UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO
Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

LA GEOMETRIA SUL CAMPO CON UN ELEMENTO

Relatore: Prof. Luca BARBIERI VIALE

Tesi di Laurea di:
Alberto VEZZANI
Matricola n. 749103

Anno Accademico 2009 - 2010

Questo lavoro è una versione ridotta e tradotta in italiano della tesi "On the geometry over the field with one element", originariamente redatta in lingua inglese, nella quale il lettore interessato può trovare particolari e risultati ulteriori.

LA GEOMETRIA SUL CAMPO CON UN ELEMENTO

ALBERTO VEZZANI

INDICE

Introduzione 1
Ringraziamenti 2
Notazione 2
1. Schemi su $\mathbb{F}_1$ alla Deitmar 3
2. Schemi su $\mathbb{F}_1$ alla Toën-Vaquié 5
3. L'equivalenza Deitmar - Toën-Vaquié 7
4. Funtori di base change 14
Riferimenti bibliografici 15

INTRODUZIONE

Il "campo con un elemento" $\mathbb{F}_1$ fu introdotto per la prima volta da Tits nel 1956 [1], ma ha solo recentemente costituito un oggetto di interesse per la comunità matematica, che ha intravisto nella formalizzazione di una teoria geometrica su $\mathbb{F}_1$ la possibilità di generalizzare risultati validi per schemi su campi finiti a schemi arbitrari (un esempio per tutti: l'ipotesi di Riemann), e l'opportunità di attribuire alla combinatorica un sapore maggiormente geometrico.

Nell'ultimo decennio molti autori hanno così cercato di creare una nuova geometria algebrica che permettesse di introdurre un oggetto $\mathbb{F}_1$ analogo ad un campo, e di considerare $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ come uno schema su di esso. Gli approcci utilizzati sono d'altra parte numerosi e molto diversi, e sono raccolti e comparati tra loro nell'articolo di J. López Peña e O. Lorscheid [2]. Ad oggi, tuttavia, nessuno dei grandi obiettivi della geometria su $\mathbb{F}_1$ può dirsi veramente raggiunto. D'altra parte, in altre parti della matematica come la combinatorica, gli strumenti della geometria su $\mathbb{F}_1$ hanno permesso di trovare nuovi risultati o di dare un'interpretazione geometrica ad altri già noti. Inoltre, molte delle teorie introdotte risultano eleganti generalizzazioni di costruzioni classiche e molte altre non possono ancora dirsi concluse, ma anzi vengono perfezionate di anno in anno.

Nel nostro lavoro, ci concentriamo sui due approcci "minimalistici" di Deitmar e di Toën-Vaquié, i quali hanno in comune l'idea di sostituire la categoria degli anelli con quella dei monoidi, e ricostruire una teoria geometrica su di essa. Essi si distinguono però rispetto alla fonte di ispirazione. Deitmar ha infatti generalizzato il concetto di schema partendo da un punto di vista "geometrico", ed ha così definito gli schemi su $\mathbb{F}_1$ come particolari spazi topologici dotati di un fascio di monoidi, che siano "localmente affini". L'autore ha infatti evidenziato in [3] come la struttura additiva degli anelli possa essere trascurata per molti aspetti, ottenendo risultati di algebra commutativa e geometria algebrica su $\mathbb{F}_1$ del tutto analoghi a quelli classici.

Viceversa, Toën e Vaquié in [4] hanno generalizzato il concetto di schema da un punto di vista "funtoriale", considerando uno schema come un particolare funtore di punti. Essi hanno quindi definito gli schemi su $\mathbb{F}_1$ come funtori dai monoidi agli insiemi che siano "fasci di Zariski" e "localmente affini".

La definizione "geometrica" e quella "funtoriale" sono equivalenti nel caso degli schemi ordinari, come è provato da Demazure e Gabriel in [5]. Gli strumenti utilizzati in tale dimostrazione sono però legati alla struttura degli anelli, ed inoltre sono conseguenza di un risultato fondamentale (e molto profondo) di Grothendieck sulla caratterizzazione algebrica di immersioni aperte di schemi affini ([6], 17.9.1). La rinnovata equivalenza delle due nozioni anche del caso della geometria su $\mathbb{F}_1$ è stata congetturata dagli esperti del settore, come si può vedere nella mappa di [2], ed in questo lavoro ne diamo finalmente una prova completa. Il nostro risultato può essere inoltre generalizzato per avere una nuova dimostrazione dell'equivalenza classica tra schemi "geometrici" e schemi "funtoriali", la quale si sovrappone solo parzialmente alla dimostrazione di Demazure e Gabriel.

RINGRAZIAMENTI

Sono profondamente riconoscente al Professor Luca Barbieri Viale, che per primo mi ha introdotto all'universo con un elemento, ed è costantemente fonte di incoraggiamento e di insegnamento. Ringrazio inoltre i Professori Bas Edixhoven e Ieke Moerdijk, che ho avuto il piacere di conoscere in Olanda, e mi hanno dato un aiuto specifico per la stesura dell'elaborato. Ringrazio anche il Professor Bernard Toën, che ha risposto alle mie domande con enorme disponibilità, e a Florian Marty per i suoi commenti e per aver condiviso il suo materiale sull'argomento.

Si è tenuto nel novembre 2009, a Granada, un workshop specifico sulla geometria di $\mathbb{F}_1$ per presentare i risultati ottenuti e tracciare un percorso per il futuro. Ringrazio gli organizzatori per avermi invitato a tale evento, e nello specifico ringrazio Peter Arndt per avermi indicato il risultato [7] 2.7.1. Ho anche avuto il piacere di presentare i risultati fondamentali della tesi in un seminario organizzato nel Dipartimento di Matematica dell'Università degli Studi di Milano. Ringrazio i partecipanti per i loro commenti, e gli organizzatori per avermi dato questa opportunità. Nello specifico, ringrazio il Professor Fabrizio Andreatta, il quale è stato anche fonte di enorme aiuto nel mio percorso.

NOTAZIONE

Una scelta di un universo $\mathcal{U}$ è implicita, e tutte le categorie introdotte devono essere considerate $\mathcal{U}$-piccole. (cfr. [7], 1.1, 1.2). Le categorie vengono denotate in grassetto. Per una categoria $\mathbf{C}$ ed un oggetto X di $\mathbf{C}$, indichiamo con $\mathbf{Psh}(\mathbf{C})$ la categoria dei prefasci du $\mathbf{C}$, con $\mathbf{C}_{/X}$ la categoria degli oggetti su X e con ${}^{X/}\mathbf{C}$ la categoria degli oggetti sotto X.

La parola "anello" indica un anello commutativo con unità e mappe di anelli rispettano l'unità. In particolare, sottoanelli hanno la stessa unità dell'anello più grande. Indichiamo la categoria degli anelli con $\mathbf{Ring}$.

La parola "monoide" indica un monoide commutativo. Indichiamo la categoria dei monoidi con $\mathbf{Mon}$.

Una categoria tensoriale simmetrica chiusa come in [8] è indicata con $(\mathbf{C}, \otimes)$, omettendo la struttura extra, l'oggetto unità è indicato con $\mathbf{1}$ mentre il funtore Hom interno è indicato con $\mathbf{Hom}$. La categoria dei monoidi in $(\mathbf{C}, \otimes)$ è denotata con $\mathbf{Mon}_{\mathbf{C}}$. Per un monoide A di $(\mathbf{C}, \otimes)$, la categoria dei moduli su A è denotata con A-$\mathbf{Mod}$, mentre la categoria ${}^{A/}\mathbf{Mon}_{\mathbf{C}}$ è indicata con A-$\mathbf{Alg}$ e i suoi oggetti sono detti A-algebre.

1. Schemi su $\mathbb{F}_1$ alla Deitmar

Le definizioni seguenti sono state presentate da Kato in [9] e da Deitmar in [3]. In questi lavori, gli autori mostrano come l'operazione additiva degli anelli possa essere trascurata per molti scopi, ed indicano come le nozioni di base della geometria algebrica possano essere generalizzate al contesto dei monoidi.

Definizione 1.1. Un sottoinsieme I di un monoide M è un *ideale* se l'insieme

$$IM := \{xm \colon x \in I, m \in M\}$$

coincide con I, ed è detto *ideale primo* se $M \setminus I$ è un sottomonoide di M. Lo *spettro di* M è lo spazio topologico costituito dagli ideali primi di M, con la topologia in cui gli insiemi chiusi sono quelli della forma $V(I) := \{\mathfrak{p} \colon I \subset \mathfrak{p}\}$, dove I è un sottoinsieme di M. Tale spazio è indicato con $\operatorname{Spec}_{\mathbb{F}_1}(M)$, o con $\operatorname{Spec} M$ se il contesto lo permette, e la sua topologia è detta *di Zariski*.

