentaires des r_i

$\Rightarrow$ $S_j(K, \cdot) = s_j(K) \mathrm{d}\mathbb{S}^d$

Exemples :

- $S_d(K, \cdot) = \det(\nabla^2_{\mathbb{S}^d} h_K + h_K g_{\mathbb{S}^d}) = \prod_{i=1}^d r_i$ est (l'inverse de) la courbure de Gauss
- $S_1(K, \cdot) = \frac{1}{d} \operatorname{tr}(\nabla^2_{\mathbb{S}^d} h_K + h_K g_{\mathbb{S}^d}) = \frac{1}{d} \Delta_{\mathbb{S}^d} h_K + h_K = \frac{1}{d} \sum_{i=1}^d r_i$ est dite *rayon moyen de courbure*.

Cas polyédral :

- $S_d(K, \cdot)$ est donnée par l'aire des facettes (i.e. les $(d-1)$-faces du bord)
- $S_1(K, \cdot)$ est donnée par la longueur des arêtes

Problèmes classiques

Problème de Minkowski : où l'on prescrit la d-ème mesure d'aire $S_d(K, \cdot)$ [Minkowski(1897),Alexandrov'37].

- Cas régulier : problème de courbure de Gauss prescrite. Étant donnée $0 < \varphi : \mathbb{S}^d \to \mathbb{R}$, trouver $h \in C^2(\mathbb{S}^d, \mathbb{R})$ t.q.

$$\begin{cases} \det(\nabla^2_{\mathbb{S}^d} h + h g_{\mathbb{S}^d}) = \varphi \\ \nabla^2_{\mathbb{S}^d} h + h g_{\mathbb{S}^d} > 0 \qquad \text{au sens des formes quadratiques} \end{cases}$$

  [Pogorelov,Nirenberg,Cheng-Yau]

- Cas polyédral : où l'on prescrit l'aire des facettes [Minkowski]

Problème de Christoffel : où l'on prescrit la 1ère mesure d'aire $S_1(K,\cdot)$ [Christoffel(1865),Hilbert(1912)]

- Cas régulier : problème de rayon moyen de courbure prescrit. Étant donnée $0 < \varphi : \mathbb{S}^d \to \mathbb{R}$, trouver $h \in C^2(\mathbb{S}^d)$ t.q.

$$\begin{cases} \frac{1}{d}\Delta_{\mathbb{S}^d} h + h = \varphi \\ \nabla^2_{\mathbb{S}^d} h + h g_{\mathbb{S}^d} > 0 \end{cases} \qquad \text{au sens des formes quadratiques}$$

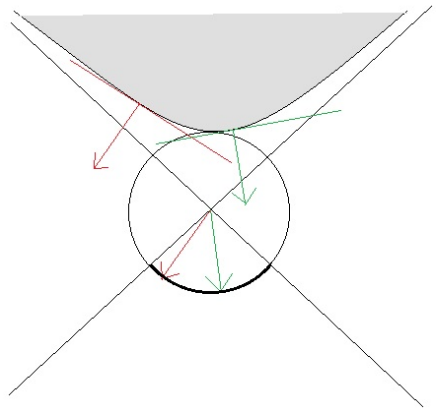
  [Firey'67]
- Cas polyédral : où l'on prescrit la longueur des arêtes [Zelver'70,Firey'70,Schneider'77]
- Cas géneral : étant donné une mesure de Radon μ sur $\mathbb{S}^d$, trouver K corps convexe ($h \in C^0(\mathbb{S}^d)$) t.q. $S_1(K,\cdot) = \mu$. [Firey'68, Berg'69]

Problème de Minkowski-Christoffel (régulier) : où l'on prescrit la j-ème mesure d'aire $S_j(K,\cdot)$, $1 < j < d$. Résultats partiels par [Goody-Schneider'80,Guan-Ma'03,-Lin'06,-Zhou'06]

Problème

Comment faire quand le corps convexe n'est pas compact ?

Exemple. L'hyperboloide $\{1 \leq x_{d+1}^2 - x_1^2 + \cdots + x_d^2,\ x_d > 0\}$



- Sa fonction de support est définie sur un ouvert de $\mathbb{S}^d$

$\Rightarrow$ e.g. problèmes de conditions au bord.

Idée. [Sovertkov'81] Pour une certaine classe d'ensembles convexes de $\mathbb{R}^{d+1}$ il est plus utile de considerer sur $\mathbb{R}^{d+1}$ la métrique minkowskienne

- $(\mathbb{R}^{d+1}, \langle , \rangle_{-})$ où

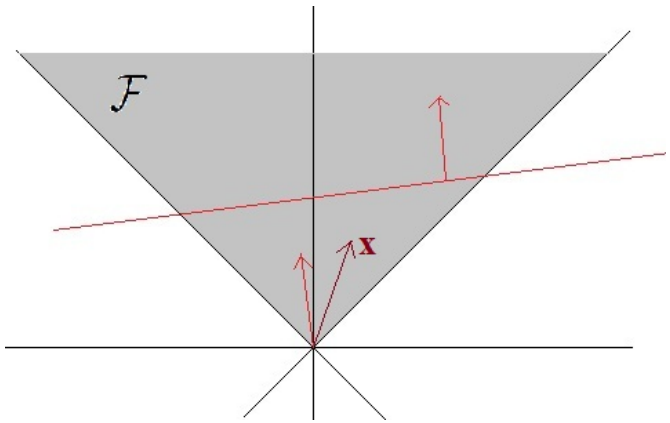
$$\langle x, y \rangle_{-} = x_1 y_1 + \cdots + x_d y_d - x_{d+1} y_{d+1}$$

- On définit

$$\mathcal{F} = \{x \in \mathbb{R}^{d+1} | \langle x, x \rangle_{-} < 0, x_{d+1} > 0\}$$

et pour tout $x \in \mathcal{F}$,

$$|x|_{-} = \sqrt{-\langle x, x \rangle_{-}}$$



- Un vecteur $x \in \mathcal{F} \subset \mathbb{R}^{d+1}$ est dit *vecteur futur de type temps*.
- Un hyperplan de $\mathbb{R}^{d+1}$ est dit *de type espace* si son vecteur normal est de type temps.

