UNIVERSITÉ PARIS-SUD
FACULTÉ DES SCIENCES D'ORSAY

MÉMOIRE

Présenté pour obtenir

LE DIPLÔME D'HABILITATION
À DIRIGER DES RECHERCHES
DE L'UNIVERSITÉ PARIS-SUD

Spécialité : Mathématiques

par

Olivier WITTENBERG

Titre :
QUELQUES CONTRIBUTIONS À L'ARITHMÉTIQUE DES ZÉRO-CYCLES ET DES POINTS RATIONNELS

Soutenu le 4 décembre 2014 devant la commission d'examen :

Tim BROWNING	Professeur (University of Bristol)
Jean-Louis COLLIOT-THÉLÈNE	Directeur de recherche émérite (Université Paris-Sud)
Hélène ESNAULT	Professeur (Freie Universität Berlin)
David HARARI	Professeur (Université Paris-Sud)
Uwe JANNSEN	Professeur (Universität Regensburg)
Jean-Pierre SERRE	Professeur honoraire (Collège de France)

au vu des rapports de :

David HARARI	Professeur (Université Paris-Sud)
János KOLLÁR	Professeur (Princeton University)
Bjorn POONEN	Professeur (Massachusetts Institute of Technology)

Remerciements

Je voudrais remercier tout particulièrement Jean-Louis Colliot-Thélène et Hélène Esnault de m'avoir accompagné dans les mathématiques, depuis de nombreuses années, avec une hauteur de vue constante et un enthousiasme jamais faiblissant. Le premier a guidé mes débuts dans la recherche. Il est toujours resté un modèle à suivre. J'ai fait connaissance avec la seconde en 2007, aux États-Unis ; la discussion qui s'y engagea se poursuit aujourd'hui encore. C'est un plaisir de leur exprimer ma gratitude pour tout ce qu'ils m'ont permis d'apprendre à leur contact.

Je suis reconnaissant à David Harari, János Kollár et Bjorn Poonen d'avoir aimablement accepté d'être rapporteurs de ce mémoire et à Tim Browning, Uwe Jannsen et Jean-Pierre Serre de me faire le très grand honneur de participer au jury.

Pour les joies inépuisables de comprendre ensemble, merci à tous mes coauteurs : Andreas Bender, Jean-Louis Colliot-Thélène, Hélène Esnault, Yonatan Harpaz, Marc Levine et Alexei Skorobogatov.

J'ai bénéficié d'excellentes conditions de travail et d'une atmosphère stimulante tant à l'IRMA, à Strasbourg, qu'au DMA, qui m'accueille depuis 2008. Que ces deux institutions, leur personnel administratif et tous les collègues que j'y ai côtoyés en soient chaleureusement remerciés.

Table des matières

Travaux couvrant la période de thèse

[1] O. Wittenberg, *Transcendental Brauer–Manin obstruction on a pencil of elliptic curves*, Arithmetic of higher-dimensional algebraic varieties (Palo Alto, CA, 2002), Progr. Math., vol. 226, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2004, p. 259–267.

[2] A. O. Bender et O. Wittenberg, *A potential analogue of Schinzel's hypothesis for polynomials with coefficients in* $\mathbb{F}_q[t]$, Int. Math. Res. Not. (2005), no. 36, 2237–2248.

[3] O. Wittenberg, *Principe de Hasse pour les intersections de deux quadriques*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris **342** (2006), no. 4, 223–227.

[4] O. Wittenberg, *Intersections de deux quadriques et pinceaux de courbes de genre* 1, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1901, Springer, Berlin, 2007, viii+218 pp.

Travaux présentés pour l'habilitation

[5] O. Wittenberg, *On Albanese torsors and the elementary obstruction*, Math. Ann. **340** (2008), no. 4, 805–838.

[6] O. Wittenberg, *La connexité rationnelle en arithmétique*, Variétés rationnellement connexes : aspects géométriques et arithmétiques, Panor. Synthèses, vol. 31, Soc. Math. France, Paris, 2010, p. 61–114.

[7] H. Esnault et O. Wittenberg, *Remarks on cycle classes of sections of the arithmetic fundamental group*, Mosc. Math. J. **9** (2009), no. 3, 451–467 (volume en l'honneur de Deligne).

[8] H. Esnault et O. Wittenberg, *On abelian birational sections*, J. Amer. Math. Soc. **23** (2010), no. 3, 713–724.

[9] J.-L. Colliot-Thélène et O. Wittenberg, *Groupe de Brauer et points entiers de deux familles de surfaces cubiques affines*, Amer. J. Math. **134** (2012), no. 5, 1303–1327.

[10] O. Wittenberg, *Une remarque sur les courbes de Reichardt–Lind et de Schinzel*, The arithmetic of fundamental groups, PIA 2010 (ed. J. Stix), p. 329–337, Contributions in Mathematical and Computational Sciences 2, Springer-Verlag, Heidelberg, 2012.

[11] O. Wittenberg, *Zéro-cycles sur les fibrations au-dessus d'une courbe de genre quelconque*, Duke Math. J. **161** (2012), no. 11, 2113–2166.

[12] H. Esnault, M. Levine et O. Wittenberg, *Index of varieties over Henselian fields and Euler characteristic of coherent sheaves*, 20 pages, à paraître au Journal of Algebraic Geometry.

[13] Y. Harpaz, A. N. Skorobogatov et O. Wittenberg, *The Hardy–Littlewood conjecture and rational points*, 19 pages, à paraître à Compositio Mathematica.

[14] H. Esnault et O. Wittenberg, *On the cycle class map for zero-cycles over local fields*, 37 pages, avec un appendice de S. Bloch ; à paraître aux Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure.

[15] O. Wittenberg, *Sur une conjecture de Kato et Kuzumaki concernant les hypersurfaces de Fano*, 20 pages, à paraître à Duke Mathematical Journal.

[16] Y. Harpaz et O. Wittenberg, *On the fibration method for zero-cycles and rational points*, 51 pages.

Préambule

Les travaux présentés dans ce mémoire d'habilitation (références [5]–[16] dans la bibliographie) sont tous reliés, d'une façon ou d'une autre, à des questions portant sur l'arithmétique de diverses classes de variétés algébriques. On entend par là, notamment, l'étude des points rationnels des variétés sur $\mathbf{Q}$, mais aussi, plus généralement, de tout invariant de nature arithmétique associé à une variété définie sur un corps de nombres, sur un corps p-adique, voire, par extension, sur un corps strictement local (corps des fractions d'un anneau de valuation discrète strictement hensélien excellent, tel que $\mathbf{C}((t))$ ou l'extension non ramifiée maximale d'un corps p-adique). Parmi ces invariants, l'un des plus simples est le groupe de Chow des zéro-cycles à équivalence rationnelle près. Bien que de nature motivique, donc en principe plus accessible que les points rationnels, ce groupe reste à l'heure actuelle l'objet de nombreuses conjectures profondes même sur les corps algébriquement clos (conjecture de Bloch pour les surfaces complexes, de Bloch–Beilinson pour les variétés sur $\bar{\mathbf{Q}}$, etc). Ce groupe, qui n'intervient pas dans [1]–[4], joue un rôle de fil conducteur pour une grande partie des travaux [5]–[16]. Nous avons choisi de rassembler ceux-ci selon les trois thèmes suivants et de laisser de côté les articles [6] et [9], le premier étant un texte de synthèse et le second n'étant pas directement relié aux autres travaux présentés :

(1) Groupes fondamentaux, variétés d'Albanese et points rationnels ([5], [7], [8], [10]) ;

(2) Zéro-cycles sur les corps locaux et strictement locaux ([12], [14], [15]) ;

(3) Problèmes locaux-globaux et fibrations ([11], [13], [16]) ;

Le texte est composé de trois chapitres reflétant ce découpage, précédés d'une introduction générale aux questions abordées dans le mémoire.

Chapitre 1

Introduction

Notons X une variété algébrique propre, lisse et géométriquement irréductible sur un corps k. Un principe ancien, souligné par Weil et déjà manifeste dans l'énoncé des conjectures qui portent son nom, affirme que lorsque k est un corps de nombres, un corps local ou un corps fini, l'arithmétique de X est gouvernée par sa géométrie. À titre d'illustration, rappelons que si X est une courbe sur un corps de nombres, les questions qualitatives portant sur l'ensemble $X(k)$ des points rationnels de X admettent des réponses significativement différentes selon que le genre g de X est 0, 1 ou $\geqslant 2$. L'arithmétique des courbes de genre 0, dites rationnelles, est élémentaire : on dispose d'un critère simple pour l'existence d'un point rationnel (théorème de Hasse–Minkowski) et lorsqu'un tel point existe, la courbe X est isomorphe à $\mathbf{P}^1$. Pour les courbes de genre 1, c'est-à-dire les courbes elliptiques et leurs espaces homogènes, l'ensemble $X(k)$, s'il est non vide, peut être fini ou infini ; un critère effectif pour l'existence d'un point rationnel et une description complète de $X(k)$ sont donnés par l'algorithme de descente classique (dû à Mordell, Weil, Selmer, Cassels, Tate) sous l'hypothèse que le sous-groupe divisible du groupe de Tate–Shafarevich de la jacobienne de X est nul, hypothèse conjecturalement toujours satisfaite d'après Birch et Swinnerton-Dyer. Si X est une courbe de genre $\geqslant 2$, l'ensemble $X(k)$ est toujours fini (théorème de Faltings) ; la détermination effective de cet ensemble est cependant un problème plus difficile que dans le cas des courbes elliptiques. En dimension supérieure, les conjectures de Bombieri, Lang et Campana proposent une caractérisation géométrique de la propriété de Zariski-densité potentielle des points rationnels (cf. [**Abr09**]). Cette caractérisation et ses variantes quantitatives mises à part, les informations dont on dispose, même conjecturalement, sont très parcellaires en dimension $\geqslant 2$, à moins de se restreindre à des classes particulières de variétés, comme les variétés abéliennes ou les variétés rationnellement connexes. Au-delà de l'ensemble $X(k)$ des points rationnels, un invariant essentiel rendant compte à la fois de la géométrie de X, de l'arithmétique de X et de la nature de k est l'anneau de Chow

$$\mathrm{CH}^*(X) = \bigoplus_{i=0}^{\dim(X)} \mathrm{CH}^i(X)$$

des cycles algébriques sur X à équivalence rationnelle près, gradué par la codimension i des cycles. Pour $i \leqslant 1$, le groupe $\mathrm{CH}^i(X)$ est bien compris : $\mathrm{CH}^0(X) = \mathbf{Z}$ et $\mathrm{CH}^1(X) = \mathrm{Pic}(X)$, qui est une extension de $\mathrm{NS}(X)$, un groupe abélien de type fini, par $\mathrm{Pic}^0(X)$; le groupe $\mathrm{Pic}^0(X)$ s'identifie, lorsque X possède un point rationnel, au groupe des points rationnels d'une variété abélienne, la variété de Picard. De nombreuses conjectures portent sur les groupes $\mathrm{CH}^i(X)$ pour $i \geqslant 2$. Nous en citerons plus bas quelques-unes qui concernent le groupe de Chow des zéro-cycles $\mathrm{CH}_0(X) = \mathrm{CH}^{\dim(X)}(X)$, souvent étudié parallèlement à $X(k)$.