Ogni monoide è locale, nel senso che ha un unico ideale massimale proprio, quello costituito dagli elementi non invertibili. E' evidentemente un ideale primo, e costituisce l'unico punto chiuso di $\operatorname{Spec} M$. Lo spazio $\operatorname{Spec} M$ ha una base di aperti formata dall'insieme vuoto e dagli insiemi della forma $D(a) := \{\mathfrak{p} \colon a \notin \mathfrak{p}\}$, dove a è un elemento di M. Tali aperti non sono mai vuoti giacché contengono il punto $\emptyset$. In particolare, poiché $D(a) \cap D(b) = D(ab)$, lo spazio $\operatorname{Spec} M$ è irriducibile. Osserviamo inoltre che ogni rivestimento aperto di $\operatorname{Spec} M$ contiene lo spazio stesso, poiché l'unico aperto $D(a)$ che contiene l'ideale massimale è $D(1) = \operatorname{Spec} M$.

Definizione 1.2. Un morfismo di monoidi f è locale se $f(M \setminus M^\times) \subset N \setminus N^\times$, i.e. se $f^{-1}(N^\times) = M^\times$.

Si possono anche definire le localizzazioni in modo del tutto analogo al caso degli anelli.

Definizione 1.3. Dato un sottoinsieme S di M, la *localizzazione di M su S* è un monoide $S^{-1}M$ con un morfismo $\pi \colon M \to S^{-1}M$ con la seguente proprietà universale: per ogni morfismo di monoidi $f \colon M \to N$ tale che $f(S) \subset N^\times$, esiste uno ed un solo morfismo $S^{-1}M \to N$ che spezza f su π. Se $S = \{a\}$, indichiamo $S^{-1}M$ con M_a, mentre se $S = M \setminus \mathfrak{p}$ laddove $\mathfrak{p}$ è un ideale primo, indichiamo $S^{-1}M$ con $M_{\mathfrak{p}}$.

E' evidente che possiamo restringerci a considerare localizzazioni su sottomonoidi di M, ed in questo caso esiste una caratterizzazione esplicita: il monoide $S^{-1}M$ è l'insieme

$$\left\{\frac{a}{x} \colon a \in M, x \in S\right\}\Big/\sim$$

laddove $\frac{a}{x} \sim \frac{b}{y}$ se esiste un elemento $t \in S$ tale che $ayt = bxt$. L'operazione è definita $\frac{a}{x} \cdot \frac{b}{y} = \frac{ab}{xy}$, mentre il morfismo di monoidi π è definito come $a \mapsto \frac{a}{1}$.

Definizione 1.4. Uno *spazio monoidato* è una coppia $(X, \mathcal{O}_X)$ costituita da uno spazio topologico X e da un fascio di monoidi $\mathcal{O}_X$ su di esso. Un *morfismo di spazi monoidati* da $(X, \mathcal{O}_X)$ a $(Y, \mathcal{O}_Y)$ è una coppia $(f, f^\sharp)$, costituita da un'applicazione continua $f \colon X \to Y$ e da un morfismo di fasci $f^\sharp \colon \mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$ tale che per ogni $x \in X$, il morfismo indotto $f^\sharp_x \colon \mathcal{O}_{Y,f(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$ è locale. La categoria degli spazi monoidati è indicata con $\mathbf{MS}$.

Proposizione 1.5. *La categoria* $\mathbf{MS}$ *è cocompleta, nel senso che ha ogni colimite piccolo.*

Dimostrazione. Le dimostrazione è del tutto analoga a quella di [5], I.1.1.6. □

Proposizione 1.6. *Sia M un monoide. Esiste una struttura canonica di spazio monoidato su $\mathrm{Spec}_{\mathbb{F}_1} M$ tale che il funtore $\mathrm{Spec}_{\mathbb{F}_1}$ definisce un aggiunto sinistro del funtore delle sezioni globali Γ, considerato come funtore da $\mathbf{MS}^{\mathrm{op}}$ a $\mathbf{Mon}$. In particolare, per ogni spazio monoidato $(X, \mathcal{O}_X)$ si ha*

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Mon}}(M, \Gamma(X, \mathcal{O}_X)) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{MS}}(X, \mathrm{Spec}_{\mathbb{F}_1} M).$$

Il fascio $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}_{\mathbb{F}_1} M}$ è tale che $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}_{\mathbb{F}_1} M}(D(a)) = M_a$ per ogni elemento a di M, e $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}_{\mathbb{F}_1} M, \mathfrak{p}} = M_{\mathfrak{p}}$ per ogni ideale primo $\mathfrak{p}$ di M.

Dimostrazione. Le dimostrazione è del tutto analoga a quella di [5], I.1.2.1. □

Definizione 1.7. Gli spazi monoidali isomorfi a $(\mathrm{Spec}_{\mathbb{F}_1} M, \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}_{\mathbb{F}_1} M})$ per un qualche monoide M sono detti $\mathbb{F}_1$*-schemi geometrici affini*.

La proposizione precedente implica in particolare che il funtore $\mathrm{Spec}_{\mathbb{F}_1}$ dai monoidi agli $\mathbb{F}_1$-schemi geometrici affini è parte di una equivalenza di categorie (controvariante).

Definizione 1.8. Un morfismo $(X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ di $\mathbf{MS}$ è un'*immersione aperta* se è composizione di un isomorfismo e di un'inclusione aperta $(U, \mathcal{O}_Y|_U) \hookrightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$. Una famiglia di immersioni aperte è detta un *ricoprimento di Zariski* se è globalmente suriettiva sugli spazi topologici sottostanti. Un $\mathbb{F}_1$*-schema geometrico* (o anche *schema su $\mathbb{F}_1$ alla Deitmar*) è uno spazio monoidato $(X, \mathcal{O}_X)$ che ha un ricoprimento di Zariski costituito da $\mathbb{F}_1$-schemi geometrici affini. La *categoria degli $\mathbb{F}_1$-schemi geometrici* è la sottocategoria piena di $\mathbf{MS}$ i cui oggetti sono gli $\mathbb{F}_1$-schemi geometrici. E' facile mostrare che i ricoprimenti di Zariski definiscono una pretopologia sugli $\mathbb{F}_1$-schemi geometrici. Il sito che formano è detto *sito di Zariski*.

La categoria degli $\mathbb{F}_1$-schemi geometrici non è cocompleta, ma ammette qualche colimite. In particolare, si generalizza in modo evidente il lemma di incollamento ([10], Esercizio II.2.12).

Proposizione 1.9. *La topologia di Zariski sugli $\mathbb{F}_1$-schemi geometrici è sottocanonica, e la categoria degli $\mathbb{F}_1$-schemi geometrici affini è densa nella categoria degli $\mathbb{F}_1$-schemi geometrici, nel senso che ogni $\mathbb{F}_1$-schemi geometrico è colimite di un diagramma contenuto nella sottocategoria degli $\mathbb{F}_1$-schemi geometrici affini.*

Dimostrazione. Sia $\{U_i = \mathrm{Spec}\, M_i \to X\}$ un ricoprimento di Zariski di X, e siano $\{\mathrm{Spec}\, A_{ijk} \to U_i \cap U_j\}$ ricoprimenti degli schemi $U_i \cap U_j$. Allora i diagrammi seguenti sono coequalizzanti

$$\coprod U_i \cap U_j \rightrightarrows \coprod U_i \to X$$

$$\coprod \mathrm{Spec}\, A_{ijk} \rightrightarrows \coprod \mathrm{Spec}\, M_i \to X$$

da cui l'asserto. □

Come nel caso degli schemi ordinari, la categoria degli $\mathbb{F}_1$-schemi geometrici ha pullback (detti anche *prodotti fibrati*), e gli $\mathbb{F}_1$-schemi geometrici affini sono chiusi rispetto ai pullback ([3], 3.1).

2. SCHEMI SU $\mathbb{F}_1$ ALLA TOËN-VAQUIÉ

Dedichiamo questa sezione alla generazlizzazione del concetto di schema introdotto da nell'articolo [4]. Uno dei maggiori vantaggi di tale approccio è la generalità: il processo che porta alla definizione di uno schema è del tutto categoriale, ed il caso della geometria su $\mathbb{F}_1$ è un esempio particolare di una teoria generale, i cui protagonisti sono monoidi di categorie tensoriali $(\mathbf{C}, \otimes)$ "sufficientemente strutturate".

D'ora in avanti, consideriamo una categoria tensoriale simmetrica e chiusa $(\mathbf{C}, \otimes)$ con unità e Hom interno, che sia completa e cocompleta. In particolare, il prodotto tensoriale commuta coi colimiti, avendo un aggiunto destro.