Ensembles F-convexes

Définition

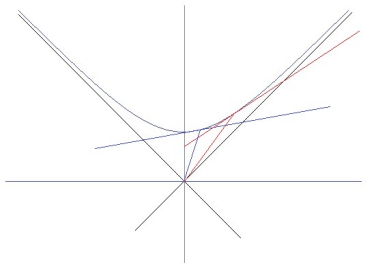
Un ensemble convexe K de $\mathbb{R}^{d+1}$ est dit F-convexe ("convexe futur") si

i) *il est donné comme intersection des demi-espaces futurs engendrés par une famille d'hyperplans de type espace*

ii) *tout vecteur de type temps est un vecteur normal à ∂K*

Ici,

- $\mathbb{H}^d = \{x_1^2 + \cdots + x_d^2 - x_{d+1}^2 = -1,\ x_d > 0\}$ est plongé dans $(\mathbb{R}^{d+1}, \langle , \rangle_-)$



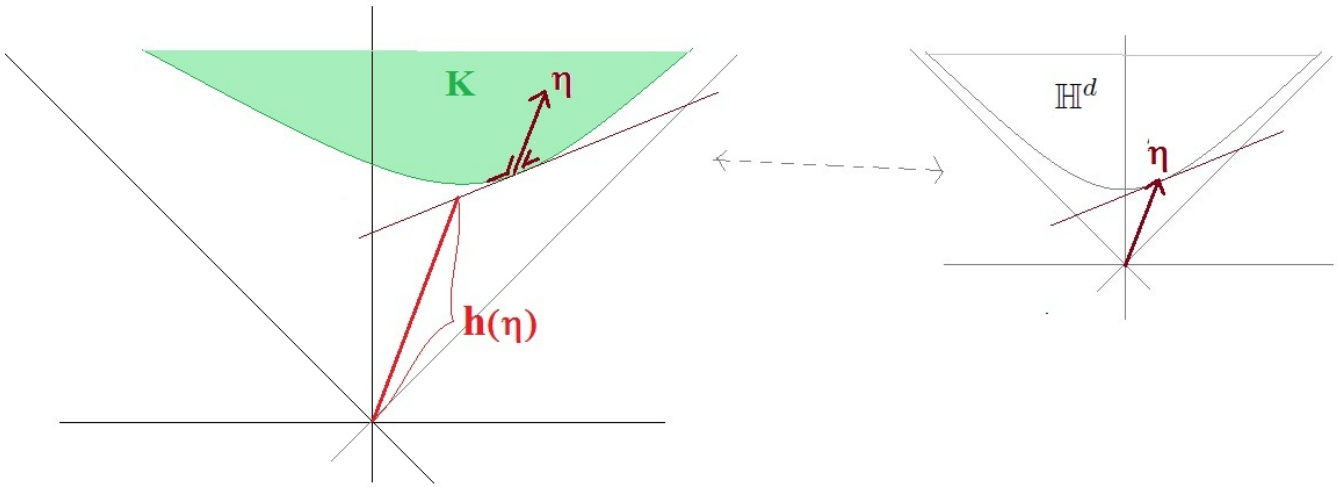
$\Rightarrow$ les vecteurs unitaires futurs de type temps sont (tous les) éléments de $\mathbb{H}^d$

- ii) $\Leftrightarrow$ l'application de Gauss lorentzienne $G_K : \partial K \to \mathbb{H}^d$ est surjective. **Attention :** en général G_K est multivaluée.

Fonctions de supports lorentziennes

Soit K ensemble F-convexe. Alors on peut definir ses *fonctions de support*

- *restreinte* $h_K : \mathbb{H}^d \to \mathbb{R}$, $h_K(\eta) := \max_{x \in K} \langle x, \eta \rangle_-$
- *etendue* $H_K : \mathcal{F} \subset \mathbb{R}^{d+1} \to \mathbb{R}$, $H_K(\eta) := \max_{x \in K} \langle x, \eta \rangle_-$



- H_K est convexe
- H_K est extension 1-homogène de h_K, i.e. $H_K(\eta) := |\eta|_- h_K(\eta/|\eta|_-)$

- $H : \mathcal{F} \subset \mathbb{R}^{d+1} \to \mathbb{R}$ 1-homogène est

  convexe $\Leftrightarrow$ sous-linéaire,

  i.e. $H(x+y) \leq H(x) + H(y),\ \forall x, y \in \mathcal{F}$

- Si $H \in C^2(\mathcal{F})$ est 1-homogène

Lemme

$\forall X, Y \in T_\eta \mathbb{H}^d$,

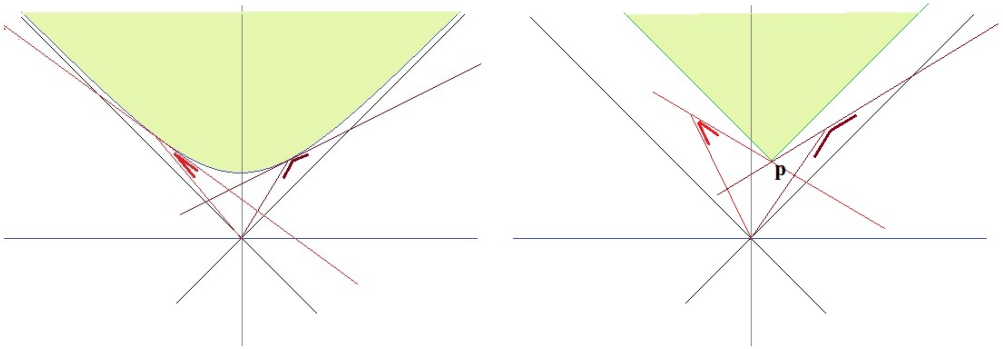
$$^{\mathbb{R}^{d+1}}\operatorname{Hess} H(X,Y) = \nabla^2_{\mathbb{H}^d} h(X,Y) - h g_{\mathbb{H}^d}(X,Y).$$