De façon générale, quelles que soient la géométrie de X et la nature de k, on aimerait disposer, au minimum, de critères pour l'existence de points rationnels sur X. L'un des premiers résultats en ce sens est le théorème de Tsen [**Tse33**], selon lequel si k est le corps des fonctions d'une courbe sur un corps algébriquement clos, toute hypersurface $V \subset \mathbf{P}^n_k$ de degré $d \leqslant n$ vérifie $V(k) \neq \varnothing$. Le même énoncé vaut pour les corps finis (théorème de Chevalley [**Che35**]) ainsi que pour l'extension non ramifiée maximale d'un corps p-adique ou pour le corps des séries formelles en une indéterminée à coefficients dans un corps algébriquement clos (théorème de Lang [**Lan52**]). Selon la terminologie d'Artin et Lang, les corps vérifiant cette propriété sont dits quasi-algébriquement clos ou C_1.

Les hypersurfaces lisses de $\mathbf{P}^n_k$ de degré $d \leqslant n$ sont des exemples de variétés de Fano (variétés projectives et lisses de classe anticanonique ample) et sont donc rationnellement connexes par chaînes d'après un théorème de Campana, Kollár, Miyaoka et Mori (cf. [**Cam92**], [**KMM92**]). Il s'ensuit, par un argument de dégénérescence, que toutes les hypersurfaces de $\mathbf{P}^n_k$ de degré $d \leqslant n$ sont rationnellement connexes par chaînes. Rappelons qu'une variété propre V sur k est dite *rationnellement connexe* (resp. *par chaînes*) si pour tout corps algébriquement clos K contenant k, deux K-points généraux de V peuvent être liés par une courbe rationnelle tracée sur X et définie sur K (resp. par une chaîne de telles courbes). Il existe une troisième propriété, plus forte, celle de variété *séparablement rationnellement connexe* (cf. [**Kol96**, Ch. IV]) ; sur un corps de caractéristique nulle, les trois conditions sont équivalentes. Rappelons aussi que la notion de connexité rationnelle occupe une place fondamentale dans la classification des variétés algébriques complexes ; les variétés rationnellement connexes semblent constituer le bon analogue, en dimension arbitraire, de la classe des surfaces rationnelles (compatibilité aux déformations, aux fibrations, etc).

Des généralisations des théorèmes de Tsen et de Lang aux variétés rationnellement connexes furent établies il y a une dizaine d'années. Graber, Harris, de Jong et Starr (cf. [**GHS03**], [**dJS03**]) ont montré que si X est séparablement rationnellement connexe et k est le corps des fonctions d'une courbe sur un corps algébriquement clos, alors $X(k) \neq \varnothing$. D'autre part, d'après Esnault [**Esn03**], si k est un corps fini, on a $X(k) \neq \varnothing$ dès que $\mathrm{CH}_0(X \otimes_k K) = \mathbf{Z}$ pour tout corps algébriquement clos K contenant k, une condition satisfaite notamment si X est rationnellement connexe par chaînes. (Rappelons que X est supposée lisse. Il existe des variantes de ce dernier théorème pour les variétés singulières, couvrant le cas des hypersurfaces de petit degré ; on renvoie à [6, §4.3] pour une discussion de leurs énoncés.) Ces deux théorèmes sont des cas particuliers de la conjecture suivante.

Conjecture 1.1 (Lang, Manin, Kollár). *Soit k un corps C_1. Soit X une variété propre, lisse, géométriquement irréductible sur k. Supposons X séparablement rationnellement connexe ou de Fano. Alors $X(k) \neq \varnothing$.*

Le cas ouvert le plus notable de cette conjecture est celui de l'extension non ramifiée maximale d'un corps p-adique. Nous y reviendrons au §3.1.

La structure plus précise de l'ensemble $X(k)$ (par exemple, le nombre de classes de R-équivalence) et la structure du groupe $\mathrm{CH}_0(X)$ lorsque X est une variété rationnellement connexe sur un corps C_1 sont incomprises même pour un corps aussi simple que $k = \mathbf{C}((t))$. Ces questions sont discutées dans [**CT11**] ; on trouvera dans [**Pir12**] des réponses pour les hypersurfaces de très petit degré.

Lorsque k est le corps des fonctions d'une courbe complexe, on dispose de la conjecture suivante pour les points rationnels des variétés rationnellement connexes. La notation $\mathbf{A}_k$ désigne l'anneau des adèles de k, c'est-à-dire, si B est la courbe irréductible, projective et lisse dont k est le corps des fonctions et si k_b désigne le complété de k en un point $b \in B(\mathbf{C})$, que $\mathbf{A}_k$ est le sous-anneau de $\prod_{b \in B(\mathbf{C})} k_b$ constitué des familles de fonctions dont seules un nombre fini ont des pôles.

Conjecture 1.2 (Hassett, Tschinkel [**HT06**]). *Soit k le corps des fonctions d'une courbe complexe. Soit X une variété propre, lisse et géométriquement irréductible sur k. Si X est rationnellement connexe, l'ensemble $X(k)$ est dense dans $X(\mathbf{A}_k)$.*

Lorsque $X(k)$ est dense dans $X(\mathbf{A}_k)$, on dit que X vérifie *l'approximation faible*. On renvoie à [**Has10**] pour un état des lieux sur cette conjecture en 2010 et à [**Xu12**], [**Kne13**], [**Tia13**] pour des résultats postérieurs. Notons d'autre part que si k est le corps des fonctions d'une courbe complexe et si X est une variété propre, lisse et géométriquement irréductible sur k qui possède un point rationnel et qui vérifie l'approximation faible, alors X est nécessairement rationnellement connexe (conséquence de l'argument dit de « *bend-and-break* », cf. [**Has10**, Corollary 2.16]).

Sur les corps de nombres, on sait depuis les années 1930 que même les variétés toriques ne vérifient pas toujours l'approximation faible : Hasse donna l'exemple d'une extension biquadratique K/k, avec $k = \mathbf{Q}$, et d'un torseur T sous le tore normique

$$R^1_{K/k}\mathbf{G}_\mathrm{m} = \mathrm{Ker}\Big(N_{K/k} : R_{K/k}\mathbf{G}_\mathrm{m} \to \mathbf{G}_\mathrm{m}\Big),$$

tels que toute compactification lisse X de T vérifie $X(\mathbf{A}_k) \neq \varnothing$ mais $X(k) = \varnothing$. Il existe en effet dans ce contexte une obstruction de nature cohomologique à la propriété d'approximation faible, obstruction qui s'évanouit pour les variétés simplement connexes sur le corps des fonctions d'une courbe complexe car ces derniers sont des corps de dimension cohomologique 1. Concrètement, dans l'exemple de Hasse, si l'on note $d = \dim(X)$, il s'avère qu'il n'existe même pas de classe de cohomologie étale $\alpha \in H^{2d}(X, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ dont l'image α_v dans $H^{2d}(X \otimes_k k_v, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$, pour toute place v de k, soit la classe de cycle d'un k_v-point de X.

Ce type d'obstruction fut formalisé par Manin [**Man71**] à l'aide de la théorie du corps de classes local et global et du groupe de Brauer cohomologique défini par Grothendieck par la formule $\mathrm{Br}(X) = H^2_{\text{ét}}(X, \mathbf{G}_\mathrm{m})$. Lorsque k est un corps de nombres, un sous-ensemble $X(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{Br}(X)}$ de $X(\mathbf{A}_k)$ est défini dans *op. cit.* de la façon suivante : un point adélique $(P_v)_{v\in\Omega} \in X(\mathbf{A}_k) = \prod_{v\in\Omega} X(k_v)$ est réputé appartenir à l'ensemble de Brauer–Manin $X(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{Br}(X)}$ si la somme des invariants locaux $\sum_{v\in\Omega} \mathrm{inv}_v\, \beta(P_v)$ est nulle pour toute classe $\beta \in \mathrm{Br}(X)$. Les invariants locaux sont les homomorphismes $\mathrm{inv}_v : \mathrm{Br}(k_v) \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ donnés par la théorie du corps de classes local. Le sous-ensemble $X(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{Br}(X)}$ est fermé dans $X(\mathbf{A}_k)$ et contient toujours $X(k)$ d'après la loi de réciprocité globale ; dans l'exemple de Hasse, il est vide. Pour les points rationnels des variétés rationnellement connexes, on dispose de la conjecture suivante, formulée par Colliot-Thélène et Sansuc en 1979 dans le cas des surfaces rationnelles.

Conjecture 1.3 (Colliot-Thélène [**CT03**]). *Soit k un corps de nombres. Soit X une variété propre, lisse et géométriquement irréductible sur k. Si X est rationnellement connexe, l'ensemble $X(k)$ est dense dans $X(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{Br}(X)}$.*

Une preuve de cette conjecture impliquerait la décidabilité algorithmique du problème de l'existence de points rationnels sur les variétés projectives, lisses et rationnellement connexes sur un corps de nombres (cf. [**Poo06**, Remark 5.3]). Elle entraînerait aussi que tout groupe fini est groupe de Galois sur $\mathbf{Q}$ (cf. [**Ser92**, Theorem 3.5.9]). Nous renvoyons à [**Pey05**] pour une discussion des cas connus les plus significatifs.

Lorsque X est une courbe, il semble probable que l'ensemble $X(k)$ soit également dense dans $X(\mathbf{A}_k)_\bullet^{\mathrm{Br}(X)}$ (cf. [**Sko01**, p. 128], [**Poo06**], [**Sto07**]), où

$$X(\mathbf{A}_k)_\bullet = \prod_{v\in\Omega_f} X(k_v) \times \prod_{v\in\Omega_\infty} \pi_0(X(k_v))$$

(selon la notation de Poonen). Pour une courbe de genre 1, cela résulterait de la nullité du sous-groupe divisible du groupe de Tate–Shafarevich de la jacobienne.

C'est une question ouverte de savoir si $X(k)$ est dense dans $X(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{Br}(X)}$ ou du moins dans $X(\mathbf{A}_k)_\bullet^{\mathrm{Br}(X)}$ si X est une surface $K3$. Des expériences sur ordinateur permettant de tester une version quantitative asymptotique conjecturale de cette affirmation suggèrent une réponse positive (van Luijk, Swinnerton-Dyer).