Definizione 2.1. Sia A un oggetto di $\mathbf{Mon_C}$, e siano M, N oggetti di A-$\mathbf{Mod}$ con azioni rispettive φ e ψ. Il prodotto tensoriale di M e N su A, indicato con $M \otimes_A N$, è il coequalizzatore del diagramma seguente.

$$A \otimes M \otimes N \underset{\psi \otimes M}{\overset{\varphi \otimes N}{\rightrightarrows}} M \otimes N.$$

Esso ammetta una struttura naturale di A-modulo.

E' facile dimostrare i fatti seguenti.

Proposizione 2.2. *Sia $f\colon A \to B$ un morfismo di $\mathbf{Mon_C}$.*

(1) Esiste un funtore dimenticante B-$\mathbf{Mod} \to A$-$\mathbf{Mod}$ che porta un oggetto N in se stesso, con la struttura di A-modulo definita dalla composizione

$$A \otimes N \to B \otimes N \to N.$$

In particolare, f definisce una struttura di A-modulo naturale su B.

(2) Il funtore dimenticante ha un aggiunto sinistro, indicato con $\otimes_A B$, che porta un A-modulo M nell'oggetto $M \otimes_A B$, dotato di un'opportuna struttura di B-modulo.

(3) Il funtore dimenticante ha un aggiunto destro, che porta un A-modulo M nell'oggetto $\mathbf{Hom}(B, M)$, dotato di un'opportuna struttura di B-modulo.

(4) Il pushout nella categoria $\mathbf{Mon_C}$ di un diagramma $B \leftarrow A \to C$ è isomorfo come A-modulo a $B \otimes_A C$.

In particolare, dato un oggetto A di $\mathbf{Mon_C}$ e un oggetto M in A-$\mathbf{Mod}$, $M \otimes_A A$ è naturlamente isomorfo a M, giacché sia il funtore $\otimes_A A$ ed il funtore identità stesso sono aggiunti sinistri del funtore identità.

Corollario 2.3. *Sia $A \to B$ un morfismo di $\mathbf{Mon_C}$. Il funtore dimenticante B-$\mathbf{Alg} \to A$-$\mathbf{Alg}$ ha un aggiunto sinistro, che porta $A \to X$ in $B \to B \otimes_A X$, con la struttura di monoide indotta dall'isomorfismo $B \otimes_A X \cong B \sqcup_A X$.*

Definizione 2.4. La categoria opposta alla categoria $\mathbf{Mon_C}$ è denotata con $\mathbf{Aff_C}$, ed i suoi oggetti sono detti *schemi affini relativi a* $\mathbf{C}$. Indichiamo inoltre con $\operatorname{Spec} A$ l'oggetto di $\mathbf{Aff_C}$ che corrisponde al monoide A di $\mathbf{Mon_C}$.

Introduciamo ora la topologia di Zariski sulla categoria degli schemi affini.

Definizione 2.5. Sia $f\colon A \to B$ un morfismo di $\mathbf{Mon_C}$. Si dice *piatto* se il funtore $\otimes_A B$ da A-$\mathbf{Mod}$ a B-$\mathbf{Mod}$ è esatto nel senso che commuta con limiti e colimiti finiti. Equivalentemente (poiché è aggiunto sinistro), f è piatto se è esatto a sinistra, cioè se

commuta con i limiti finiti. Il morfismo f si dice di *presentazione finita* se per ogni sistema diretto $\{C_i\}_{i\in I}$ di A-algebre, la mappa canonica

$$\varinjlim \mathrm{Hom}_{A\text{-}\mathbf{Alg}}(B, C_i) \to \mathrm{Hom}_{A\text{-}\mathbf{Alg}}(B, \varinjlim C_i)$$

è una biezione. Un morfismo $\mathrm{Spec}\, B \to \mathrm{Spec}\, A$ di $\mathbf{Aff}_{\mathbf{C}}$ è un'*immersione aperta* se il morfismo corrispondente $A \to B$ è un epimorfismo piatto e di presentazione finita. Una collezione di immersioni aperte $\{\mathrm{Spec}\, A_i \to \mathrm{Spec}\, A\}_{i\in I}$ è un *ricoprimento di Zariski* se esiste un sottoinsieme di indici finito $J \subset I$ tale che la collezione $\{\mathrm{Spec}\, A_j \to \mathrm{Spec}\, A\}_{j\in J}$ *riflette gli isomorfismi di moduli*, nel senso che ogni morfismo di A-moduli $M \to N$ è un isomorfismo se e solo se ciascun morfismo indotto $M \otimes_A A_j \to N \otimes_A A_j$ è un isomorfismo, per ogni $j \in J$.

E' facile provare che i ricoprimenti di Zariski definiscono una pretopologia su $\mathbf{Aff}_{\mathbf{C}}$. Il sito che formano viene detto *sito di Zariski*.

Proposizione 2.6. *Se la categoria $(\mathbf{C}, \otimes)$ è quella dei gruppi abeliani rispetto al prodotto tensore $\otimes_{\mathbb{Z}}$, allora il sito di Zariski su $\mathbf{Aff}_{\mathbf{C}}$ è equivalente al sito di Zariski definito sugli schemi affini.*

Dimostrazione. Nel caso in questione la categoria $\mathbf{Aff}_{\mathbf{C}}$ è la categoria $\mathbf{Ring}^{\mathrm{op}}$, la quale è equivalente a quella degli schemi affini da [11] I.7.4. Un morfismo di anelli $A \to B$ induce un'immersione aperta se e solo se è un epimorfismo piatto e di presentazione finita per [6], 17.9.1. Inoltre, utilizzando [12] 3.9, una collezione $\{A \to B_i\}$ induce un ricoprimento di $\mathrm{Spec}\, A$ se e solo se riflette gli isomorfismi di moduli. Poiché ogni schema affine è quasi-compatto, è sempre possibile estrarre un sottoricoprimento finito indicizzato da J, e ciò conclude la dimostrazione. □

Si noti che è parte della definizione il fatto che schemi affini sono quasi-compatti (un sottoricoprimento finito è indicizzato da J), mentre ciò è garantito dalla definizione esplicita della topologia di Zariski nel caso degli anelli. Avendo introdotto una topologia sugli schemi affini, è ora possibile studiare i fasci di Zarski sugli schemi affini. Nel caso degli anelli, il funtore rappresentato da uno schema affine è un fascio di Zariski. Anche in questo contesto più generale, questo fatto rimane vero ma necessita di una dimostrazione più complicata ([4], 2.11). Possiamo quindi usare la parola "schema affine" sia per indicare un oggetto X di $\mathbf{Aff}_{\mathbf{C}}$, sia il fascio h_X rappresentato da esso.

Per poter dare la definizione di schema, dobbiamo dare una nozione di "essere localmente affine" anche per fasci. Dobbiamo quindi definire in cosa consistono ricoprimenti aperti di fasci.

Definizione 2.7. Un morfismo $f\colon \mathcal{F} \to h_X$ di fasci di Zariski su $\mathbf{Aff}_{\mathbf{C}}$ è un'*immersione aperta* se definisce $\mathcal{F}$ come un sottofascio di h_X e se esiste una famiglia di immersioni aperte $\{X_i \to X\}_{i\in I}$ tali che $\mathcal{F}$ è isomorfo all'immagine della mappa indotta $\coprod_{i\in I} h_{X_i} \to h_X$. In generale, un morfismo $f\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ di fasci di Zariski è un'*immersione aperta* se per ogni schema affine h_X su $\mathcal{G}$, il morfismo indotto $\mathcal{F} \times_{\mathcal{G}} h_X \to h_X$ è un'immersione aperta. Una collezione $\{\mathcal{F}_i \to \mathcal{F}\}_{i\in I}$ di immersioni aperte è un *ricoprimento di Zariski* se il morfismo indotto $\coprod_{i\in I} \mathcal{F}_i \to \mathcal{F}$ è un epimorfismo di fasci.

Si dimostra che questa definizione coincide con le precedenti sulla categoria degli schemi affini ([4], 2.14). Possiamo quindi dare la definizione di schema in questo contesto.

Definizione 2.8. Uno *schema relativo a* $\mathbf{C}$ (o *schema alla Toën-Vaquié relativo a* $\mathbf{C}$) è un fascio di Zariski su $\mathbf{Aff}_{\mathbf{C}}$ secondo la Definizione 2.4, che ha un ricoprimento di Zariski

costituito da immersioni aperte di schemi affini. La *categoria degli schemi relativi a* $\mathbf{C}$ è la sottocategoria piena di $\mathbf{Psh}(\mathbf{Aff}_{\mathbf{C}})$ i cui oggetti sono gli schemi relativi a $\mathbf{C}$.

Osserviamo in particolare che nel caso in cui si consideri la categoria tensoriale dei gruppi abeliani, questa definizione coincide con la definizione di schema data da Demazure e Gabriel in [5], I.1.3.11. Questo deriva da 2.6 e dal fatto che una famiglia di immersioni aperte $\{\mathcal{F}_i \to \mathcal{F}\}$ induce un epimorfismo di fasci di Zariski $\coprod \mathcal{F}_i \to \mathcal{F}$ se e solo se induce un morfismo suriettivo $\coprod \mathcal{F}_i(\operatorname{Spec} K) \to \mathcal{F}(\operatorname{Spec} K)$ per ogni campo K (si veda [13], Lemma 4.2.1).