- alors H_K est convexe $\Leftrightarrow$ $^{\mathbb{R}^{d+1}}\operatorname{Hess} H_K \geq 0$

$\Leftrightarrow$ $\nabla^2_{\mathbb{H}^d} h_k - g_{\mathbb{H}^d} h_k \geq 0$

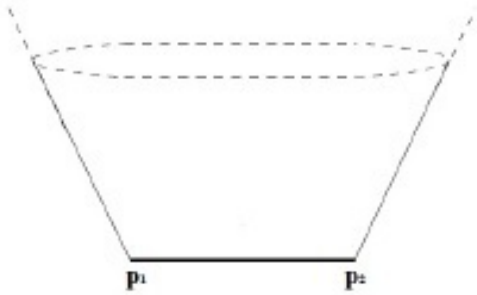
Exemples

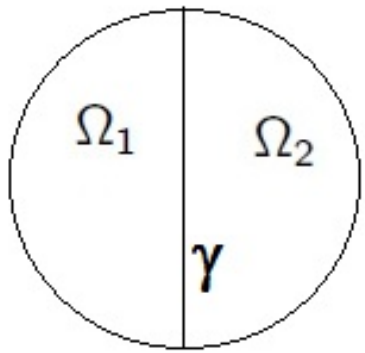
- Le côté convexe de $\mathbb{H}^d \subset \mathbb{R}^{d+1}$: $h_K(\eta) \equiv -1$. $H_K(\eta) = -|\eta|_-$



- Le cône future d'un point $p \in \mathbb{R}^{d+1}$ a $H_K(\eta) = \langle p, \eta \rangle_-$
- $p = (0, \ldots, 0, 0) \Rightarrow h_K \equiv H_K \equiv 0$.
- $p = (0, \ldots, 0, 1) \Rightarrow h_K(\eta) = \cosh(d_{\mathbb{H}^d}(\eta, p))$.
-

$$H_K(\eta) = \begin{cases} \langle p_1, \cdot \rangle & \text{on } \Omega_1 \\ \langle p_2, \cdot \rangle & \text{on } \Omega_2 \end{cases}$$





Ensembles convexes (quasi-)Fuchsiens

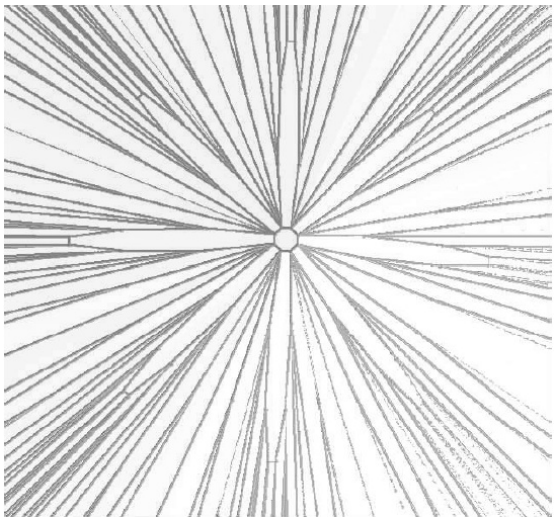
- Un *groupe Fuchsien* est un groupe cocompact Γ_0 d'isométries linéaires de l'espace de Minkowski.
  Γ_0 agit sur $\mathbb{H}^d$ et $\mathbb{H}^d/\Gamma_0$ est une variété hyperbolique compacte.

$\Rightarrow$ Un ensemble convexe Fuchsien K est un F-convexe Γ_0-invariant

$\Rightarrow$ sa fonction de support $h_K : \mathbb{H}^d/\Gamma_0 \to \mathbb{R}$.

Exemples.

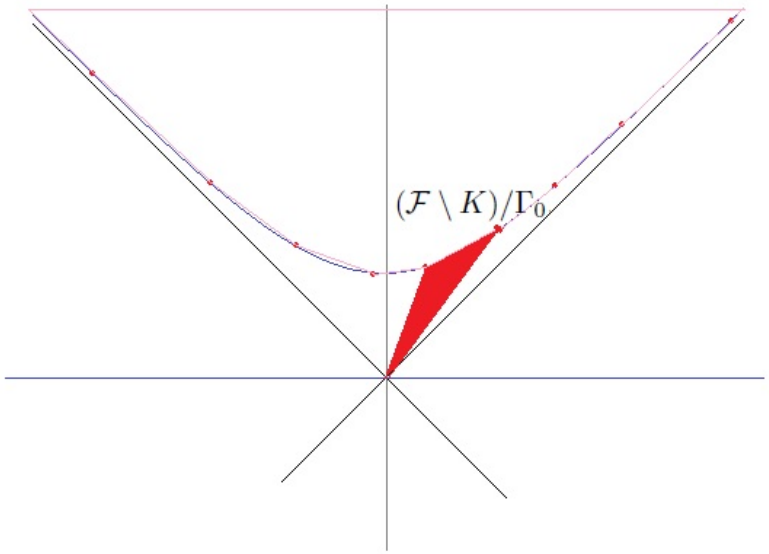
- $\mathbb{H}^d$ est un ensemble Γ_0-convexe pour tout groupe Fuchsien Γ_0
- Soit $p \in \mathcal{F}$. Alors l'enveloppe convexe de $\Gamma_0 \cdot p$ est un Γ_0-convexe.