En l'absence d'hypothèses sur la géométrie de X, trois mécanismes conduisant à des obstructions à l'approximation faible en général strictement plus fines que celle donnée par l'ensemble de Brauer–Manin ont été dégagés depuis une quinzaine d'années : la descente non abélienne (cf. [**Sko01**, §5.3]), l'obstruction de Brauer–Manin étale (cf. [**Poo10**]) et l'approche des points fixes homotopiques (cf. [**HS13**]). Ces trois mécanismes sont en fait équivalents entre eux (cf. [**Sko09**], [**Dem09**], [**HS13**]) et ne suffisent pas à expliquer les défauts d'approximation faible observés depuis [**Poo10**] (cf. aussi [**Sme14**] et les références qui y sont données).

De façon plus significative, toutes les obstructions connues à l'approximation faible s'évanouissent pour les variétés simplement connexes dont le groupe de Brauer est réduit aux constantes. Pourtant, d'après les conjectures de Lang sur la Zariski-densité des points rationnels, que l'approximation faible vaille devrait être l'exception plutôt que la règle pour de telles variétés (par exemple, si $n \geqslant 4$, toute hypersurface lisse de $\mathbf{P}^n_k$ de degré $d > n$ est de type général et son groupe de Brauer est réduit aux constantes ; cf. [**SW95**] pour un exemple possédant un point adélique mais pas de point rationnel si les conjectures de Lang sont vraies). Un exemple de nature différente, dépendant de la conjecture *abc*, est donné dans [**Sme14**].

Dans le contexte des zéro-cycles, si X est une variété propre et lisse sur un corps de nombres k, on peut aussi formuler une obstruction cohomologique, dite de Brauer–Manin, à ce qu'une famille $(z_v)_{v\in\Omega} \in \prod_{v\in\Omega} \mathrm{CH}_0(X \otimes_k k_v)$ de zéro-cycles locaux à équivalence rationnelle près soit approchable par une classe de zéro-cycle global $z \in \mathrm{CH}_0(X)$. (Pour être précis, « approchable » signifie ici, dans le cas où les z_v ont tous le même degré, que pour tout entier $n \geqslant 1$, il existe z (dépendant de n) ayant même classe que $(z_v)_{v\in\Omega}$ dans $\prod_{v\in\Omega} \mathrm{CH}_0(X \otimes_k k_v)/n\mathrm{CH}_0(X \otimes_k k_v)$.) Dans ce cadre, on dispose d'une conjecture très générale, dans laquelle la géométrie de X est arbitraire, affirmant que toute famille de zéro-cycles locaux devrait être approchable par un zéro-cycle global dès que l'obstruction de Brauer–Manin ne s'y oppose pas. Cette conjecture fut formulée dans [**CTS81**, §4] dans le cas des surfaces rationnelles et fut généralisée par la suite à toutes les variétés propres et lisses. Pour simplifier, nous n'énonçons que sa conséquence quant à l'existence de zéro-cycles de degré 1.

Conjecture 1.4 (Colliot-Thélène [**CT95**, §1], Kato et Saito [**KS86**, §7]). *Soit k un corps de nombres. Soit X une variété propre, lisse et géométriquement irréductible sur k. S'il existe une famille $(z_v)_{v\in\Omega} \in \prod_{v\in\Omega} \mathrm{CH}_0(X \otimes_k k_v)$ orthogonale à $\mathrm{Br}(X)$ pour l'accouplement de Brauer–Manin et si $\deg(z_v) = 1$ pour tout $v \in \Omega$, alors X possède un zéro-cycle de degré 1.*

Cette conjecture est connue pour les courbes sous l'hypothèse que le sous-groupe divisible du groupe de Tate–Shafarevich de la jacobienne est nul, ainsi que pour diverses variétés de dimension supérieure dont nous reparlerons au chapitre 4. Dans le cas des surfaces rationnelles, elle est complétée dans [**CTS81**] par une conjecture sur le noyau de la flèche naturelle $\theta : \mathrm{CH}_0(X) \to \prod_{v\in\Omega} \mathrm{CH}_0(X \otimes_k k_v)$: celui-ci devrait s'exprimer en termes de la cohomologie galoisienne du tore S dont le groupe des caractères est le groupe de Néron–Severi géométrique de X, par la formule $\mathrm{Ker}(\theta) = \mathrm{Ker}\big(H^1(k,S) \to \prod_{v\in\Omega} H^1(k_v,S)\big)$. Il serait très souhaitable de disposer d'une conjecture plausible sur le noyau de θ pour des variétés propres et lisses arbitraires (cf. [**Sur96**], [**GA05**] ; notons que θ est bien sûr injective lorsque X est une courbe).

Les conjectures que l'on vient d'évoquer devraient permettre, au moins dans le cas des surfaces rationnelles, de ramener la détermination du groupe $\mathrm{CH}_0(X)$ à celle des groupes $\mathrm{CH}_0(X \otimes_k k_v)$ pour $v \in \Omega$, lorsque k est un corps de nombres. On trouvera ainsi dans [**CTS81**, Table 1] des exemples de calculs du groupe $\mathrm{CH}_0(X)$ pour des surfaces de Châtelet sur $\mathbf{Q}$.

Pour des variétés plus générales, sans même parler de la détermination de ce groupe, la plupart des questions concernant sa structure sont ouvertes, que ce soit sur un corps de nombres, sur un corps local ou sur les complexes. Citons-en quelques-unes, formulées en termes du groupe $A_0(X) = \mathrm{Ker}(\deg : \mathrm{CH}_0(X) \to \mathbf{Z})$:

(1) si $k = \mathbf{C}$, l'application d'Albanese $A_0(X) \to \mathrm{Alb}(X)$ est un isomorphisme si et seulement si $A_0(X)$ est « représentable » par une variété algébrique, si et seulement si $H^i(X, \mathscr{O}_X) = 0$ pour tout $i \geqslant 2$ (conjecture de Bloch) ;

(2) si k est un corps p-adique, le noyau de l'application d'Albanese est la somme directe d'un groupe fini et d'un groupe divisible (une question très proche est soulevée dans [**CT95**] ; voir aussi [**SS10**, Conjecture 0.1] et les références données dans *loc. cit.*) ;

(3) si k est un corps de nombres, le groupe $A_0(X)$ est de type fini (conjecture de Beilinson et Bloch).

À la divisibilité par p près, la conjecture (2) est un théorème récent de Saito et Sato [**SS10**]. Il serait intéressant de savoir démontrer que le sous-groupe de torsion p-primaire de $A_0(X)$ est fini lorsque X est une variété rationnellement connexe sur un corps p-adique : la finitude de $A_0(X)$ pour une telle variété sur un tel corps s'ensuivrait. (En effet, l'argument de décomposition de la diagonale montre, quels que soient le corps k et la variété X, que $A_0(X)$ est d'exposant fini si $A_0(X \otimes_k K) = 0$ pour tout corps K algébriquement clos contenant k.) La conjecture (1), triviale pour les courbes, est connue pour les surfaces qui ne sont pas de type général ainsi que pour quelques surfaces de type général (cf. [**BCP11**, §3.1]). La conjecture (3) est connue pour les courbes (théorème de Mordell–Weil), pour les surfaces rationnelles (cf. [**CT83**]) et plus généralement pour les surfaces vérifiant à la fois la condition $H^1(X, \mathscr{O}_X) = H^2(X, \mathscr{O}_X) = 0$ et la conjecture de Bloch (cf. [**Coo91**], [**CTR85**]).

Nous reviendrons notamment au §3.3 sur la détermination du groupe $A_0(X)$ dans la situation de la conjecture (2).

Chapitre 2

Groupes fondamentaux, variétés d'Albanese et points rationnels

2.1. Conjectures anabéliennes

Si X est une variété connexe sur un corps k, munie d'un point géométrique ξ, on note $\pi_1(X, \xi)$ le groupe fondamental étale de X pointé en ξ, défini par Grothendieck dans [**SGA1**]. Rappelons que si X est propre et si k est algébriquement clos de caractéristique nulle, ce groupe est isomorphe au complété profini du groupe fondamental usuel de $X_0(\mathbf{C})$, où X_0 désigne un schéma défini sur un sous-corps k_0 de $\mathbf{C}$ tel que X/k se déduise de X_0/k_0 par une extension des scalaires. En général, si X est géométriquement connexe, on dispose d'une suite exacte de groupes profinis

$$(\star) \qquad 1 \longrightarrow \pi_1(\bar{X}, \xi) \longrightarrow \pi_1(X, \xi) \longrightarrow \mathrm{Gal}(\bar{k}/k) \longrightarrow 1$$

où $\bar{k}$ désigne une clôture séparable de k (la fermeture séparable de k dans le corps résiduel de ξ) et où $\bar{X} = X \otimes_k \bar{k}$. Ainsi, si X est propre et géométriquement connexe, comme on le supposera dorénavant, et si k est un sous-corps de $\mathbf{C}$, le groupe fondamental étale $\pi_1(X, \xi)$ est présenté comme extension du groupe de Galois absolu $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ par le complété profini du groupe fondamental topologique de $X(\mathbf{C})$. Le groupe $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ agit donc extérieurement sur ce complété profini de façon naturelle.

Lorsque k est un corps de nombres et que X est une courbe hyperbolique, Grothendieck a conjecturé dans [**Gro83**] que la richesse de cette action extérieure devrait permettre de reconstituer la géométrie de X à partir de la seule suite exacte de groupes profinis $(\star)$. Plus précisément, il a conjecturé, pour des schémas propres, que la donnée d'un morphisme entre schémas « anabéliens » est équivalente à celle d'un morphisme de groupes profinis entre les groupes fondamentaux étales des schémas considérés, à automorphismes intérieurs près. (Pour des schémas qui ne sont pas propres, l'énoncé de la conjecture doit être légèrement modifié, cf. [**Gro83**].) La notion de schéma anabélien n'est pas précisément définie dans *op. cit.* mais elle englobe, sur les corps de nombres, les courbes hyperboliques, les espaces de modules de courbes ainsi que des voisinages ouverts arbitrairement petits de tout point de toute variété lisse.

Les conjectures anabéliennes de Grothendieck furent établies pour les morphismes dominants entre courbes hyperboliques par Nakamura, Tamagawa et

Mochizuki au cours des années 1990 (cf. [**NTM98**]). Le cas des morphismes du point vers une courbe hyperbolique est le cas ouvert le plus important à l'heure actuelle. Il porte le nom de « conjecture des sections » et peut s'énoncer comme suit. Notons $S_{X/k}$ l'ensemble des homomorphismes continus $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k) \to \pi_1(X,\xi)$ qui sont des sections de la projection canonique $\pi_1(X,\xi) \to \mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$, considérés à conjugaison par $\pi_1(\bar{X},\xi)$ près. Pour $x \in X(k)$, le morphisme $x : \mathrm{Spec}(k) \to X$ induit, par fonctorialité, un morphisme $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k) \to \pi_1(X,\bar{x})$ si $\bar{x}$ désigne un point géométrique de X au-dessus de x. Comme le choix d'un chemin étale de $\bar{x}$ à ξ qui sur les revêtements provenant de $\mathrm{Spec}(k)$ est l'identité fournit un isomorphisme $\pi_1(X,\bar{x}) \simeq \pi_1(X,\xi)$ compatible aux projections vers $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$, tout point $x \in X(k)$ détermine un élément $s_x \in S_{X/k}$.