Come dimostrato in [4], 2.18, la categoria degli schemi relativi a $\mathbf{C}$ nella categoria dei fasci di Zariski è chiusa rispetto a unioni disgiunte e prodotti fibrati. Da ciò, si dimostra facilmente che i ricoprimenti di Zariski definiscono una pretopologia sugli schemi relativi a $\mathbf{C}$. Il sito corrispondente viene chiamato ancora *sito di Zariski*.

Abbiamo presentato finora l'intero panorama degli schemi alla Toën-Vaquié. Ci occupiamo ora degli schemi su $\mathbb{F}_1$, che sono un caso particolare di questa teoria generale.

Definizione 2.9. Un $\mathbb{F}_1$*-schema*, o *schema su* $\mathbb{F}_1$, è uno schema relativo alla categoria tensoriale $(\mathbf{Set}, \times)$. La categoria degli $\mathbb{F}_1$-schemi è indicata con $\mathbf{Sch}_{\mathbb{F}_1}$.

In particolare, giacché i monoidi in $(\mathbf{Set}, \times)$ non sono nient'altro che i monoidi commutativi "ordinari", la categoria $\mathbf{Aff}_{\mathbf{C}}$ è la categoria $\mathbf{Mon}^{\mathrm{op}}$, che chiameremo $\mathbf{Aff}$ d'ora in avanti. Inoltre, per un monoide M fissato, la categoria degli M-moduli è la categoria degli M-insiemi, ovvero degli insiemi con un'azione di M. Non è una categoria abeliana poiché l'oggetto iniziale $\emptyset$ non coincide con l'oggetto finale $\{*\}$. Osserviamo inoltre che per una coppia di M-moduli S e T, $S \otimes_M T$ è l'insieme $S \times T$ quozientato rispetto all'equivalenza generata dalla relazione $(m \cdot s, t) \sim (s, m \cdot t)$. Se S e T sono M-algebre allora il modulo $S \otimes_M T$, secondo la Proposizione 2.2, eredita una struttura di M-algebra, ed è isomorfo a $S \sqcup_M T$ nella categoria M -$\mathbf{Alg}$.

3. L'equivalenza Deitmar - Toën-Vaquié

Proviamo ora l'equivalenza di categorie tra le due nozioni di $\mathbb{F}_1$-schemi finora introdotte. Gran parte della presente sezione è dedicata a risultati di algebra commutativa dei monoidi, per cercare di ottenere un contesto simile a quello classico degli anelli commutativi. Denotiamo con $\mathbb{F}_1$ il monoide banale $\{1\}$.

Proposizione 3.1. *Sia M un monoide. Il funtore dimenticante da M -$\mathbf{Alg}$ a $\mathbf{Mon}$ ha un aggiunto sinistro che porta un monoide N in $M \times N$ con la struttura naturale di M-algebra. In particolare, il funtore dimenticante da M -$\mathbf{Alg}$ a $\mathbf{Set}$ ha un aggiunto sinistro che porta un insieme S nel monoide*

$$M[S] := \{m \cdot s_1^{d_1} s_2^{d_2} \dots s_k^{d_k} : k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, m \in M, s_i \in S, d_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$$

dotato delle struttura di M-algebra ovvia. Indichiamo con $M[x_1, \dots, x_n]$ il monoide $M[\{x_1, \dots, x_n\}]$.

Dimostrazione. La categoria dei monoidi è la categoria delle $\mathbb{F}_1$-algebre, e per ogni coppia di monoidi M e N, si ha $M \otimes_{\mathbb{F}_1} N = M \times N$. Il risultato segue quindi dal Corollario 2.3. □

Esempio 3.2. Il monoide $(\mathbb{Z}_{\geq 1}, \cdot)$ è isomorfo a $\mathbb{F}_1[x_1, x_2, \dots]$ tramite la mappa $x_i \mapsto p_i$, dove i p_i sono i primi positivi.

Definizione 3.3. Sia M un monoide e $\varphi\colon M \to N$ una M-algebra. Una relazione di equivalenza $\sim$ su N si dice *monoidale e M-lineare* se è definita da un sottoinsieme di $N \times N$ che è una sotto M-algebra rispetto all'azione diagonale di M su $N \times N$. Data una relazione monoidale e M-lineare $\sim$ su N, è possibile definire una struttura di M-algebra su $N/\sim$, tramite il morfismo $m \mapsto [\varphi(m)]$. Una M-algebra N si dice *finitamente generata* se esiste un intero n e un morfismo suriettivo di M-algebre da $M[x_1, \ldots, x_n]$ a N. Equivalentemente, se è isomorfa come M-algebra a $M[x_1, \ldots, x_n]/\sim$ secondo un'opportuna equivalenza monoidale e M-lineare $\sim$.

Proposizione 3.4. *Sia N una M-algebra. Allora N è di presentazione finita se e solo se è isomorfa come M-algebra a $M[x_1, \ldots, x_n]/\sim$, dove la relazione $\sim$ è una sotto-$M[x_1, \ldots, x_n]$-algebra finitamente generata del monoide $M[x_1, \ldots, x_n] \times M[x_1, \ldots, x_n]$, i.e. N è il coequalizzatore nella categoria delle $M[x_1, \ldots, x_n]$-algebre di un diagramma*

$$M[x_1, \ldots, x_n][y_1, \ldots, y_m] \rightrightarrows M[x_1, \ldots, x_n]$$

per due opportuni interi n, m.

Dimostrazione. La prova è analoga a [14], 8.14.2.2. Si osservi che in luogo di quozienti rispetto ad ideali, si devono considerare in questo caso quozienti rispetto a relazioni monoidali e $M[x_1, \ldots, x_n]$-lineari. □

Siano $\{p_i, q_i\}_{i \in I}$ elementi di $M[S]$. D'ora in avanti, indichiamo con $(p_i = q_i)_{i \in I}$ la relazione monoidale e $M[S]$-lineare generata dalle coppie (p_i, q_i).

Esempio 3.5. Sia M un monoide. Indichiamo con M_0 l'insieme $M \sqcup \{0\}$ con la struttura di monoide indotta da M e dalla relazione $0m = 0$ per ogni $m \in M$. Il monoide $(\mathbb{Z}, \cdot)$ è isomorfo a

$$\Big(\mathbb{F}_1[u, x_1, x_2, \ldots] \Big/ \big(u^2 = 1\big)\Big)_0$$

mediante la mappa $u \mapsto -1$, $x_1 \mapsto p_1$, dove i p_i sono i primi positivi.

Corollario 3.6. *Una localizzazione di un monoide su un insieme finito di elementi è di presentazione finita.*

Dimostrazione. Possiamo ridurci al caso in cui si localizza rispetto ad un unico elemento a. Il monoide M_a è isomorfo a $M[x]/(ax = 1)$. L'asserto segue quindi dalla proposizione precedente. □

Proposizione 3.7. *Localizzazioni di monoidi sono piatte.*

Dimostrazione. Sia T un M-modulo. Il $S^{-1}M$-modulo $S^{-1}T := T \otimes_M S^{-1}M$ ammette una descrizione esplicita alternativa. L'insieme sottostante è

$$S^{-1}T := \left\{ \frac{t}{s} \colon t \in T, s \in S \right\} \Big/ \sim$$

dove $\sim$ è la relazione di equivalenza che identifica $\frac{t}{s}$ e $\frac{t'}{s'}$ se esiste un elemento $s'' \in S$ tale che $s''s' \cdot t = s''s \cdot t'$. L'azione di $S^{-1}M$ è definita come $\frac{m}{s} \cdot \frac{t}{s'} := \frac{m \cdot t}{ss'}$.

Sia ora S un sottomonoide di M. Dobbiamo dimostrare che il funtore $\otimes_M S^{-1}M$ commuta con equlizzatori e prodotti finiti. Nella categoria in considerazione, tali limiti hanno come insiemi sottostanti i rispettivi limiti della categoria $\mathbf{Set}$, con l'azione di M

naturalmente definita. Siano quindi T e U due M-moduli. Allora il morfismo

$$S^{-1}(T \times U) \to S^{-1}T \times S^{-1}U$$
$$\frac{(t,u)}{s} \mapsto \left(\frac{t}{s}, \frac{u}{s}\right)$$

è un isomorfismo di M-moduli $S^{-1}(T \times U)$ da a $S^{-1}T \times S^{-1}U$.