Ici, Γ_0 agit sur $\mathbb{H}^2$ avec domaine fondamental octaédral.[2]

[2] Dessin par [Fillastre,GAFA]

- K convexe Fuchsien (pour Γ_0)



Alors K a covolume fini : $\mathrm{covol}_{\Gamma_0} K = \mathrm{vol}(\mathcal{F} \setminus K)/\Gamma_0$ et

$$V_\epsilon^{\Gamma_0}(K, \mathbb{H}^d/\Gamma_0) = \mathrm{covol}_{\Gamma_0}(K_\epsilon) - \mathrm{covol}_{\Gamma_0}(K).$$

Remarque. Les convexes Fuchsiens sont l'analogue des corps convexes compacts :

on peut reproduire la théorie des volumes mixtes, la théorie de Brunn-Minkowski, etc. [Fillastre,GAFA]

- Un *groupe quasi-Fuchsien* est un groupe Γ_τ d'isométries de l'espace de Minkowski t.q. $\exists$
  - un groupe Fuchsien Γ_0
  - une application $\tau : \Gamma_0 \to \mathbb{R}^{d+1}$, dite *cocycle*.
  - un isomorphisme $\Gamma_0 \to \Gamma_\tau$ t.q. $\gamma_0 \mapsto \gamma : \gamma \cdot x = \gamma_0 \cdot x + \tau_{\gamma_0}$.

$\Rightarrow$ Un ensemble convexe quasi-Fuchsiens K est un F-convexe Γ_τ-invariant

Exemples.

- Des domaines quasi-Fuchsiens ont été construits par [Mess'07('90)] ($d = 2$), [Bonsante'05] ($d > 2$)
- L'intérêt vient de la rélativité générale : les revêtements universels des espaces-temps MGHC (Maximal Globally Hyperbolic spatially Compact), complets vers le future et plats, sont plongés dans l'espace de Minkowski en domaines quasi-Fuchsiens. [Mess'07('90), Barbot'05, Bonsante'05,...]

Objectif : Problèmes de courbure prescrite pour les F-convexes.

Problème : Bonnes définitions des courbures (mesures d'aires).

Idée : utiliser la même approche

Corps convexes compacts	Ensembles F-convexes
$(\mathbb{R}^{d+1}, \langle , \rangle_+)$	$(\mathbb{R}^{d+1}, \langle , \rangle_-)$
$h_K : \mathbb{S}^d \to \mathbb{R}$	$h_K : \mathbb{H}^d \to \mathbb{R}$
2ème forme fondamentale	2ème forme fondamentale (lorentzienne)
$\Downarrow$	$\Downarrow$
$\mathrm{Hess}\, H_K\|_{\mathbb{S}^d} = \nabla^2_{\mathbb{S}^d} h_K + h_K \langle , \rangle_+$	$\mathrm{Hess}\, H_K\|_{\mathbb{H}^d} = \nabla^2_{\mathbb{H}^d} h_K - h_K \langle , \rangle_-$
$\|x+y\|_+ \leq \|x\|_+ + \|y\|_+$	$\|x+y\|_- \geq \|x\|_- + \|y\|_-$
$\sin, \cos, \ldots$	$\sinh, \cosh, \ldots$
compacité, volume fini	?

Cas spéciaux :

- K régulier

Alors on définit le rayons de courbure (lorentziens)

$$\{r_i(K)|_x\} = \{\text{valeurs propres de } \nabla^2_{\mathbb{H}^d} h_K - h_K g_{\mathbb{H}^d}\}$$

et

$$S_j(K) = j\text{-ème fonction symétrique élémentaire des } r_i(K).$$

- K un polyèdre

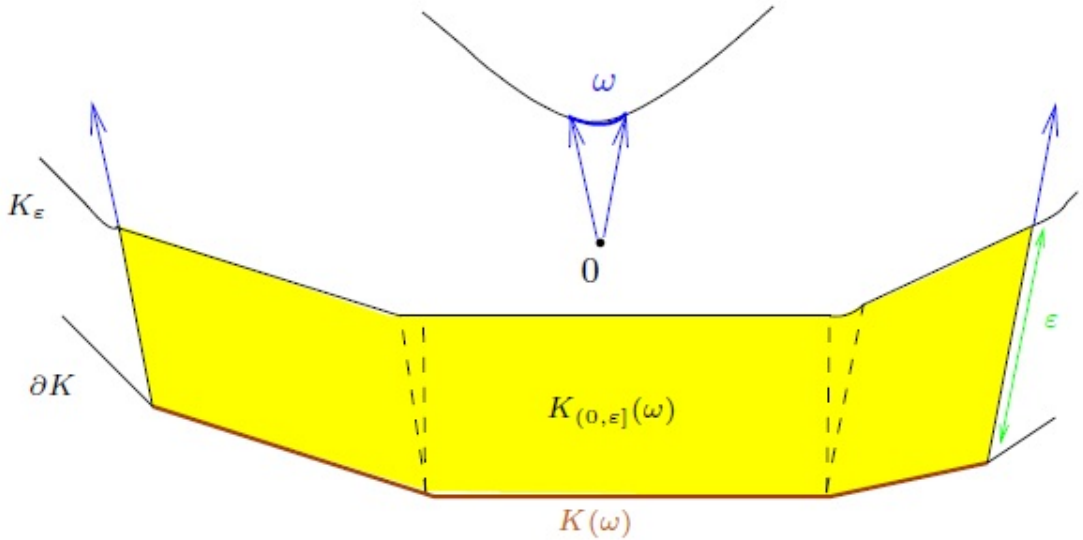
D'après [Zelver'70,Firey'70] on peut caractériser les mesures d'aire en terme des aires des faces.

$$S_j(P,\omega) = \binom{d}{j}^{-1} \sum_{e_j} \lambda_j(e_j)\nu_{d-j}(\omega \cap G_P(e_j)).$$

où

- la somme est sur les j-faces e_j de P
- $\lambda_j(e_j)$ est le volume j-dimensionnel de e_j
- ν_n est la mesure d'Hausdorff n-dimensionnelle sur $\mathbb{H}^d$.