Conjecture 2.1 (Grothendieck [**Gro83**]). *Soit k un corps de nombres. Soit X une courbe projective, lisse et géométriquement irréductible sur k. Si le genre de X est $\geqslant 2$, l'application $X(k) \to S_{X/k}$, $x \mapsto s_x$ est une bijection.*

L'injectivité était connue de Grothendieck et résulte du théorème de Mordell–Weil. Ce que la conjecture affirme, c'est que toute section de $(\star)$ provient d'un point rationnel. Elle entraîne en particulier :

Conjecture 2.2 (conjecture des sections faible). *Soit k un corps de nombres. Soit X une courbe projective, lisse et géométriquement irréductible sur k. Si le genre de X est $\geqslant 2$ et si le morphisme de groupes profinis $\pi_1(X,\xi) \to \mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ admet une section, alors $X(k) \neq \varnothing$.*

Un argument de compacité combiné au théorème de Faltings permet de voir que la version faible et la version forte de la conjecture des sections sont en fait équivalentes. D'autre part, la conjecture s'énonce plus généralement pour des courbes hyperboliques non nécessairement projectives (courbes lisses qui sont géométriquement le complémentaire de ν points dans une courbe irréductible, projective et lisse de genre g, avec $2-2g-\nu<0$), mais il faut alors tenir compte des points rationnels à l'infini, qui donnent aussi naissance à des sections de $(\star)$ *via* le choix de points base tangentiels (cf. l'exposition de Deligne [**Del89**, §15]). De toute façon, la conjecture pour les courbes hyperboliques est une conséquence de la conjecture pour les courbes hyperboliques projectives (cf. [**Sti13**, Proposition 103]). Le passage à des variétés ouvertes et à des schémas anabéliens de dimension supérieure permet néanmoins d'énoncer la variante suivante de la conjecture :

Conjecture 2.3 (conjecture des sections birationnelle, cf. [**Gro83**]). *Soit k un corps de nombres. Soit X une variété propre, lisse et géométriquement irréductible sur k. Notons $G_{k(X)}$ le groupe de Galois absolu de $k(X)$ et G_k celui de k. Si le morphisme de groupes profinis $G_{k(X)} \to G_k$ admet une section, alors $X(k) \neq \varnothing$.*

La seconde démonstration donnée par Mochizuki des conjectures anabéliennes pour les morphismes dominants entre courbes hyperboliques passait par la théorie de Hodge p-adique et démontre en fait l'énoncé voulu pour des courbes définies non seulement sur un corps de nombres mais aussi sur un corps p-adique (cf. [**Moc99**]). Par ailleurs, Koenigsmann [**Koe05**, Remark 2.5] a établi l'énoncé de la conjecture des sections birationnelle lorsque k est un corps p-adique, à l'aide de théorie des modèles. Pour ces raisons, il paraît légitime d'espérer que toutes les conjectures énoncées ci-dessus valent aussi sur un corps p-adique.

Nous renvoyons à [**HS12**] pour une étude détaillée des liens entre conjecture des sections et obstructions à l'existence de points rationnels données par la descente non abélienne, à [**Pop12**] pour un survol sur les thèmes anabéliens et à [**Sti13**] pour un exposé complet des résultats connus sur la conjecture des sections.

Les articles [7], [8] et [10] portent directement sur la conjecture des sections. L'article [5] concerne lui aussi les groupes fondamentaux, à travers les variétés d'Albanese ; ses résultats sont utilisés dans [8], qui dépend également, pour un point secondaire, de [7]. Nous discutons [7] et [10] au §2.2 puis [5] et [8] au §2.3.

2.2. Classes de cycles de sections ([7], [10])

2.2.1. Stratégie. Soit X une variété lisse, géométriquement irréductible et séparée sur un corps k, munie d'un point base géométrique ξ. Pour simplifier, supposons k de caractéristique nulle. Dans toute situation dans laquelle on voudrait montrer qu'une section $s : \mathrm{Gal}(\bar{k}/k) \to \pi_1(X, \xi)$ du groupe fondamental arithmétique est, à conjugaison près, la section associée à un point rationnel de X, une stratégie pour arriver à cette fin pourrait être la suivante :

(1) associer canoniquement à s une classe α dans le groupe de cohomologie étale à supports compacts $H^{2d}_c(X, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}(d))$, où $d = \dim(X)$, de telle sorte que α soit la classe de cycle de x si s provient d'un point $x \in X(k)$;

(2) montrer que α est algébrique, c'est-à-dire appartient à l'image de l'application classe de cycle $Z_0(X) \to H^{2d}_c(X, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}(d))$, où $Z_0(X)$ désigne le groupe des zéro-cycles sur X ;

(3) montrer enfin que α est non seulement la classe d'un zéro-cycle mais aussi celle d'un point rationnel.

Cette stratégie, proposée dans [7], est partiellement réalisée dans [7]. L'étape (1) y est accomplie en entier (sous la seule hypothèse que X est un espace $K(\pi, 1)$ au sens de la cohomologie étale) et nous y menons à bien l'étape (2) dans diverses situations où k est un corps local. Il en résulte notamment une nouvelle démonstration d'un théorème de Stix [**Sti10**] selon lequel si X est une courbe projective, lisse, géométriquement irréductible, de genre $\geqslant 1$ sur un corps p-adique et si la suite $(\star)$ est scindée, la courbe X possède un zéro-cycle de degré une puissance de p. Le formalisme des classes de cycles de sections du groupe fondamental arithmétique possède d'autres applications ; nous nous en servirons au §2.2.4 pour vérifier la conjecture des sections sur un exemple classique d'une courbe de genre 3 définie sur $\mathbf{Q}$, la courbe quartique de Schinzel. Cette courbe ne possède pas de point rationnel mais possède un point dans chaque complété de $\mathbf{Q}$, de sorte qu'aucune obstruction locale ne peut empêcher l'existence d'une section du groupe fondamental arithmétique.

On renvoie à [**Sti13**, Chapter 6] pour diverses définitions alternatives de la classe de cycle d'une section, pour une adaptation à la cohomologie étale continue et pour les liens avec le faisceau logarithmique intervenant dans la définition des extensions polylogarithmiques sur les courbes (cf. [**Kin09**]).

2.2.2. Construction. Nous allons associer une classe de cohomologie à toute section du groupe fondamental arithmétique d'une variété qui est un $K(\pi, 1)$ au sens de la définition suivante.

Définition 2.4. Une variété connexe X sur un corps k est un $K(\pi, 1)$ si pour tout entier n inversible dans k et tout $i \geqslant 1$, le groupe $\varinjlim H^i(Y, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$ s'annule, où la limite inductive porte sur l'ensemble des X-schémas finis étales connexes Y par lesquels se factorise un pro-revêtement universel fixé de X.

Cette hypothèse est satisfaite dès que X est une courbe irréductible, projective et lisse de genre $\geqslant 1$ ou que X est une courbe irréductible, affine, lisse.

Théorème 2.5 ([7, §2]). *Soit k un corps. Il existe une unique façon d'associer à toute variété X lisse, géométriquement irréductible et séparée sur k, munie d'un point géométrique ξ et vérifiant la condition $K(\pi, 1)$, à tout entier n inversible dans k et à toute section $s : \mathrm{Gal}(\bar{k}/k) \to \pi_1(X, \xi)$ une classe $\alpha = \alpha(X, s, n) \in H^{2d}_c(X, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}(d))$, où $d = \dim(X)$, de telle sorte que :*

(1) α est de degré 1 ;

(2) la formation de α est compatible aux images directes par les morphismes quasi-finis et plats.

La formation de α est compatible aux changements de coefficients. De plus, si s est la section associée à un point rationnel $x \in X(k)$, la classe α est la classe de cycle de x.

Précisons le sens de l'énoncé : le degré de α est entendu comme l'image de α dans $H^{2d}_c(\bar{X}, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}(d)) = \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, où $\bar{X} = X \otimes_k \bar{k}$. La compatibilité aux images directes signifie que pour tout morphisme quasi-fini et plat $f : X \to X'$, l'image de α par l'application $f_* : H^{2d}_c(X, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}(d)) \to H^{2d}_c(X', \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}(d))$ (cf. [**Del73**, §6.2.7]) est la classe associée à la section composée $s' = \pi_1(f) \circ s$.

Idée de la preuve. Notons $X_\xi \to X$ le pro-revêtement universel de (X, ξ). C'est une limite projective de revêtements étales connexes pointés. Si $\bar{k}$ désigne comme précédemment la fermeture séparable de k dans le corps résiduel de ξ, on dispose d'un pro-revêtement étale connexe $\bar{X} \to X$ canoniquement pointé au-dessus de ξ, d'où une factorisation $X_\xi \to \bar{X} \to X$. La donnée de s équivaut alors à celle d'une k-forme $X_s \to X$ du pro-revêtement étale $X_\xi \to \bar{X}$. La preuve du théorème 2.5 consiste à montrer, à l'aide de l'hypothèse $K(\pi, 1)$, que la cohomologie étale de $X \times_k X_s$ est la même que celle de X, au sens où l'application image réciproque par la première projection est un isomorphisme

$$H^{2d}(X, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}(d)) \xrightarrow{\sim} H^{2d}(X \times_k X_s, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}(d)),$$

puis à définir α comme l'image réciproque, par cet isomorphisme, de la classe de cycle du graphe du pro-revêtement $X_s \to X$. □

2.2.3. Algébricité sur les corps locaux. Passons à la question de l'algébricité. Soit dorénavant X une courbe projective, lisse, géométriquement irréductible sur k, de genre $\geqslant 1$. Pour n inversible dans k, la suite de Kummer pour la multiplication par n sur $\mathbf{G}_\mathrm{m}$ induit une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathrm{Pic}(X)/n\mathrm{Pic}(X) \longrightarrow H^2(X, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}(1)) \longrightarrow {}_n\mathrm{Br}(X) \longrightarrow 0, \tag{2.1}$$

où ${}_n\mathrm{Br}(X)$ désigne la n-torsion de $\mathrm{Br}(X)$. Si $s : \mathrm{Gal}(\bar{k}/k) \to \pi_1(X, \xi)$ est une section, l'algébricité de la classe de cohomologie associée à s est donc contrôlée par son image dans le groupe de Brauer de X.