Inoltre, dati due morfismi di M-moduli $\varphi, \psi \colon T \rightrightarrows U$ con equalizzatore E, esiste un morfismo naturale da $S^{-1}E$ all'equalizzatore E' dei due morfismi indotti da $S^{-1}T$ a $S^{-1}U$. Tale morfismo porta un elemento $\frac{x}{s}$ in $\frac{x}{s}$, considerato come elemento di $S^{-1}T$. Tale morfismo è ovviamente iniettivo. Sia ora $\frac{t}{s}$ un elemento di E', ovvero sia $\frac{\varphi(t)}{s} = \frac{\psi(t)}{s}$. Esiste quindi un elemento $s' \in S$ tale che

$$\varphi(s's \cdot t) = s's \cdot \varphi(t) = s's \cdot \psi(t) = \psi(s's \cdot t).$$

Pertanto si ha $\frac{t}{s} = \frac{s's \cdot t}{s's^2}$ con $s's \cdot t \in E$. Questo prova la suriettività, quindi l'asserto. □

I prossimi due risultati riguardano epimorfismi piatti di monoidi. In particolare, vogliamo concludere che epimorfismi piatti e locali sono isomorfismi. Stenström in [15] cita il lavoro di Roos, e conclude che epimorfismi piatti di monoidi (non necessariamente commutativi) sono caratterizzati come localizzazioni rispetto a topologie di Gabriel, sfruttando la teoria della torsione sviluppata da Gabriel in [16]. In effetti, ogni epimorfismo di monoidi $M \to N$ induce un'inclusione piena della categoria N-$\mathbf{Mod}$ in M-$\mathbf{Mod}$ tramite il funtore dimenticante. La piattezza implica inoltre che tale inclusione ammette un funtore aggiunto sinistro esatto, quindi definisce una localizzazione di M-$\mathbf{Mod}$. Tuttavia, la dimostrazione che tali sottocategorie di riflessione siano localizzazioni rispetto a topologie di Gabriel non è presente in [15], e non è corollario diretto della teoria di Gabriel, che considera categorie abeliane. Pertanto, giacché nel nostro caso M-$\mathbf{Mod}$ non è abeliana, preferiamo seguire un approccio più esplicito, sebbene meno generale.

Risultati analoghi sono stati ottenuti indipendentemente da Florian Marty, il quale utilizza un approccio astratto più generale, basato sui filtri di Gabriel. Il lettore interessato può riferirsi al suo articolo [17].

Lemma 3.8. *Un epimorfismo locale di monoidi è suriettivo sugli elementi invertibili.*

Dimostrazione. Sia $\varphi \colon M \to N$ un epimorfismo locale di monoidi. Si consideri l'insieme $N/\sim_{\mathfrak{m}}$, dove $\sim_{\mathfrak{m}}$ identifica gli elementi dell'ideale massimale $\mathfrak{m} := N \setminus N^\times$. Tale insieme ha una struttura naturale di monoide indotta da quella su N, e risulta isomorfo al monoide con zero $(N^\times)_0$ (si veda 3.5). Consideriamo inoltre il sottogruppo $\varphi(M^\times)$ di $N^\times$, e il quoziente nella categoria dei gruppi $T := N^\times/\varphi(M^\times)$. Definiamo due morfismi di monoidi da $(N^\times)_0$ a T_0: il primo indotto dalla proiezione, il secondo indotto dal morfismo costante $N^\times \mapsto 1_T$. Giacché φ è locale, l'immagine degli elementi di M è la stessa secondo i due morfismi. Poiché φ è un epimorfismo, concludiamo quindi che $\varphi(M^\times) = N^\times$. □

Il prossimo risultato è una generalizzazione di un fatto standard per la categoria deli anelli (cfr. [18], IV.1.2),

Proposizione 3.9. *Sia $\varphi \colon M \to N$ un morfismo di monoidi.*

(1) Se φ è locale e piatto, allora è iniettivo.
(2) Se φ è un epimorfismo locale e piatto, allora è un isomorfismo.

Dimostrazione. Iniziamo dal primo punto. Supponiamo $\varphi(a) = \varphi(b) = t$. Consideriamo i due morfismi di M-modulo da M in sé definiti da $1 \mapsto a$ e $1 \mapsto b$, e sia E il rispettivo equalizzatore. Utilizzando l'isomorfismo di M-moduli $m \otimes n \mapsto \varphi(m)n$ da $M \otimes_M N$ a N, concludiamo che tensorizzando i due morfismi con N si ottiene la stessa mappa $N \to N$, $n \mapsto tn$. In particolare, l'equalizzatore risulta essere l'intero N. Dalla proprietà di piattezza, deduciamo che il morfismo $E \otimes N \to N$, $x \otimes n \mapsto \varphi(x)n$ è un isomorfismo. In particolare, esiste un elemento $x \in E$ e un elemento $n \in N$ tali che $\varphi(x)n = 1$. Poiché φ è locale, concludiamo che x è invertibile, e poiché $ax = bx$, si ha che $a = b$.

Passiamo quindi al secondo punto. Da quanto appena provato, possiamo supporre che φ sia un inclusione di monoidi. Ricordiamo che un morfismo è un epimorfismo se e solo se il suo cokernel pair è costituito da identità. Poiché $N \otimes_M N$ è il cokernel pair di φ nella categoria dei monoidi (Proposizione 2.2), concludiamo che i due morfismi $N \to N \otimes_M N$ definiti come $n \mapsto 1 \otimes n$ e $n \mapsto n \otimes 1$ sono isomorfismi. Si consideri ora il M-modulo $N/\!\sim_M$, definito come il quoziente di N rispetto alla relazione $\sim_M$ che identifica gli elementi di M. Ha una struttura naturale di M-modulo indotta da quella di N, e la proiezione $\pi\colon N \to N/\!\sim_M$ ha la proprietà universale seguente: ogni morfismo di M-moduli $N \to T$ tale che l'immagine di M è costante, si fattorizza su π in maniera unica. In altre parole, π è il pushout del diagramma seguente.

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\varphi} & N \\ \downarrow & & \\ \{*\} & & \end{array}$$

Dalla proprietà di piattezza, $\otimes_M N$ commuta con i prodotti finiti, e quindi preserva l'oggetto finale $\{*\}$ (il prodotto vuoto). Inoltre, poiché commuta coi colimiti e poiché $\varphi \otimes_M N = id_N$, concludiamo che $(N/\!\sim_M) \otimes_M N$ è il pushout del diagramma

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{=} & N \\ \downarrow & & \\ \{*\} & & \end{array}$$

e quindi è il N-modulo banale $\{*\}$.

Studiamo ora il kernel pair K della proiezione $N \to N/\!\sim_M$. Esso è costituito dalle coppie (x, y) di $N \times N$ tali che $\pi(x) = \pi(y)$. Poiché $(N/\sim_M) \otimes_M N$ è l'oggetto terminale, il kernel pair della mappa $\pi \otimes_M N$ è il prodotto di due copie di $N \otimes_M N = N$. Dalla proprietà di piattezza, concludiamo quindi che la mappa $K \otimes_M N \to N \times N$, $(x, y) \otimes n \mapsto (xn, yn)$ è un isomorfismo. Fissiamo quindi un elemento $\overline{n}$ di N. In particolare, esiste un elemento $(x, y) \in K$ e un elemento $n \in$ tali che $xn = 1$ and $yn = \overline{n}$. Concludiamo quindi che n e x sono invertibili, pertanto sono elementi di M secondo il Lemma 3.8. Poiché la coppia (x, y) è in K, e x è in M, concludiamo che anche y è in M, per cui anche $\overline{n}$ è in M. Per l'arbitrarietà di $\overline{n}$, concludiamo che $M = N$, quindi φ è anche suriettivo. Poiché un morfismo biettivo di monoidi è un isomorfismo, l'asserto è provato. □

Teorema 3.10. *Sia $\varphi\colon M \to N$ un morfismo di monoidi. Le condizioni seguenti sono equivalenti.*

(i) Il morfismo φ è un epimorfismo piatto e di presentazione finita.

(ii) Il morfismo φ è isomorfo come M-algebra ad una localizzazione rispetto ad un elemento di M.
(iii) Il morfismo φ definisce un'immersione aperta di $\mathbb{F}_1$-schemi geometrici affini.