Soit $\omega \subset \mathbb{H}^d$ borélien



Rmq. Dans les cas polyédral et régulier on a

$$V_\epsilon(K,\omega) := \mathrm{Vol}(K_{[0,\epsilon)}(\omega)) = \frac{1}{d+1}\sum_{i=0}^{d} \epsilon^{d+1-i}\binom{d+1}{i} S_i(K,\omega).$$

En fait :

- on peut construire explicitement $K_{(0,\epsilon]}(\omega)$
- on sait calculer l'aire de $K_{\{t\}}(\omega)$

Mesures d'aire Lorentziennes

Théorème

Soit $K \subset \mathbb{R}^{d+1}$ ensemble F-convexe. Il existe des mesures de Radon $S_0(K,\cdot),\dots,S_d(K,\cdot)$ sur $\mathbb{H}^d$ t.q., pour tout ω borélien de $\mathbb{H}^d$ et tout $\epsilon > 0$,

$$V_\epsilon(K,\omega) = \frac{1}{d+1}\sum_{i=0}^{d} \epsilon^{d+1-i}\binom{d+1}{i} S_i(K,\omega).$$

Définition. $S_i(K,\cdot)$ est dite *mesure d'aire (Lorentzienne) d'ordre i* de K.

Démonstration.

- K fuchsien. On exploite la (co)compacité.
  Démonstration similaire au cas compact [e.g. Schneider93]

Lemma

1. *Soit K un ensemble Γ_0-convexe. Alors il existe une suite de polyèdres Γ_0-convexes qui d_H-convergent vers K.*
2. *Soit $(K(n))_n$ une suite d'ensembles Γ_0-convexes qui convergent vers un ensemble Γ_0-convexe K. Alors $V_\epsilon^{\Gamma_0}(K(n),\cdot)$ converge faiblement vers $V_\epsilon^{\Gamma_0}(K,\cdot)$.*

- d_H est la distance d'Hausdorff

$$d_H(K,K') = \min\{\lambda \geq 0 \ : \ K + \lambda B \subset K', \ K' + \lambda B \subset K\}$$

$$K(n) \overset{d_H}{\to} K \qquad \Leftrightarrow \qquad h_{K(n)} \overset{L^\infty}{\to} h_K$$

- K F-convexe quelconque.
  On exploite la nature locale des mesures

Lemme (Extension Fuchsienne)

Soit K un ensemble F-convexe et $\omega \subset \mathbb{H}^d$ un ensemble borélien borné de $\mathbb{H}^d$. À une translation près, il existe un ensemble convexe Fuchsien $\tilde{K}_\omega$ t.q. pour tout $\omega' \subset \omega$,

$$K(\omega') = \tilde{K}_\omega(\omega').$$

Idée :

- $\exists\ \Gamma_0$ Fuchsien t.q. $\omega \subset D$ (un domaine fondamental de Γ_0)
- On copie $K|_\omega$ par translations via Γ_0
- On raccourcit proprement les morceaux.
- Donc $V_\epsilon(K, \omega) = V_\epsilon^{\Gamma_0}(\tilde{K}_\omega, \omega)$

$\Rightarrow$ la preuve découle du cas fuchsien.

$\Rightarrow$ les "courbures" (mesures d'aire) sont bien définies pour tout F-convexe (C^0)
$\Rightarrow$ on peut bien poser le *problème de Minkowski-Christoffel* :

Problème

Étant donné μ mesure de Radon sur $\mathbb{H}^d$, est-ce qu'il existe un F-convexe K t.q.

$$\mu = S_j(K, \cdot)$$

Remarques.

- Si K Γ_0-convexe Fuchsien $\Leftrightarrow$ h_K Γ_0-invariante

$\Rightarrow$ $S_j(K, \cdot)$ est Γ_0-invariante.

- Si K Γ_τ-convexe quasi-Fuchsien $\Leftrightarrow$ H_K "τ-invariante"

$\Rightarrow$ $S_j(K, \cdot)$ est Γ_0-invariante

- Problème de Minkowski (S_d) régulier :
  - cas Fuchsien [Oliker-Simon'80]
  - cas quasi-Fuchsien [Barbot-Béguin-Zeghib'12 en $d = 2$]

Problème de Christoffel lorentzien

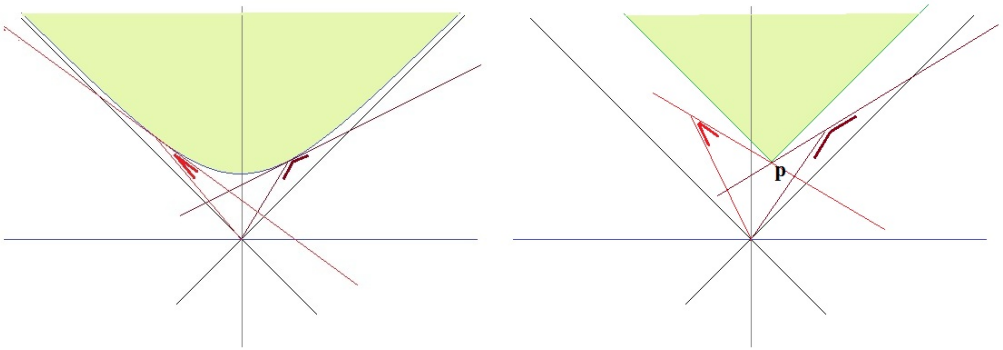
Problème

Étant donnée une mesure de Radon μ sur $\mathbb{H}^d$, est-ce qu'il existe un F-convexe K t.q.