Supposons que k soit un corps de caractéristique nulle dont la cohomologie galoisienne à valeurs dans tout module fini soit finie, par exemple un corps local. La formation de $\alpha(X, s, n)$ étant compatible aux changements de coefficients, on obtient, en faisant varier n, une classe $\alpha \in H^2(X, \mathbf{Z}_\ell(1)) = \varprojlim H^2(X, \mathbf{Z}/\ell^N\mathbf{Z}(1))$ pour chaque nombre premier ℓ. Passant à la limite dans (2.1), on voit que l'obstruction pour que α soit algébrique est une classe $\beta \in T_\ell(\mathrm{Br}(X)) = \mathrm{Hom}(\mathbf{Q}_\ell/\mathbf{Z}_\ell, \mathrm{Br}(X))$.

Une situation dans laquelle la stratégie du §2.2.1 fonctionne complètement est celle de la conjecture des sections réelle, établie en premier par Mochizuki [**Moc03**, Theorem 3.13]. Son énoncé est le même que celui de la conjecture 2.1 avec $k = \mathbf{R}$, à ceci près que l'ensemble $X(k)$ doit être remplacé par $\pi_0(X(\mathbf{R}))$. De la même façon que la conjecture 2.1 est équivalente à la conjecture 2.2, il suffit, pour établir la conjecture des sections réelle, de montrer que $X(\mathbf{R})$ est non vide dès que la suite ($\star$) est scindée. La preuve de Mochizuki repose sur un théorème de Cox en géométrie algébrique réelle. D'autres preuves ont été données, qui dépendent aussi de divers résultats de géométrie algébrique réelle, notamment le théorème de Witt (voir [**Sti13**, §16.1] pour un survol). Le formalisme des classes de cycles de sections fournit une démonstration très simple. En effet, on a $\mathrm{Br}(X \otimes_\mathbf{R} \mathbf{C}) = 0$ d'après le théorème de Tsen, donc $\mathrm{Br}(X)$ est annulé par 2, de sorte que $T_2(\mathrm{Br}(X)) = 0$; par conséquent, la classe α à coefficients $\mathbf{Z}_2$ est algébrique ; il existe ainsi un élément de $\mathrm{Pic}(X)\widehat{\otimes}\mathbf{Z}_2 = \varprojlim \mathrm{Pic}(X)/2^N\mathrm{Pic}(X)$ de degré 1, ce qui entraîne que X possède un zéro-cycle de degré impair et donc un point rationnel puisque $\mathbf{R}$ ne possède pas d'extension finie non triviale de degré impair.

Sur un corps p-adique, nous établissons dans [7] les résultats suivants en direction de l'algébricité de α.

Théorème 2.6 ([7, §3]). *Soit X une courbe projective, lisse, géométriquement irréductible, de genre $\geqslant 1$, sur un corps p-adique k. Soit $s : \mathrm{Gal}(\bar{k}/k) \to \pi_1(X, \xi)$ une section du groupe fondamental arithmétique. Soient ℓ un nombre premier et $\alpha \in H^2(X, \mathbf{Z}_\ell(1))$ la classe de cycle ℓ-adique de s.*

(1) si s se relève en une section birationnelle (c'est-à-dire en une section de la projection $G_{k(X)} \to G_k$), alors α est algébrique.

(2) si $\ell \neq p$, alors α est algébrique.

Si s se relève en une section birationnelle, le théorème 2.5 assure que α se relève à $H^2_c(U, \mathbf{Z}_\ell(1))$ pour tout ouvert dense $U \subset X$, d'où il résulte que $\beta(x) = 0$ pour tout point fermé $x \in X$; par dualité de Tate–Lichtenbaum, cela force l'annulation de β et donc l'algébricité de α. Cela dit, sous l'hypothèse que s se relève en une section birationnelle, le théorème de Koenigsmann entraîne de toute façon que s et α proviennent même d'un point rationnel. Le contenu du théorème 2.6, et aussi le résultat principal de [7], est réellement l'assertion (2). Sa démonstration, esquissée ci-dessous, repose seulement sur une étude minutieuse des relations entre les classes de cycles ℓ-adiques des sections du groupe fondamental arithmétique induites par s dans la tour des revêtements finis étales de X déterminée par s.

Esquisse de preuve de (2). Notons $X_s \to X$ la k-forme du pro-revêtement étale connexe $X_\xi \to \bar{X}$ déterminée par s (cf. l'esquisse de preuve du théorème 2.5). Notons ensuite $\pi : Y \to X$ un revêtement étale fini connexe par lequel $X_s \to X$ se factorise. Par construction, la section s est à valeurs dans le sous-groupe $\pi_1(Y, \xi) \subset \pi_1(X, \xi)$; elle détermine donc une classe $\alpha_Y \in H^2(Y, \mathbf{Z}_\ell(1))$ telle que $\pi_*\alpha_Y = \alpha$, d'après le théorème 2.5.

Lemme 2.7. *On a $\pi^*\alpha = \deg(\pi)\alpha_Y$ dans $H^2(Y, \mathbf{Q}_\ell(1))$.*

Esquisse de preuve. L'application $\pi_* : H^2(Y, \mathbf{Q}_\ell(1)) \to H^2(X, \mathbf{Q}_\ell(1))$ est surjective puisque $\pi_* \circ \pi^*$ est la multiplication par $\deg(\pi)$. On peut démontrer, à l'aide de l'hypothèse $\ell \neq p$ et d'un argument reposant sur les poids, que $\dim H^2(Y, \mathbf{Q}_\ell(1)) = \dim H^2(X, \mathbf{Q}_\ell(1)) = 2$. La surjectivité de π_* implique donc son injectivité. Or $\pi_*(\pi^*\alpha - \deg(\pi)\alpha_Y) = 0$, d'où le lemme. ☐

Considérons maintenant l'accouplement

$$- \smile - : H^2(X, \mathbf{Q}_\ell(1)) \times H^2(X, \mathbf{Q}_\ell(1)) \to \mathbf{Q}_\ell$$

donné par le cup-produit et par l'identification canonique $H^4(X, \mathbf{Q}_\ell(2)) = \mathbf{Q}_\ell$. D'après le lemme ci-dessus et la formule de projection, on a l'égalité

$$\alpha \smile \alpha = \alpha \smile \pi_*\alpha_Y = \pi_*(\pi^*\alpha \smile \alpha_Y) = \deg(\pi)\pi_*(\alpha_Y \smile \alpha_Y)$$

dans $\mathbf{Q}_\ell$. Mais $\alpha \smile \alpha$ et $\alpha_Y \smile \alpha_Y$ sont des éléments de $\mathbf{Z}_\ell$ (l'accouplement est en effet défini à coefficients $\mathbf{Z}_\ell$) ; il s'ensuit que $\alpha \smile \alpha$ est divisible par $\deg(\pi)$ dans $\mathbf{Z}_\ell$. Choisissant Y de degré divisible par une puissance arbitrairement grande de ℓ, on conclut que $\alpha \smile \alpha = 0$.

On a déjà souligné que $H^2(X, \mathbf{Q}_\ell(1))$ est un $\mathbf{Q}_\ell$-espace vectoriel de dimension 2. Cet espace contient deux droites canoniques distinctes : la droite $H^2(k, \mathbf{Q}_\ell(1))$ des classes de degré 0 et la droite $\mathrm{Pic}(X)\widehat{\otimes}\mathbf{Q}_\ell$ des classes algébriques. Une conséquence de la dualité de Tate–Lichtenbaum est que ces deux droites sont des sous-espaces totalement isotropes maximaux pour l'accouplement considéré ci-dessus. Pour montrer que α est algébrique, il suffit donc de voir que $\alpha \smile \lambda = 0$ si $\lambda \in H^2(X, \mathbf{Q}_\ell(1))$ est algébrique de degré 1. Or cela résulte tout de suite des trois égalités $\alpha \smile \alpha = 0$ (prouvée précédemment), $\lambda \smile \lambda = 0$ (car λ est algébrique) et $(\alpha - \lambda) \smile (\alpha - \lambda) = 0$ (car $\alpha - \lambda$ est de degré 0 donc provient de $H^2(k, \mathbf{Q}_\ell(1))$). $\square$

On notera que bien que le théorème 2.5 construise des classes de cohomologie à coefficients finis, il est indispensable, pour la preuve du théorème 2.6, de travailler à la fois avec des coefficients $\mathbf{Q}_\ell$ (pour le lemme 2.7) et avec des coefficients $\mathbf{Z}_\ell$ (pour l'argument de divisibilité qui suit ce lemme).

Dans la situation du théorème 2.6, l'algébricité de α entraîne l'existence, sur X, d'un zéro-cycle de degré premier à ℓ. Le théorème 2.6 a donc pour corollaire l'énoncé suivant, établi indépendamment par Stix [**Sti10**] à l'aide d'un théorème de Lichtenbaum [**Lic69**] comparant période et indice d'une courbe sur un corps p-adique : si X est une courbe projective, lisse, géométriquement irréductible, de genre $\geqslant 1$, sur un corps p-adique, et si la suite $(\star)$ est scindée, alors X possède un zéro-cycle de degré une puissance de p. C'est un pas modeste en direction de de la conjecture des sections p-adique, pour laquelle le point crucial semble être l'algébricité de α pour $\ell = p$.

2.2.4. Algébricité sur les corps de nombres. Le corollaire au théorème 2.6 que l'on vient de discuter et l'analogue réel de la conjecture 2.2 permettent de donner les premiers exemples de courbes hyperboliques sur un corps de nombres vérifiant l'énoncé de la conjecture des sections. Ces exemples sont les courbes X projectives, lisses, géométriquement irréductibles et de genre $\geqslant 2$, sur un corps de nombres k, pour lesquelles il existe soit une place réelle v telle que $X(k_v) = \varnothing$, soit une place finie v telle que $X \otimes_k k_v$ ne possède pas de zéro-cycle de degré une puissance de la caractéristique résiduelle de v (cf. [**Sti10**, §7]). Il est plus difficile de donner des exemples parmi les courbes X possédant des points adéliques. Seuls deux tels exemples sont connus. Le premier, dû à Harari, Szamuely, Flynn [**HS09**], est construit sur mesure et repose sur de nombreux théorèmes arithmétiques globaux, au rang desquels la finitude du groupe de Tate–Shafarevich des courbes elliptiques modulaires de rang analytique 0, la modularité des courbes elliptiques sur $\mathbf{Q}$, etc. Le second exemple, traité dans [10], est la courbe de Schinzel [**Sch84**], un exemple bien connu de courbe X projective et lisse sur $\mathbf{Q}$, de genre 3, telle que $X(\mathbf{Q}) = \varnothing$ mais $X(\mathbf{A}_{\mathbf{Q}}) \neq \varnothing$. La démonstration du théorème ci-dessous fait seulement appel aux résultats d'algébricité locaux présentés au §2.2.3 et à la loi de réciprocité de la théorie du corps de classes global.