Dimostrazione. Il fatto che (ii) implichi (iii) è ovvio. E' anche facile mostrare l'implicazione contraria. Sia infatti $\mathrm{Spec}_{\mathbb{F}_1}N$ un sotto-$\mathbb{F}_1$-schema geometrico affine aperto di $\mathrm{Spec}_{\mathbb{F}_1}M$. Si consideri un suo ricoprimento costituito da aperti di base $\{\mathrm{Spec}_{\mathbb{F}_1}M_{a_i}\}$, e si ricopra ciascuno di essi con aperti di base $\{\mathrm{Spec}_{\mathbb{F}_1}N_{b_{ij}}\}$ di $\mathrm{Spec}_{\mathbb{F}_1}N$. Poiché ogni ricoprimento aperto di un affine è banale, concludiamo che $\mathrm{Spec}_{\mathbb{F}_1}N$ è uguale a $\mathrm{Spec}_{\mathbb{F}_1}N_{b_{ij}}$ per qualche coppia (i,j), ed in particolare $\mathrm{Spec}_{\mathbb{F}_1}N$ risulta uguale a $\mathrm{Spec}_{\mathbb{F}_1}M_{a_i}$. Il fatto che (ii) implichi (i) segue dal Corollario 3.6, dalla Proposizione 3.7 e dalla proprietà universale delle localizzazioni. Ci resta da provare che (i) implica (ii). Dalla proprietà universale, il morfismo φ si spezza sul monoide

$$\varinjlim_{a_i\in\varphi^{-1}(N^\times)} M_{a_i} = M_{\mathfrak{p}}$$

laddove $\mathfrak{p}$ è $\varphi^{-1}(N\setminus N^\times)$. Il morfismo indotto $M_{\mathfrak{p}}\to N$ è locale, ed è ancora un epimorfismo. Proviamo che è anche piatto. Sia infatti S un $M_{\mathfrak{p}}$-modulo. La mappa $x\mapsto x\otimes 1$ definisce un inverso della mappa naturale $x\otimes\frac{m}{f}\mapsto\frac{m}{f}\cdot x$, e quindi $S=S\otimes_M M_{\mathfrak{p}}$. Inoltre, per unicità essenziale dei funtori aggiunti, ogniqualvolta si ha una composizione di morfismi di monoidi $M\to N\to P$, allora il funtore $(\otimes_M N)\otimes_N P$ è canonicamente isomorfo al funtore $\otimes_M P$. Scriviamo quindi $S\otimes_M N\otimes_N P$ senza parentesi, e lo consideriamo uguale a $S\otimes_M P$, per ogni M-modulo S. Consideriamo quindi un limite piccolo $\lim S_i$ di $M_{\mathfrak{p}}$-moduli. Scriviamo $\hat{S}_i$ quando si considerano tali moduli come M-moduli. Dalla piattezza di φ e delle localizzazioni (Proposizione 3.7), concludiamo la seguente catena di isomorfismi

$$\begin{aligned}&(\lim S_i)\otimes_{M_{\mathfrak{p}}} N=(\lim \hat{S}_i\otimes_M M_{\mathfrak{p}})\otimes_{M_{\mathfrak{p}}} N=(\lim\hat{S}_i)\otimes_M M_{\mathfrak{p}}\otimes_{M_{\mathfrak{p}}} N=\\&=(\lim\hat{S}_i)\otimes_M N=\lim(\hat{S}_i\otimes_M N)=\lim(\hat{S}_i\otimes_M M_{\mathfrak{p}}\otimes_{M_{\mathfrak{p}}} N)=\\&=\lim(S_i\otimes_{M_{\mathfrak{p}}} N)\end{aligned}$$

da cui si conclude che $M_{\mathfrak{p}}\to N$ è piatto.

Dalla Proposizione 3.9, concludiamo quindi che $M_{\mathfrak{p}}\to N$ è un isomorfismo. Poiché φ è di presentazione finita, l'isomorfismo $M_{\mathfrak{p}}\to N$ si spezza su qualche monoide M_a con $a\in\varphi^{-1}(N^\times)$. Poiché ogni morfismo coinvolto è un morfismo di M-algebre, concludiamo che $N=M_a$, come volevasi dimostrare. □

Corollario 3.11. *Sia $\varphi\colon M\to N$ un morfismo di monoidi. Il morfismo indotto $\mathrm{Spec}\,N\to\mathrm{Spec}\,M$ è un'immersione aperta nel senso della Definizione 2.5 se e solo se il morfismo indotto $\mathrm{Spec}_{\mathbb{F}_1}N\to\mathrm{Spec}_{\mathbb{F}_1}M$ è un'immersione aperta nel senso della definizione 1.8.*

Teorema 3.12. *Il sito di Zariski sugli $\mathbb{F}_1$-schemi geometrici affini è equivalente al sito di Zariski su $\mathbf{Mon}^{\mathrm{op}}$.*

Dimostrazione. Le due categorie sottostanti sono equivalenti dalla Proposizione 1.6. Dal corollario precedente, concludiamo inoltre che le immersioni aperte sono le stesse. Ci rimane da provare che i ricoprimenti di Zariski coincidono. Sia M un monoide. Nel caso degli $\mathbb{F}_1$-schemi geometrici, i ricoprimenti devono contenere l'immersione banale $\mathrm{Spec}_{\mathbb{F}_1}M\to\mathrm{Spec}_{\mathbb{F}_1}M$. Dimostriamo quindi che questo è vero anche nel caso della topologia definita in 2.5. Sia $\{\mathrm{Spec}\,M_{a_i}\to\mathrm{Spec}\,M\}$ un ricoprimento di Zariski, e supponiamo che nessuna di queste immersioni sia banale, ovvero che nessuno tra i a_i sia invertibile.

Consideriamo quindi il M-modulo $M/{\sim_{\mathfrak{m}}}$, dove $\sim$ identifica gli elementi non-invertibili di M. Dimostriamo che $(M/{\sim_{\mathfrak{m}}}) \otimes_M M_{a_i}$ è isomorfo al modulo banale $\{*\}$ per ogni a_i. Infatti, poiché a_i non è invertibile, concludiamo la catena di uguaglianze seguente, per ogni elemento $[x] \otimes \frac{m}{a_i^k}$ di $(M/{\sim_{\mathfrak{m}}}) \otimes_M M_{a_i}$:

$$[x] \otimes \frac{m}{a_i^k} = [mx] \otimes \frac{a_i}{a_i^{k+1}} = [a_i] \otimes \frac{1}{a_i^{k+1}} = [a_i^{k+1} a_i] \otimes \frac{1}{a_i^{k+1}} = [a_i] \otimes 1.$$

Tuttavia, il morfismo $(M/{\sim_{\mathfrak{m}}}) \to \{*\}$ non è mai un isomorfismo, a meno che M sia $\mathbb{F}_1$, nel qual caso l'asserto è ovvio. Concludiamo quindi che ogni ricoprimento di Zariski contiene l'immersione aperta banale, come volevasi dimostrare. □

Avvertenza 3.13. D'ora in avanti, non scriviamo più il pedice nel riferirci a $\mathbb{F}_1$-schemi affini, e scriviamo solo $\operatorname{Spec} M$. Inoltre, non specificheremo più a quale definizione facciamo riferimento quando trattiamo del sito di Zariski su $\mathbf{Mon}^{\mathrm{op}}$ o di immersioni aperte di $\mathbb{F}_1$-schemi affini.

Lemma 3.14. *Un morfismo $X \to Y$ di $\mathbb{F}_1$-schemi geometrici è un'immersione aperta se e solo se per ogni schema affine $\operatorname{Spec} M$ su Y, il morfismo indotto $X \times_Y \operatorname{Spec} M \to \operatorname{Spec} M$ è un'immersione aperta.*

Dimostrazione. La dimostrazione è analoga a quella di [11], I.4.2.4. □

Proposizione 3.15. *Sia $f\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un morfismo di fasci di Zariski su $\mathbf{Mon}^{\mathrm{op}}$, e sia $\mathcal{G} = h_{\operatorname{Spec} M}$ affine. Allora f è un'immersione aperta se e solo se $\mathcal{F}$ è isomorfo su $\mathcal{G}$ al fascio $h_U := \operatorname{Hom}(\cdot, U)$, dove U è un $\mathbb{F}_1$-sottoschema geometrico aperto di $\operatorname{Spec} M$*

Dimostrazione. Da [4], 2.14, siamo ridotti a dimostrare che per una collezione di $\mathbb{F}_1$-sottoschemi geometrici aperti $\{U_i = \operatorname{Spec} M_i\}$ di $\operatorname{Spec} M$, l'immagine del morfismo di fasci $\coprod h_{\operatorname{Spec} M_i} \to h_{\operatorname{Spec} M}$ è h_U, dove U è l'aperto ottenuto come unione dei $U_i = \operatorname{Spec} M_i$, e questo segue facilmente da [19], III.7.7. □

Teorema 3.16. *La categoria degli $\mathbb{F}_1$-schemi è equivalente alla categoria degli $\mathbb{F}_1$-schemi geometrici.*