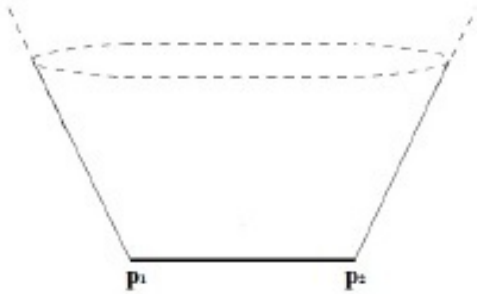
$$\mu = S_1(K, \cdot)$$

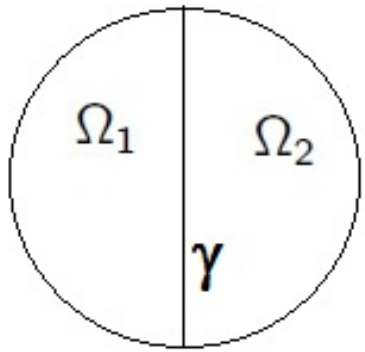
Exemples.

- Le côté convexe de $\mathbb{H}^d \subset \mathbb{R}^{d+1}$: $S_1(K, \cdot) = \mathrm{d}\mathbb{H}^d$
- Le cône future d'un point $p \in \mathbb{R}^{d+1}$: $S_1(K, \cdot) = 0$



- $$H_K(\eta) = \begin{cases} \langle p_1, \cdot \rangle & on\ \Omega_1 \\ \langle p_2, \cdot \rangle & on\ \Omega_2 \end{cases}$$





est (uniformement) concentrée sur une géodésique γ de $\mathbb{H}^2$.

Cas régulier : $\mu = \varphi \mathrm{d}\mathbb{H}^d$, avec $\varphi \in C^0$.

Problème

Est-ce qu'il existe un $h \in C^2(\mathbb{H}^d)$ t.q.

$$\begin{cases} \textbf{a)} \ \frac{1}{d}\Delta_{\mathbb{H}^d} h - h = \varphi \\ \textbf{b)} \ \nabla^2_{\mathbb{H}^d} h - h g_{\mathbb{H}^d} \geq 0 \quad \textit{au sens des formes quadratiques} \end{cases}$$

Réponses (partielles) par [Sovertkov '81,'83 (**a)**), Lopes de Lima-Suarez de Lira '06 (**a)**+**b)**)]

Par extension fuchsienne et densité (locale) des convexes réguliere on a

Lemme

Soit K ensemble F-convexe de fonction de support h. Alors

$$S_1(K, \cdot) = \frac{1}{d}\Delta_{\mathbb{H}^d} h_K - h_K$$

au sens de distributions.

Solutions

$\Rightarrow$ étant donné μ mesure de Radon sur $\mathbb{H}^d$, on veut résoudre

$$\frac{1}{d}\Delta_{\mathbb{H}^d} h - h = \mu \qquad \text{en } \mathcal{D}'(\mathbb{H}^d)$$

On introduit

- $k(\rho) = \frac{\cosh \rho}{v_{d-1}} \int_{+\infty}^{\rho} \frac{\mathrm{d}\eta}{\sinh^{d-1} \eta \cosh^2 \eta}$, où $v_{d-1} = \mathrm{Vol}(\mathbb{S}^{d-1})$,

$\Rightarrow$ k est solution de $\ddot{k}(\rho) + (d-1)\frac{\cosh(\rho)}{\sinh(\rho)}\dot{k}(\rho) - dk(\rho) = 0$.

- $G(x,y) = k(\mathrm{dist}_{\mathbb{H}^d}(x,y))$

$\Rightarrow$ $G(x,\cdot)$ est solution fondamentale radiale de $\frac{1}{d}\Delta_{\mathbb{H}^d} - 1 = \delta_x$

Proposition

Si $\mu \in \mathcal{R}(\mathbb{H}^d) \Rightarrow$ *une solution de* $\frac{1}{d}\Delta_{\mathbb{H}^d} h - h = \mu$ *est donné par*

$$h_\mu(x) := d \int_{\mathbb{H}^d} G(x,y)\mathrm{d}\mu(y),$$

où

$$(h_\mu, f) = \int_{\mathbb{H}^d} h_f(x)\mathrm{d}\mu(x), \qquad \forall f \in \mathcal{D}(\mathbb{H}^d).$$

Ici, $\mathcal{R}(\mathbb{H}^d) = \left\{\mu \text{ de Radon t.q. } \left|\int_{\mathbb{H}^d \setminus B^{\mathbb{H}^d}(x,1)} G(x,y)\mathrm{d}\mu(y)\right| < \infty\right\}$
(e.g. "croissance sous-exponentielle")

Idée.

- Si $\mu = \varphi \mathrm{d}\mathbb{H}^d$, $\varphi \in C_c^\infty$, alors on utilse de l'analyse standard sur $\mathbb{H}^d$ [Helgason'59]
- On en déduit la solution au sens des distributions (**Note :** $f \in C_c^\infty \not\Rightarrow h_f \in C_c^\infty$)

Proposition

Soit Γ_0 groupe fuchsien.
μ est Γ_0-invariante $\Leftrightarrow$ h_μ est Γ_0-invariante

Idée.