Théorème 2.8 ([10]). *Si $X \subset \mathbf{P}^2_{\mathbf{Q}}$ est la courbe d'équation $x^4 - 17z^4 = 2(y^2+4z^2)^2$, la suite exacte de groupes profinis $(\star)$ n'est pas scindée.*

Esquisse de preuve. L'idée principale est que si $s : \mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}) \to \pi_1(X,\xi)$ est une section de $(\star)$, alors, même si l'on ne sait pas que les sections locales induites $s_v : \mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}_v/\mathbf{Q}_v) \to \pi_1(X \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}_v, \xi)$ proviennent de points locaux de X lorsque v parcourt l'ensemble des places de $\mathbf{Q}$, les classes de cycles α_v associées aux sections s_v par le théorème 2.5 sont suffisamment contraintes pour qu'il soit possible de répéter, en termes des α_v et de la classe globale α associée à s, l'argument classique démontrant la vacuité de $X(\mathbf{A}_{\mathbf{Q}})^{\mathrm{Br}(X)}$ à partir de la loi de réciprocité globale et de l'algèbre de quaternions $Q = ((y/z)^2+4, 17)$. La mise en œuvre de cette idée passe par une étude délicate de la cohomologie étale de courbes ouvertes bien choisies contenues dans X.

Concrètement, la démonstration du théorème 2.8 repose sur un critère général, que nous n'énonçons pas ici (cf. [10, Théorème 2.1]), assurant que la suite $(\star)$ n'est pas scindée et sur la vérification de ce critère dans le cas de la courbe de Schinzel. Dans cet exemple, vérifier le critère consiste à montrer que la classe de Q dans ${}_2\mathrm{Br}(X)$ admet un relèvement $\gamma \in H^2(X, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ dont l'image dans $H^2(X \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}_2, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ est la classe de cycle d'un élément de torsion de $\mathrm{Pic}(X \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}_2)$ (cf. [10, §3] pour l'argument ; c'est la partie la moins aisée de la démonstration). Admettant l'existence d'un tel γ ainsi que d'une section $s : \mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}) \to \pi_1(X,\xi)$ de $(\star)$, notons $\alpha \in H^2(X, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ la classe de cycle de s et considérons l'image $\delta \in \mathrm{Br}(k)$ du cup-produit $\alpha \smile \gamma$ par l'application bord

$$H^4(X, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \to H^2(k, H^2(\bar{X}, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})) = H^2(k, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) = {}_2\mathrm{Br}(k)$$

issue de la suite spectrale de Hochschild–Serre. Pour toute place v de $\mathbf{Q}$, soit α_v l'image de α dans $H^2(X \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}_v, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$. C'est en combinant les ingrédients suivants que l'on aboutit à une contradiction (cf. [10, §2] pour les détails) : la nullité de la somme $\sum_{v\in\Omega} \mathrm{inv}_v\, \delta$, l'algébricité de α_v pour toute place v de $\mathbf{Q}$ différente de 2 (théorème 2.6 et conjecture des sections réelle), l'existence d'un relèvement de α_2 à la cohomologie entière $H^2(X \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}_2, \mathbf{Z}_2(1))$ (théorème 2.5) et enfin le fait bien connu que l'algèbre de quaternions Q est responsable d'une obstruction de Brauer–Manin à l'existence d'un zéro-cycle de degré 1 sur X. $\square$

2.3. Périodes génériques et sections birationnelles abéliennes ([5], [8])

2.3.1. Conjecture birationnelle abélienne. L'article [8] est consacré à la variante birationnelle abélienne de la conjecture 2.3 : nous étudions l'énoncé obtenu lorsque l'on remplace le groupe fondamental géométrique par son abélianisé. Autrement dit, nous considérons la suite exacte de groupes profinis

$$(\sharp) \qquad 1 \longrightarrow G^{\mathrm{ab}}_{\bar{k}(X)} \longrightarrow G^{[\mathrm{ab}]}_{k(X)} \longrightarrow G_k \longrightarrow 1$$

où $G_k = \mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$, $G^{\mathrm{ab}}_{\bar{k}(X)} = \mathrm{Gal}(\bar{k}(X)^{\mathrm{ab}}/\bar{k}(X))$ et $G^{[\mathrm{ab}]}_{k(X)} = \mathrm{Gal}(\bar{k}(X)^{\mathrm{ab}}/k(X))$, en notant $\bar{k}(X)^{\mathrm{ab}}$ l'extension abélienne maximale de $\bar{k}(X)$, pour une variété X géométriquement irréductible et lisse sur un corps k. L'extension ($\sharp$) définit un élément de $H^2(k, G^{\mathrm{ab}}_{\bar{k}(X)})$; un argument de restriction-corestriction dans ce groupe abélien permet de voir que ($\sharp$) est scindée dès que X possède un zéro-cycle de degré 1. Si l'on suppose ($\sharp$) scindée, on ne peut donc pas espérer prouver mieux que l'existence d'un zéro-cycle de degré 1 sur X. Nous montrons que c'est précisément ce qui se passe dans le cas des courbes sur les corps de nombres.

Théorème 2.9 ([8, Theorem 2.1]). *Soit X une courbe propre, lisse et géométriquement irréductible sur un corps de nombres k. Supposons le sous-groupe divisible du groupe de Tate–Shafarevich de la jacobienne de X nul. Alors ($\sharp$) est scindée si et seulement si X possède un zéro-cycle de degré 1.*

Ce théorème peut être considéré comme l'analogue birationnel abélien de la conjecture 2.2. Notons qu'au moins dans le cas des courbes, une section birationnelle métabélienne devrait suffire à déterminer un point rationnel (cf. [**Pop10**]) ; on peut donc espérer qu'une bonne compréhension des sections birationnelles abéliennes soit un point de départ pour attaquer la conjecture 2.3 en toute généralité.

Le formalisme introduit au §2.2 ne permet pas de démontrer le théorème 2.9 car la donnée d'une section abélienne ne suffit pas à construire une « classe de cycle » en cohomologie étale (la démonstration du théorème 2.5 s'appuie en effet sur le passage de X à un revêtement étale fini de X qui est géométriquement nilpotent mais pas nécessairement géométriquement abélien). La preuve du théorème 2.9 commence avec la remarque qu'une section de la suite exacte ($\sharp$) munit le groupe abélien

$$M = \left\{ f \in \bar{k}(X)^{\mathrm{ab}\,*} \,;\, \exists n \geqslant 1,\, f^n \in \bar{k}(X)^* \right\} \tag{2.2}$$

d'une action de $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$. Cela donne un sens aux groupes de cohomologie galoisienne $H^i(k, M)$, une fois fixée une section birationnelle abélienne. On remarque d'autre part que M s'inscrit dans un diagramme commutatif de $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$-modules

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & \bar{k}^* \arrow[r] \arrow[d, equal] & \bar{k}(X)^* \arrow[r] \arrow[d] & \bar{k}(X)^*/\bar{k}^* \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\ 1 \arrow[r] & \bar{k}^* \arrow[r] & M \arrow[r] & \left(\bar{k}(X)^*/\bar{k}^*\right) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q} \arrow[r] & 1 \end{tikzcd} \tag{2.3}$$

dont les lignes sont exactes ; la ligne du bas permet notamment d'identifier la cohomologie galoisienne de M à celle de $\bar{k}^*$. À partir de ce diagramme et à l'aide de considérations cohomologiques que nous ne détaillons pas ici, on parvient à fabriquer une rétraction $r : \mathrm{Br}(X) \to \mathrm{Br}(k)$ de la flèche naturelle $\mathrm{Br}(k) \to \mathrm{Br}(X)$ et, pour chaque place v de k, une rétraction $r_v : \mathrm{Br}(X \otimes_k k_v) \to \mathrm{Br}(k_v)$ de la flèche naturelle $\mathrm{Br}(k_v) \to \mathrm{Br}(X \otimes_k k_v)$, de telle sorte que le carré formé de r, de r_v

et des flèches de restriction évidentes soit commutatif. D'après des théorèmes de Lichtenbaum, Tate et Witt, de telles rétractions r_v proviennent de zéro-cycles z_v de degré 1 sur $X \otimes_k k_v$ *via* l'accouplement canonique

$$\operatorname{Pic}(X \otimes_k k_v) \times \operatorname{Br}(X \otimes_k k_v) \to \operatorname{Br}(k_v). \tag{2.4}$$

L'existence de la rétraction r compatible à r_v pour toute place v assure que la famille $(z_v)_{v \in \Omega}$ est orthogonale à $\operatorname{Br}(X)$ pour l'accouplement de Brauer–Manin. Un théorème de Saito [**Sai89**] permet enfin d'en déduire l'existence d'un zéro-cycle de degré 1 sur X, compte tenu de l'hypothèse sur le groupe de Tate–Shafarevich de la jacobienne de X.

2.3.2. Torseurs d'Albanese. Qu'advient-il du théorème 2.9 si X est maintenant une variété de dimension supérieure ? La démonstration utilise l'hypothèse $\dim(X) = 1$ de façon essentielle en plusieurs endroits. Le théorème de Tsen ne permet plus de plonger $\operatorname{Br}(X)$ dans $H^2(k, \bar{k}(X)^*)$ et les théorèmes de Lichtenbaum, Tate et Witt selon lesquels pour toute place v de k, toute rétraction de la flèche naturelle $\operatorname{Br}(k_v) \to \operatorname{Br}(X \otimes_k k_v)$ provient d'un zéro-cycle de degré 1 sur $X \otimes_k k_v$ ne valent pas en dimension $\geqslant 2$. En fait, comme nous le verrons plus bas, l'énoncé du théorème lui-même est tout simplement faux en dimension supérieure : il existe des surfaces rationnelles, projectives et lisses sur $\mathbf{Q}$, ne possédant pas de zéro-cycle de degré 1 et pour lesquelles la suite ($\sharp$) est néanmoins scindée. Il en va par exemple ainsi de la surface $X \subset \mathbf{P}^4_{\mathbf{Q}}$ de Birch et Swinnerton-Dyer [**BSD75**], définie par le système d'équations homogènes $uv = x^2 - 5y^2$, $(u+v)(u+2v) = x^2 - 5z^2$.

Il s'avère que la généralisation adéquate du théorème 2.9 aux variétés de dimension supérieure fait intervenir l'arithmétique des variétés semi-abéliennes. Elle est liée à deux notions que nous discutons maintenant.