Dimostrazione. Poiché la categoria degli spazi monoidati è cocompleta (Proposizione 1.5), l'inclusione di categorie $\mathbf{Aff} \to \mathbf{MS}$ induce una coppia di aggiunti $\mathbf{Psh}(\mathbf{Aff}) \rightleftarrows \mathbf{MS}$ per [7] 2.7.1, in cui l'aggiunto sinistro è il funtore $|\cdot|\colon \mathbf{Psh}(\mathbf{Aff}) \to \mathbf{MS}$ (detto *realizzazione geometrica* d'ora in poi) che porta un oggetto $\operatorname{colim} h_{\operatorname{Spec} M}$ in $\operatorname{colim} \operatorname{Spec} M$, mentre l'aggiunto destro è il funtore $h\colon \mathbf{MS} \to \mathbf{Psh}(\mathbf{Aff})$ che porta X in $h_X = \operatorname{Hom}(\cdot, X)$. Sia X un $\mathbb{F}_1$-schema geometrico, e sia $\{\operatorname{Spec} M_i \to X\}$ un suo ricoprimento di Zariski. Poiché la topologia di Zariski è sottocanonica (Proposizione 1.9), concludiamo che h_X è un fascio su $\mathbf{Aff}$. Sia ora $h_{\operatorname{Spec} N}$ un $\mathbb{F}_1$-schema affine su h_X fissato. Dal Lemma 3.14, il morfismo $\operatorname{Spec} M_i \times_X \operatorname{Spec} N \to \operatorname{Spec} N$ è un'immersione aperta. Poiché h è un aggiunto destro, dalla Definizione 2.7 e dalla Proposizione 3.15, concludiamo quindi che anche

$$h(\operatorname{Spec} M_i \times_X \operatorname{Spec} N \to \operatorname{Spec} N) = h_{\operatorname{Spec} M_i} \times_{h_X} h_{\operatorname{Spec} N} \to h_{\operatorname{Spec} N}$$

è un'immersione aperta. Questo dimostra che ciascuna mappa $h_{\operatorname{Spec} M_i} \to h_{\operatorname{Spec} M}$ è un'immersione aperta. Ora dimostriamo anche che $\coprod h_{\operatorname{Spec} M_i} \to h_X$ è un epimorfismo. Infatti, sia $\mathcal{F}$ un altro fascio e siano f, g morfismi da h_X a $\mathcal{F}$ tali che $f\varphi_i = g\varphi_i$ per ogni i. Utilizzando [20] III.4, $\mathcal{F}$ può essere considerato non solo come fascio sugli affini, ma anche come fascio sugli $\mathbb{F}_1$-schemi geometrici. Dal lemma di Yoneda, i morfismi f, g si traducono quindi in due elementi ρ, σ di $\mathcal{F}(X)$ tali che $\mathcal{F}(\varphi_i)(\rho) = \mathcal{F}(\varphi_i)(\sigma)$ per ogni i.

Poiché $\mathcal{F}$ è un fascio e i φ_i definiscono un ricoprimento, si ha che $\rho = \sigma$ da cui $f = g$. Concludiamo quindi che h_X è un $\mathbb{F}_1$-schema.

Dal lemma di co-Yoneda ([21] X.6.3), ogni prefascio di affini $\mathcal{F}$ è il colimite del funtore

$$\mathbf{Aff}_{/\mathcal{F}} \to \mathbf{Psh}(\mathbf{C})$$
$$(\mathrm{Hom}(\cdot, A) \to \mathcal{F}) \mapsto \mathrm{Hom}(\cdot, A).$$

In particolare, la realizzazione geometrica di h_X è il colimite del funtore

$$\mathbf{Aff}_{/X} \to \mathbf{MS}$$
$$(A \to X) \mapsto A.$$

Poiché gli $\mathbb{F}_1$-schemi geometrici affini sono densi negli $\mathbb{F}_1$-schemi, il colimite di tale funtore ristretto alla categoria degli $\mathbb{F}_1$-schemi è esattamente X ([21], X.6.2), pertanto c'è un morfismo naturale $|h_X| \to X$. Sappiamo inoltre che X è colimite in $\mathbf{MS}$ del diagramma di incollamento indotto da un suo ricoprimento affine, che è contenuto nel diagramma definito da $\mathbf{Aff}_{/X} \to \mathbf{MS}$. Pertanto, esiste anche un morfismo naturale $X \to |h_X|$, che determina un isomorfismo.

Consideriamo ora un $\mathbb{F}_1$-schema $\mathcal{F}$ con un ricoprimento affine $\{h_{\mathrm{Spec}\, M_i}\}$. Poiché gli $\mathbb{F}_1$-schemi hanno prodotti fibrati ([4], 2.18), possiamo anche considerare ricoprimenti affini $\{h_{\mathrm{Spec}\, M_{ijk}}\}$ degli $\mathbb{F}_1$-schemi $h_{\mathrm{Spec}\, M_i} \times_X h_{\mathrm{Spec}\, M_j}$. Da [19] IV.7.3 e [19] A.1.1, un epimorfismo di fasci è il coequalizzatore del suo kernel pair, e i prodotti fibrati si distribuiscono sui coprodotti. Ciò implica che $\mathcal{F}$ è il coequalizzatore nel diagramma seguente.

$$\coprod h_{\mathrm{Spec}\, M_i} \times_{\mathcal{F}} h_{\mathrm{Spec}\, M_j} \rightrightarrows \coprod h_{\mathrm{Spec}\, M_i} \to \mathcal{F}$$

Le immersioni aperte sono stabili per base change di affini, quindi $h_{\mathrm{Spec}\, M_i} \times_{\mathcal{F}} h_{\mathrm{Spec}\, M_j} \to h_{\mathrm{Spec}\, M_i}$ è un'immersione aperta. In particolare, dalla Proposizione 3.15, questi morfismi possono essere riscritti come $h_{U_{ij}} \to h_{\mathrm{Spec}\, M_i}$, indotti da immersioni aperte $U_{ij} \to \mathrm{Spec}\, M_i$. Concludiamo quindi che $|\mathcal{F}|$ è il coequalizzatore del diagramma

$$\coprod U_{ij} \rightrightarrows \coprod \mathrm{Spec}\, M_i \to |\mathcal{F}|$$

ed è quindi incollamento di affini su sottoschemi aperti, pertanto un $\mathbb{F}_1$-schema geometrico. Sia ora $\mathcal{G}$ un altro $\mathbb{F}_1$-schema. Possiamo considerare il diagramma equalizzante

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \to \coprod \mathrm{Hom}(h_{\mathrm{Spec}\, M_i}, \mathcal{G}) \rightrightarrows \coprod \mathrm{Hom}(h_{\mathrm{Spec}\, M_i} \times_X h_{\mathrm{Spec}\, M_j}, \mathcal{G})$$

che dimostra che la topologia di Zariski sugli $\mathbb{F}_1$-schemi è sottocanonica. Possiamo quindi definire un inverso del morfismo $\mathcal{F} \to h_{|\mathcal{F}|}$ incollando le mappe $h_{\mathrm{Spec}\, M} \to h_{|\mathcal{F}|}$, da cui $\mathcal{F} = h_{|\mathcal{F}|}$. Questo conclude la dimostrazione. □

E' facile convincersi del fatto che l'equivalenza di categorie sopra descritta preserva la topologia dei due siti.

Proposizione 3.17. *Un morfismo di $\mathbb{F}_1$-schemi geometrici è un'immersione aperta se e solo se il morfismo indotto di $\mathbb{F}_1$-schemi è un'immersione aperta. Per un $\mathbb{F}_1$-schema geometrico fissato X, una collezione di $\mathbb{F}_1$-schemi geometrici su X è un ricoprimento di Zariski se e solo se la collezione di $\mathbb{F}_1$-schemi su h_X indotta è un ricoprimento di Zariski di h_X.*

Dimostrazione. Il primo enunciato segue dal fatto che in entrambi i casi le immersioni aperte si possono caratterizzare usando base change affine (usando il Lemma 3.14 e la Definizione 2.7), e nel caso affine le due nozioni coincidono. Rispetto ai ricoprimenti, è sufficiente scrivere i diagrammi coequalizzanti ed utilizzare il gluing lemma. □

Osserviamo che le dimostrazioni di 3.16 e di 3.17 si possono generalizzare al contesto degli schemi su $\mathbb{Z}$, costituendo una dimostrazione alternativa a quella presentata in [5], I.1.4.4.

4. FUNTORI DI BASE CHANGE

Avendo considerato gli schemi su $\mathbb{F}_1$, sorge spontaneo chiedersi come trasportarli a schemi nel senso ordinario. Questo processo, che consideriamo come un base change di $\mathbb{Z}$ con $\mathbb{F}_1$, può essere fatto sulla base del funtore che porta un monoide M nell'anello $\mathbb{Z}[M]$. Tuttavia, i due approcci alla geometria su $\mathbb{F}_1$ qui presentati hanno due diversi modi di generalizzare questo funtore agli schemi arbitrari. Dato che le due prospettive sono equivalenti, dobbiamo provare che anche questi due modi di operare un base change sono naturalmente equivalenti.