- $G(x,y) = k(\text{dist}_{H^d}(x,y))$
- si $\gamma_0 \in \Gamma_0 \Rightarrow G(\gamma_0 \cdot x, \gamma_0 \cdot y)$
- si $\varphi \in C^\infty$ est Γ_0 invariante, on peut conclure:
- Même idée dans le cas des distributions

Unicité

Lemme (Sovertkov'81)

Si φ est lisse, alors

$$\frac{1}{d}\Delta_{\mathbb{H}^d} h - h = \varphi$$

admets au plus une solution bornée.

Idée. h_1, h_2 deux solutions, alors $\Delta_{\mathbb{H}^d}(h_1 - h_2) - d(h_1 - h_2) = 0$
$\Rightarrow$ on peut appliquer un principe de maximum.

Lemme

Si μ est Γ_0-invariante, il existe une unique solution Γ_0-invariante à

$$\frac{1}{d}\Delta_{\mathbb{H}^d} h - h = \mu \qquad \text{en } \mathcal{D}'(\mathbb{H}^d)$$

Idée. $\Delta_{\mathbb{H}^d}(h_1 - h_2) - d(h_1 - h_2) = 0$ et $h_1 - h_2$ est Γ_0-invariante, donc bornée.

Convexité

Théorème

Soit $\mu \in \mathcal{R}(\mathbb{H}^d)$. $h_\mu := \int G(x,y)\mathrm{d}\mu(y)$ est fonction de support d'un F-convexe K ssi

- *h_μ est fonction, i.e.*

$$\left| \int G(x,y)\mathrm{d}\mu(y) \right| < +\infty, \quad \forall x \in \mathbb{H}^d$$

- *K est convexe, i.e.*

$$\int_{\mathbb{H}^d} \Lambda(\eta,\nu,y)\mathrm{d}\mu(y) \geq 0, \quad \forall \eta,\nu \in \mathcal{F}$$

où

$$\Lambda(\eta,\nu,y) = \Gamma(\eta,y) + \Gamma(\nu,y) - \Gamma(\eta+\nu,y)$$

et

$$\Gamma(\eta,y) = \|\eta\|_- G\left(\frac{\eta}{\|\eta\|_-}, y\right).$$

Remarques.

1. Si μ est Γ_0-invariante, alors
   - $\mu \in \mathcal{R}(\mathbb{H}^d)$
   - $\exists$ une solution explicite h_μ à $\Delta_{\mathbb{H}^d} h - dh = \mu$.
   - h_μ est l'unique solution Γ_0-invariante
   - On a des conditions précises pour la convexité.

   $\Rightarrow$ le problème dans le cas fuchsien est complètement résolu

2. D'après les estimations de Schauder,

$$\begin{cases} \varphi \ \Gamma_0\text{-invariante} \\ \varphi \ C^\alpha\text{-proche à une constante} \end{cases} \Rightarrow$$

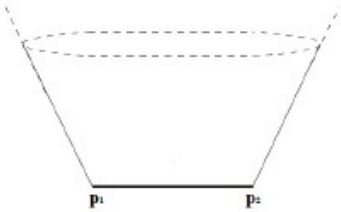
   h_φ est fonction de support d'un F-convexe fuchsien.

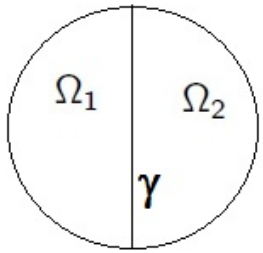
3. $h_\mu \in C^2 \Rightarrow$ différentes conditions de convexité [LdL-SdL'06]
   (calcul de $\nabla^2_{\mathbb{H}^d} h_\mu - h_\mu g_{\mathbb{H}^d}$ en fonction de μ)

Non-unicité

Exemple. $\mu = a\delta_\gamma$ mesure uniformement concentrée sur une géodésique γ de $\mathbb{H}^2$

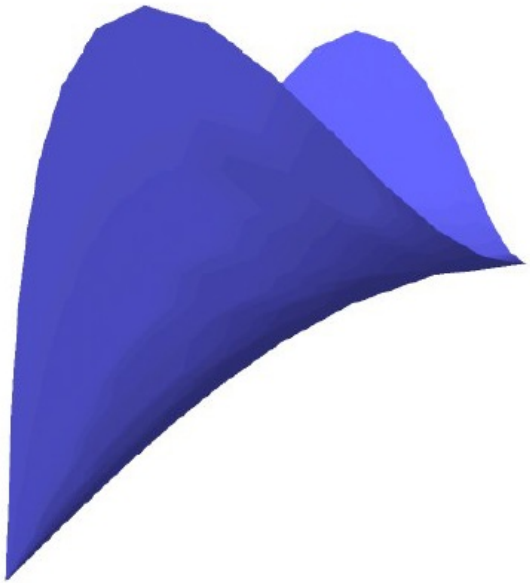
$$H_K(\eta) = \begin{cases} \langle p_1, \cdot \rangle & on\ \Omega_1 \\ \langle p_2, \cdot \rangle & on\ \Omega_2 \end{cases}$$