La première est celle de torseur d'Albanese. Comme l'avait remarqué Serre et comme ce fut amplifié dans les travaux de Ramachandran sur une conjecture de Deligne (cf. [**Ram01**]), le formalisme classique des variétés d'Albanese associées aux variétés projectives et lisses sur un corps algébriquement clos s'étend naturellement aux variétés ouvertes et aux corps non algébriquement clos, grâce à la définition suivante. Si X est une variété lisse et géométriquement irréductible sur un corps k, on appelle *torseur d'Albanese* de X un torseur T sous une variété semi-abélienne, muni d'un morphisme $u : X \to T$ tel que tout morphisme de X vers un torseur sous une variété semi-abélienne se factorise, de façon unique, par u. Le torseur d'Albanese existe toujours (cf. [5, Appendix]) et est unique à un isomorphisme unique près. Suivant la terminologie introduite par Lang et Tate dans le cas projectif, nous appellerons *période de* X l'ordre de la classe de T dans le groupe de cohomologie galoisienne $H^1(k, A)$ où A est la variété semi-abélienne sous laquelle T est un torseur. Si U est un ouvert dense de X, la période de X divise celle de U. La *période générique de* X est par définition le maximum des périodes de U lorsque U parcourt l'ensemble des ouverts denses de X. C'est également la période de tout ouvert dense U de X tel que $\operatorname{NS}(U \otimes_k \bar{k}) = 0$ (cf. [5, Lemma 3.1.1]).

L'étude de la période générique prolonge à la fois celle des périodes des courbes et des torseurs sous les variétés abéliennes, entamée par Lang, Tate [**LT58**], Shafarevich [**Sha57**] et Lichtenbaum [**Lic68**], et celle des exposants des algèbres centrales simples (on peut en effet vérifier que l'exposant d'une algèbre centrale simple coïncide avec la période générique de la variété de Severi–Brauer associée). Dans la perspective d'étudier les zéro-cycles sur X, l'intérêt de la définition de la période générique réside dans la relation de divisibilité suivante, conséquence d'un lemme de déplacement classique : pour toute variété X lisse et géométriquement irréductible sur un corps k, la période générique de X divise le degré de tout zéro-cycle sur X. Autrement dit, si l'on appelle *indice de* X le pgcd des degrés des points fermés de X, la période générique divise l'indice (cf. [5, Proposition 2.1]).

La seconde notion à laquelle la généralisation adéquate du théorème 2.9 aux variétés de dimension supérieure est liée est l'*obstruction élémentaire* à l'existence d'un zéro-cycle de degré 1, définie par Colliot-Thélène et Sansuc [**CTS87**] dans le cadre de la théorie de la descente pour les variétés rationnelles. Cette obstruction est la classe de l'extension de $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$-modules

$$(\mathrm{e}) \qquad 1 \longrightarrow \bar{k}^* \longrightarrow \bar{k}(X)^* \longrightarrow \bar{k}(X)^*/\bar{k}^* \longrightarrow 1$$

dans le groupe $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)}(\bar{k}(X)^*/\bar{k}^*, \bar{k}^*)$. Elle apparaît déjà en filigrane dans la preuve du théorème 2.9 (cf. le diagramme (2.3)).

Dans [5] et dans [8], nous montrons que sur un corps de nombres, toutes les notions que l'on vient d'examiner sont en réalité équivalentes entre elles. Elles sont aussi équivalentes à l'obstruction de Brauer–Manin à l'existence d'un point rationnel associée au sous-groupe $Б(X) \subset \mathrm{Br}(X)$ des classes localement constantes, lorsque X possède un point adélique.

Théorème 2.10 ([5, Theorem 3.3.1], [8, Theorem 3.9]). *Soit X une variété propre, lisse et géométriquement irréductible sur un corps de nombres k. Supposons le sous-groupe divisible du groupe de Tate–Shafarevich de la variété de Picard de X nul. Alors les trois propriétés suivantes sont équivalentes :*

(1) la suite ($\sharp$) *est scindée (*i.e. *il existe une section birationnelle abélienne) ;*

(2) la suite (e) *est scindée (*i.e. *l'obstruction élémentaire s'évanouit) ;*

(3) la période générique de X est égale à 1.

Si $X(\mathbf{A}_k) \neq \varnothing$, ces trois conditions sont aussi équivalentes à :

(4) $X(\mathbf{A}_k)^{Б(X)} \neq \varnothing$.

Ce théorème généralise le théorème 2.9 car période générique et indice coïncident pour les courbes (sur tout corps).

Comme il est bien connu, une obstruction de Brauer–Manin peut s'opposer à ce qu'une surface rationnelle définie sur $\mathbf{Q}$ possède un zéro-cycle de degré 1 sans qu'il n'y ait pour autant d'obstruction de Brauer–Manin localement constante.

Le théorème 2.10 fournit par conséquent des contre-exemples à une généralisation trop hâtive du théorème 2.9 aux variétés de dimension $\geqslant 2$.

Nous ne détaillons pas ici la démonstration du théorème 2.10 ; nous nous contenterons des quelques remarques qui suivent. Les implications (3)⇒(2)⇒(1) sont valables sur tout corps. La première relie torseurs d'Albanese et obstruction élémentaire, c'est l'un des résultats principaux de [5]. La seconde est établie dans [8] par des arguments cohomologiques raffinant ceux de la démonstration du théorème 2.9. Le contenu arithmétique du théorème 2.10 réside donc dans l'implication (1)⇒(3). Sa preuve passe par celles des implications (1)⇒(4)⇒(3) sous l'hypothèse que $X(\mathbf{A}_k) \neq \varnothing$ et repose notamment sur les résultats de Harari et Szamuely [**HS08**] sur l'arithmétique des 1-motifs. L'implication (2)⇒(4) sous l'hypothèse que $X(\mathbf{A}_k) \neq \varnothing$ avait auparavant été remarquée par Borovoi, Colliot-Thélène et Skorobogatov dans [**BCTS08**, §2.3], où la question de la validité de la réciproque était soulevée.

Sur un corps p-adique ou sur le corps des réels, nous montrons dans [5] et [8] que les propriétés (1), (2) et (3) du théorème 2.10 sont équivalentes pour toute variété X propre, lisse et géométriquement irréductible (cf. [5, Theorem 3.2.1], [8, Theorem 3.9]). En revanche, sur le corps $\mathbf{C}((t))$, les conditions (1) et (2) sont toujours satisfaites (la condition (1) l'est évidemment puisque le groupe de Galois absolu de $\mathbf{C}((t))$ est pro-libre ; pour la condition (2), cf. [5, Theorem 3.4.1]) mais la condition (3) ne l'est pas (par exemple, la courbe cubique plane $x^3+ty^3+t^2z^3=0$ sur $\mathbf{C}((t))$ est de période 3). De façon quelque peu inattendue, le formalisme des classes de cycles de sections du groupe fondamental introduit dans [7] appliqué aux courbes sur $\mathbf{C}((t))$ nous permet, dans [8], de répondre en toute généralité par la négative à la question suivante posée dans [**BCTS08**] : l'évanouissement de l'obstruction élémentaire est-elle une condition stable par extension des scalaires ? Des réponses positives avaient été données dans [5] lorsque le corps de base est un corps de nombres, un corps p-adique ou le corps des réels, grâce aux liens entre obstruction élémentaire et période générique. La pertinence du formalisme des classes de cycles de sections pour ce problème vient du rôle joué par le groupe de Brauer dans la question de leur algébricité (cf. §2.2.3).

Chapitre 3

Zéro-cycles sur les corps locaux et strictement locaux

3.1. Indices des variétés sur les corps strictement locaux ([**12**])

3.1.1. Variétés rationnellement connexes sur $\mathbf{Q}_p^{\mathrm{nr}}$. D'après une conjecture de Lang, Manin et Kollár (cf. conjecture 1.1), toute variété rationnellement connexe définie sur l'extension non ramifiée maximale d'un corps p-adique devrait admettre un point rationnel. La même assertion sur le corps $\mathbf{C}((t))$ est connue ; c'est une conséquence du théorème de Graber, Harris et Starr [**GHS03**] selon lequel la conjecture 1.1 vaut pour le corps des fonctions d'une courbe complexe et d'un argument d'approximation pour passer du global au local. La preuve de [**GHS03**] est de nature fondamentalement globale (géométrie des espaces de modules des applications stables de Kontsevich) et l'on ne connaît pas de preuve locale, évitant ce détour global, de l'existence de points rationnels sur les variétés rationnellement connexes sur $\mathbf{C}((t))$. Ainsi, malgré l'analogie entre $\mathbf{Q}_p^{\mathrm{nr}}$ et $\mathbf{C}((t))$, qui sont deux exemples de corps *strictement locaux* (corps des fractions d'un anneau de valuation discrète strictement hensélien excellent), la solution de la conjecture 1.1 sur $\mathbf{C}((t))$ n'aide pas à résoudre cette conjecture sur le corps $\mathbf{Q}_p^{\mathrm{nr}}$.

Nous établissons dans [12] un premier résultat en direction de la conjecture de Lang, Manin et Kollár sur $\mathbf{Q}_p^{\mathrm{nr}}$.

Théorème 3.1 ([12, Corollary 3.6]). *Toute variété rationnellement connexe sur l'extension non ramifiée maximale d'un corps p-adique possède un zéro-cycle de degré une puissance de p.*

3.1.2. Lien avec les caractéristiques d'Euler–Poincaré de faisceaux cohérents. Nous obtenons le théorème 3.1 comme conséquence d'un énoncé général reliant indices des variétés sur les corps strictement locaux et caractéristiques d'Euler–Poincaré de faisceaux cohérents. Ce lien est nouveau même en égale caractéristique nulle.

Théorème 3.2 ([12, Theorem 3.1]). *Soit K le corps des fractions d'un anneau de valuation discrète hensélien excellent de corps résiduel k algébriquement clos. Notons p la caractéristique de k. Soient X un K-schéma propre et E un faisceau cohérent sur X.*

(1) L'indice de X divise $\chi(X,E)$ à une puissance de p près.

(2) L'indice de X divise $\chi(X,E)$ si $p=0$ ou si $p>\dim(X)+1$ ou si l'on admet la résolution des singularités pour les schémas excellents.

Rappelons que l'*indice* de X est le pgcd des degrés des points fermés de X, ou encore le plus petit degré strictement positif d'un zéro-cycle sur X. Rappelons aussi que cet entier admet une interprétation géométrique : si X est une variété propre et lisse sur $\mathbf{C}((t))$, l'indice de X coïncide avec la multiplicité de la fibre spéciale de tout modèle propre et régulier de X sur $\mathbf{C}[[t]]$.

Le théorème 3.1 se déduit du théorème 3.2 en prenant $E = \mathscr{O}_X$: en effet, une variété X propre, lisse et rationnellement connexe sur un corps de caractéristique nulle vérifie $H^i(X, \mathscr{O}_X) = 0$ pour $i > 0$, donc $\chi(X, \mathscr{O}_X) = 1$.