Definizione 4.1. Il funtore dimenticante $\mathbf{Ring} \to \mathbf{Mon}$ ha un aggiunto sinistro $\mathbf{Mon} \to \mathbf{Ring}$ che porta un monoide M nell'anello $\mathbb{Z}[M]$. Indichiamo questo funtore con la notazione $\otimes_{\mathbb{F}_1}\mathbb{Z}$.

Lemma 4.2. *Sia* $\operatorname{Spec} N \to \operatorname{Spec} M$ *un'immersione aperta di* $\mathbb{F}_1$*-schemi affini. Allora il morfismo indotto*

$$\operatorname{Spec}(N \otimes_{\mathbb{F}_1} \mathbb{Z}) \to \operatorname{Spec}(M \otimes_{\mathbb{F}_1} \mathbb{Z})$$

è un'immersione aperta di schemi affini su $\mathbb{Z}$*.*

Dimostrazione. Dal Teorema 3.10, è sufficiente provare che per un dato elemento $a \in M$, c'è un isomorfismo

$$M_a \otimes_{\mathbb{F}_1} \mathbb{Z} = \mathbb{Z}[M_a] \cong \mathbb{Z}[M]_a = (M \otimes_{\mathbb{F}_1} \mathbb{Z})_a$$

dove la seconda localizzazione è fatta nella categoria degli anelli. Un morfismo $\mathbb{Z}[M_a] \to \mathbb{Z}[M]_a$ è indotto dal morfismo di monoidi $M_a \to \mathbb{Z}[M]_a$, che è a sua volta indotto dal morfismo naturale $M \to \mathbb{Z}[M]_a$. Un morfismo $\mathbb{Z}[M]_a \to \mathbb{Z}[M_a]$ è indotto dal morfismo $\mathbb{Z}[M] \to \mathbb{Z}[M_a]$, che è a sua volta indotto dalla mappa naturale $M \to M_a$. E' facile vedere che questi due morfismi costituiscono l'isomorfismo voluto. □

Definizione 4.3. Sia X un $\mathbb{F}_1$-schema geometrico e sia $\{\operatorname{Spec} M_i\}$ un suo ricoprimento affine. Si consideri ora un ricoprimento aperto $\{\operatorname{Spec} M_{ijk}\}$ per ciascuno schema $\operatorname{Spec} M_i \times_X \operatorname{Spec} M_j$. Dal Lemma 4.2, possiamo definire uno schema su $\mathbb{Z}$ incollando gli schemi affini $\operatorname{Spec}(M_i \otimes_{\mathbb{F}_1} \mathbb{Z})$ su $\operatorname{Spec}(M_{ijk} \otimes_{\mathbb{F}_1} \mathbb{Z})$. Lo schema su $\mathbb{Z}$ ottenuto è detto *base change di* X *rispetto al ricoprimento* $\{\operatorname{Spec} M_{ijk}\}$.

Definizione 4.4. Come descritto in [4], Sezione 2.5, la coppia di funtori aggiunti da $\mathbf{Mon}$ a $\mathbf{Ring}$ induce un funtore dai fasci di Zariski sugli schemi affini su $\mathbb{Z}$ ai fasci di Zariski sugli schemi affini su $\mathbb{F}_1$, il quale ha un aggiunto sinistro $\otimes_{\mathbb{F}_1}\mathbb{Z}$. Inoltre, il funtore $\otimes_{\mathbb{F}_1}\mathbb{Z}$ è tale che $\mathbb{F}_1$-schemi vengono portati in schemi. Pertanto, la sua restrizione definisce un funtore

$$\begin{aligned} \mathbf{Sch}_{\mathbb{F}_1} &\to \mathbf{Sch} \\ X &\mapsto X \otimes_{\mathbb{F}_1} \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

detto *funtore di base change*.

Proposizione 4.5. *Il base change degli* $\mathbb{F}_1$*-schemi geometrici non dipende dal ricoprimento scelto ed è canonicamente equivalente al base change degli* $\mathbb{F}_1$*-schemi.*

Dimostrazione. Osserviamo che il funtore di base change è automaticamente definito dalla coppia di funtori aggiunti da $\mathbf{Mon}$ a $\mathbf{Ring}$. Sia ora X un $\mathbb{F}_1$-schema arbitrario, e siano $\{\operatorname{Spec} M_{ijk}\}$ ricoprimenti come nella Definizione 4.3. Possiamo scrivere X come il coequalizzatore del diagramma di affini

$$\coprod \operatorname{Spec} M_{ijk} \rightrightarrows \coprod \operatorname{Spec} M_i \to X.$$

Poiché $\otimes_{\mathbb{F}_1}\mathbb{Z}$ è un aggiunto sinistro, concludiamo che $X \otimes_{\mathbb{F}_1} \mathbb{Z}$ è il coequalizzatore del diagramma

$$\coprod \operatorname{Spec}(M_{ijk} \otimes_{\mathbb{F}_1} \mathbb{Z}) \rightrightarrows \coprod \operatorname{Spec}(M_i \otimes_{\mathbb{F}_1} \mathbb{Z}) \to X \otimes_{\mathbb{F}_1} \mathbb{Z}$$

il quale è l'immagine di X mediante il funtore di base change rispetto al ricoprimento fissato. □

Possiamo quindi riassumere quanto dimostrato dicendo che la sezione della mappa di $\mathbb{F}_1$ presente in [2] che coinvolge gli schemi alla Deitmar e alla Toën-Vaquié è corretta, nel senso che sia l'equivalenza delle categorie sia la commutatività dei funtori di base change è stata provata.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

[1] J. Tits, Sur les analogues algébriques des groupes semi-simples complexes, in: Colloque d'algèbre supérieure, tenu à Bruxelles du 19 au 22 décembre 1956, Centre Belge de Recherches Mathématiques, Établissements Ceuterick, Louvain, 1957, pp. 261–289.

[2] J. López Peña, O. Lorscheid, Mapping $\mathbb{F}_1$-land: An overview of geometries over the field with one element, arXiv:0909.0069v1 [math.AG] (2009).

[3] A. Deitmar, Schemes over $\mathbb{F}_1$, in: Number fields and function fields—two parallel worlds, Vol. 239 of Progr. Math., Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2005, pp. 87–100.

[4] B. Toën, M. Vaquié, Au-dessous de $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$, J. K-Theory 3 (3) (2009) 437–500.

[5] M. Demazure, P. Gabriel, Groupes algébriques. Tome I: Géométrie algébrique, généralités, groupes commutatifs, Masson & Cie, Éditeur, Paris, 1970, avec un appendice *Corps de classes local* par Michiel Hazewinkel.

[6] A. Grothendieck, Éléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas IV, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (32) (1967) 361.

[7] M. Kashiwara, P. Schapira, Categories and sheaves, Vol. 332 of Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], Springer-Verlag, Berlin, 2006.

[8] G. M. Kelly, Basic concepts of enriched category theory, Repr. Theory Appl. Categ. (10) (2005) vi+137, reprint of the 1982 original [Cambridge Univ. Press, Cambridge; MR0651714].

[9] K. Kato, Toric singularities, Amer. J. Math. 116 (5) (1994) 1073–1099. doi:10.2307/2374941.
URL `http://dx.doi.org/10.2307/2374941`

[10] R. Hartshorne, Algebraic geometry, Springer-Verlag, New York, 1977, Graduate Texts in Mathematics, No. 52.

[11] A. Grothendieck, Éléments de géométrie algébrique. I. Le langage des schémas, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (4) (1960) 228.

[12] M. F. Atiyah, I. G. Macdonald, Introduction to commutative algebra, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont., 1969.

[13] B. Toën, Cours de master 2 : Champs algébriques, Lecture notes of a Master course on Algebraic Stacks. `http://www.math.univ-toulouse.fr/~toen/m2.html` (2006).

[14] A. Grothendieck, Éléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas. III, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (28) (1966) 255.

[15] B. Stenström, Flatness and localization over monoids, Math. Nachr. 48 (1971) 315–334.

[16] P. Gabriel, Des catégories abéliennes, Bull. Soc. Math. France 90 (1962) 323–448.

[17] F. Marty, Relative zariski open objects, arXiv:0712.3676v3 [math.AG] (2007).

[18] D. Lazard, Autour de la platitude, Bull. Soc. Math. France 97 (1969) 81–128.

[19] S. Mac Lane, I. Moerdijk, Sheaves in geometry and logic, Universitext, Springer-Verlag, New York, 1994, A first introduction to topos theory, Corrected reprint of the 1992 edition.

[20] Théorie des topos et cohomologie étale des schémas. Tome 1: Théorie des topos, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 269, Springer-Verlag, Berlin, 1972, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1963–1964 (SGA 4), Dirigé par M. Artin, A. Grothendieck, et J. L. Verdier. Avec la collaboration de N. Bourbaki, P. Deligne et B. Saint-Donat.

[21] S. Mac Lane, Categories for the working mathematician, 2nd Edition, Vol. 5 of Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1998.