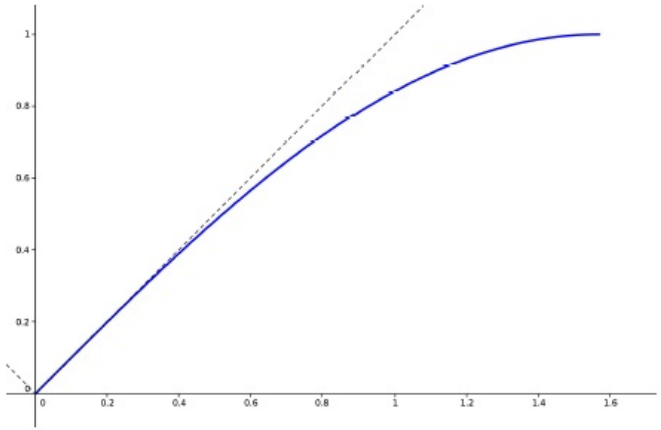




On a une solution convexe construite géométriquement [Mess].

$$\begin{aligned} h_\mu|_{\Omega_i}(x) &= \int_{\mathbb{H}^d} G(x,y)\mathrm{d}\mu(y) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} ak(d_{\mathbb{H}^2}(x,\gamma(t)))\mathrm{d}t \\ &= \frac{a}{\pi}\left[\sinh(\mathrm{dist}_{\mathbb{H}^d}(x,\gamma)) - \arctan\left(\sinh^{-1}(\mathrm{dist}_{\mathbb{H}^d}(x,\gamma))\right) - 1\right] \end{aligned}$$





Rmq.

- h_μ n'est pas la fonction de support du F-convexe de départ.
- Mais $(\nabla^2_{\mathbb{H}^d} h_\mu - h_\mu g_{\mathbb{H}^d})|_{\Omega_i}$ n'est pas definie positive

$\Rightarrow$ h_μ n'est pas la fonction de support d'un F-convexe.

Proposition

Soit $\mu \in \mathcal{R}(\mathbb{H}^d)$. Si $h_\mu \in \mathcal{D}'(\mathbb{H}^d) \setminus C^0(\mathbb{H}^d)$, alors il n'y a aucun F-convexe K de première mesure d'aire μ.

Idée.

- Soit K F-convexe t.q. $S_1(K, \cdot) = \mu$ et $h_K \in C^0$ sa fonction de support.
- Alors $h = h_\mu - h_K$ satisfait $\Delta h - dh = 0 \Rightarrow h \in C^0 \Rightarrow h_\mu \in C^0$.

Application. Pour $d \geq 2$, il n'existe pas aucun corps convexe K t.q. $S_1(K, \cdot) = \delta_x$ (puisque $h_{\delta_x} = G(x, \cdot)$).

Convexes quasi-fuchsiens

- Soit $\tau : \Gamma_0 \to \mathbb{R}^{d+1}$ cocycle et $\Gamma = \Gamma_\tau$ groupe quasi-fuchsien.
- Soit K F-convexe Γ_τ-invariant ($k \in K \Leftrightarrow \gamma \cdot k \in K \ \forall \gamma \in \Gamma_\tau$)

$\Rightarrow$ sa fonction de support étendue $H_K : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ est *τ-invariante*, i.e.

$$H_K(\gamma_0 \eta) = H_K(\eta) + \langle \gamma_0^{-1} \tau_{\gamma_0}, \eta \rangle_-, \ \forall \gamma_0 \in \Gamma_0, \eta \in \mathcal{F}.$$

- Si K_1 et K_2 sont Γ_τ-convexes, alors $h_{K_1} - h_{K_2}$ est Γ_0-invariante $\Rightarrow$

Proposition

Il existe au plus un F-convexe Γ_τ-invariante de première mesure d'aire donnée.

- Soit τ cocycle. $\exists!\ \lambda_\tau \in C^\infty(\mathbb{H}^d)$ τ-équivariante avec $S_1(\lambda_\tau) = 0$.

$\Rightarrow$ Étant donné $\mu \in \mathcal{R}(\mathbb{H}^d)$, on peut construire un convexe Γ_τ-invariant K de fonction de support

$$h = h_\mu + \lambda_\tau$$

Rmq. λ_τ est un hérisson (i.e. une différence de corps convexes : c'est une "surface par morceaux")

d=1

Lorsque $d = 1$, pour les F-convexes dans $\mathbb{R}^2$ on a une description complète.

Proposition

Soit $0 \leq \mu \in \mathcal{R}(\mathbb{H}^1) \equiv \mathcal{R}(\mathbb{R}^1)$. *Alors toute solution de*

$$\mu = \Delta h - h = h'' - h$$

s'écrit

$$h_\mu(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-|s-t|}}{2} \mathrm{d}\mu(s) + A\cosh(t) + B\sinh(t), \ A, B \in \mathbb{R}.$$

De plus $H_\mu(x) = |x|_- h_\mu(x/|x|_-)$ *est automatiquement convexe.*

En fait,

- on sait décrire les solutions de l'homogène associée
- H_μ est convexe $\Leftrightarrow$

$$\nabla^2_{\mathbb{H}^1} h - h g_{\mathbb{H}^1} = h'' - h = \mu \geq 0$$

(même au sens des distributions)

Problèmes & Perspectives

- Concernant le problème de Christoffel :
  - on a une solution analytique, on sait qu'il y en a des autres : comment les construire ? (autres solutions fondamentales ?)
  - cas compact régulier : $\Delta\phi^{-1} + d\phi^{-1} > 0$ est conditions suffisante [Guan-Ma'03] ;
    ça reste vrai pour les F-convexes (réguliers)?

- Domaines quasi-fuchsiens :
  - Construction d'une fonction temps
  - Foliation du domaine par hypersurfaces convexes

- Problème de Christoffel-Minkowski :
  - e.g. Minkowski en dimension $d > 2$ ([BBZ'12] pour $d = 2$)

- D'autres métriques sur $\mathbb{R}^{d+1}$? D'autres variétés ?
  (e.g. convexes dans $\mathbb{H}^d + 1$, "convex cusps",...)