Le théorème 3.1 fournit, dans de nombreuses situations, des critères nouveaux pour l'existence de zéro-cycles de degré donné sur les corps strictement locaux. Un exemple déjà connu d'Atiyah [**Ati71**, p. 61] est celui des courbes de genre 2 sur $\mathbf{C}((t))$: comme $\chi(X, \mathscr{O}_X) = -1$, elles possèdent un zéro-cycle de degré 1. Si l'on applique le théorème 3.2 aux hypersurfaces de $\mathbf{P}^n$ et aux faisceaux $E = \mathscr{O}_{\mathbf{P}^n}(j)|_X$ pour $j \in \mathbf{Z}$, on trouve que sur $\mathbf{C}((t))$ ou sur l'extension non ramifiée maximale d'un corps p-adique avec $p \geqslant 5$, toute hypersurface de degré 6 dans $\mathbf{P}^3$ et toute hypersurface de degré 12 dans $\mathbf{P}^4$ possède un zéro-cycle de degré 1 (cf. [12, §4]). Une telle affirmation peut surprendre dans la mesure où le théorème de Lang selon lequel ces corps sont C_1 ne garantit l'existence d'un point rationnel (et donc d'un zéro-cycle de degré 1) que pour les hypersurfaces de $\mathbf{P}^n$ de degré $\leqslant n$. Un troisième exemple est celui des variétés propres et lisses de type général sur $\mathbf{C}((t))$. Leur indice divise leurs plurigenres supérieurs, c'est-à-dire les entiers $\dim_K H^0(X, \mathscr{O}_X(nK))$ pour $n \geqslant 2$, d'après le théorème 3.2 combiné à des résultats de Kollár et Lazarsfeld selon lesquels ces entiers sont des caractéristiques d'Euler–Poincaré de certains faisceaux cohérents construits à partir de faisceaux d'idéaux multiplicateurs asymptotiques (cf. [12, Corollary 3.7]).

3.1.3. Exemples provenant du cobordisme complexe. Soit X une variété propre, lisse et géométriquement irréductible sur $\mathbf{C}((t))$. Notons d sa dimension. Voici un énoncé comparable à celui du théorème 3.2.

THÉORÈME 3.3 ([12, §5]). *Si d est impair, le nombre d'auto-intersection K_X^d est pair et l'indice de X divise $\frac{1}{2}K_X^d$.*

Ce théorème suggère que pour toute variété X propre, lisse et géométriquement irréductible sur $\mathbf{C}((t))$ de dimension impaire, la classe dans $\mathrm{CH}_0(X)$ de la puissance d-ème de K_X au sens du produit d'intersection est divisible par 2. Pour $d = 1$, c'est vrai d'après Atiyah [**Ati71**] mais nous ne savons pas prouver une telle affirmation en général ; ce n'est pas ainsi que nous démontrons le théorème 3.3. Pour $d = 3$, il résulte du théorème de Hirzebruch–Riemann–Roch que

$$-\frac{1}{2}K_X^3 = \chi(X, T_X) + \chi(X, \Omega_X^1) + 18\chi(X, \mathscr{O}_X), \tag{3.1}$$

de sorte que le théorème 3.2 entraîne, dans ce cas, la conclusion du théorème 3.3 ; mais nous ne connaissons pas de formule similaire à (3.1) qui serait valable pour d

impair arbitraire. Il s'avère cependant qu'un théorème de Hattori et Stong dans la théorie du cobordisme complexe (cf. [**Hat66**], [**Sto65**]) suffit à prédire l'existence d'une telle formule pour chaque entier impair d. C'est par ce biais que nous déduisons le théorème 3.3 du théorème 3.2.

Plus généralement, si $P \in \mathbf{Q}[c_1, \ldots, c_d]$ est une classe caractéristique, c'est-à-dire un polynôme homogène de degré d pour la graduation $\deg(c_i) = i$, et si X est une variété propre et lisse de dimension d, notons $P(X) \in \mathbf{Q}$ la valeur de P évalué (au sens des nombres d'intersection) sur les classes de Chern du fibré tangent de X. Si $P(X) \in \mathbf{Z}$ pour toute variété X projective lisse complexe de dimension d, le théorème de Hattori et Stong garantit que $P(X)$ s'exprime comme combinaison $\mathbf{Z}$-linéaire de caractéristiques d'Euler–Poincaré de fibrés vectoriels déduits du fibré tangent par les opérations usuelles de l'algèbre multilinéaire (produits tensoriels, alternés, symétriques, foncteurs de Schur, sommes directes, passage au dual). Compte tenu du théorème 3.2, il s'ensuit que pour toute variété X propre, lisse et géométriquement irréductible sur $\mathbf{C}((t))$, l'indice de X divise $P(X)$. L'hypothèse que P est à valeurs entières est facile à vérifier : en effet, il suffit de la tester sur un système (fini) de générateurs de l'anneau de cobordisme complexe (les produits d'espaces projectifs et d'hypersurfaces de Milnor). Le théorème 3.3 est obtenu avec la classe caractéristique $P = \frac{1}{2}c_1^d$, qui est à valeurs entières pour d impair ; on renvoie à [12, §5] pour de nombreux autres exemples.

3.1.4. Indices intermédiaires. À la suite de la publication de [12], Kollár remarqua dans [**Kol13**] que les arguments employés dans la preuve du théorème 3.1 donnent lieu, sur un corps arbitraire, à un nouvel invariant birationnel des variétés propres et lisses. Si X est un schéma propre sur un corps K et si n est un entier naturel, le *n-ème indice intermédiaire* de X sur K est par définition le pgcd des $\chi(X, E)$ lorsque E parcourt l'ensemble des faisceaux cohérents sur X dont le support est de dimension $\leqslant n$. Lorsque $n = 0$, on retrouve l'indice de X sur K. Les indices intermédiaires forment une suite décroissante, au sens de la divisibilité, lorsque n croît ; ce que le théorème 3.2 affirme, c'est que si K est un corps strictement local et si p désigne l'exposant caractéristique de son corps résiduel, tous ces indices sont égaux, à une puissance de p près. Kollár démontre que pour un corps K quelconque, la suite des indices intermédiaires constitue un invariant birationnel des K-schémas propres et réguliers (cf. *op. cit.*, Corollary 9). De nombreuses questions s'ensuivent naturellement. Comment calculer ces invariants ? Quelles sont les suites d'entiers qui peuvent apparaître ainsi ? Sur les réels, le premier indice intermédiaire d'une variété rationnellement connexe est-il toujours égal à 1 ? Sur un corps de caractéristique nulle arbitraire, pour tout entier naturel n, l'indice divise le produit du n-ème indice intermédiaire et du dénominateur de la n-ème classe de Todd, d'après le théorème de Hirzebruch–Riemann–Roch ; la suite décroissante des indices intermédiaires est-elle soumise à d'autres contraintes que celle-là ? Nous renvoyons à [**Kol13**] pour de nombreux exemples ainsi que pour une généralisation, en termes des indices intermédiaires, d'une formule du degré due à Rost, Merkurjev, Zainoulline et Haution (cf. [**Zai10**], [**Hau13**]).

3.2. Conjecture de Kato–Kuzumaki ([15])

3.2.1. Hypersurfaces de Fano. Les idées introduites dans [12] pour prouver le théorème 3.1 furent aussi le point de départ pour la solution, dans [15], d'une conjecture de Kato et Kuzumaki [**KK86**] sur les corps p-adiques et sur les corps de nombres totalement imaginaires, dont l'énoncé est le suivant.

THÉORÈME 3.4 ([15, Corollaire 5.5, Théorème 6.1]). *Soit k un corps p-adique ou un corps de nombres totalement imaginaire. Soit $X \subset \mathbf{P}^n_k$ une hypersurface de degré d. Si $d \leqslant n$, tout élément $\alpha \in k$ peut s'écrire sous la forme $\alpha = \prod_{i=1}^m N_{k_i/k}(\alpha_i)$ pour un entier naturel m, des extensions finies k_i/k telles que $X(k_i) \neq \varnothing$ et des $\alpha_i \in k_i$.*

La conjecture avancée dans [**KK86**] est bien plus générale : elle concerne des corps arbitraires et porte sur les liens entre dimension cohomologique, K-théorie algébrique et hypersurfaces projectives de petit degré. Cependant, Merkurjev, puis Colliot-Thélène et Madore, construisirent des contre-exemples, non explicites, à l'aide d'un procédé de récurrence transfinie dû à Merkurjev et Suslin (cf. [**Mer91**], [**CTM04**], [**MS82**, §11.4]). La conjecture reste plausible pour tous les corps qui apparaissent naturellement en arithmétique et en géométrie algébrique et est source de nombreux problèmes intéressants, par exemple celui de l'existence de zéro-cycles de degré 1 sur les hypersurfaces de $\mathbf{P}^n$ de degré d définies sur un corps p-adique, lorsque $d^2 \leqslant n$ (comme l'a montré Terjanian, de telles hypersurfaces ne possèdent pas nécessairement de point rationnel). Voici l'énoncé général de la conjecture. Notant $K_q(k)$ le q-ème groupe de K-théorie de Milnor de k, on définit le *q-ème groupe de normes* $N_q(X/k) \subset K_q(k)$ d'un k-schéma de type fini X comme le sous-groupe engendré par les images des applications norme

$$N_{k(x)/k} : K_q(k(x)) \to K_q(k)$$

(définies par Kato [**Kat80**]) lorsque x parcourt l'ensemble des points fermés de X. Si i et q sont deux entiers naturels, on dit, suivant Kato et Kuzumaki, qu'un corps k vérifie la propriété C_i^q si l'égalité $N_q(X/k') = K_q(k')$ a lieu pour toute extension finie k'/k, tout entier n et toute hypersurface $X \subset \mathbf{P}^n_{k'}$ de degré d tel que $d^i \leqslant n$. Cette définition est parallèle à celle, due à Lang, des corps C_i ; rappelons que k est C_i si et seulement si pour toute extension finie k'/k et tout entier n, toute hypersurface $X \subset \mathbf{P}^n_{k'}$ de degré d tel que $d^i \leqslant n$ possède un k'-point (cf. [**Lan52**], [**Nag57**]). De façon évidente, un corps C_i est C_i^q pour tout q. La conjecture formulée dans [**KK86**], pour un corps k que l'on supposera parfait pour simplifier et pour des entiers naturels i et q fixés, est que la dimension cohomologique de k est $\leqslant i + q$ si et seulement si k est un corps C_i^q. En ces termes, ce que le théorème 3.4 affirme, c'est que les corps p-adiques et les corps de nombres totalement imaginaires sont C_1^1.

Les groupes de normes $N_q(X/k)$ apparaissent dans la littérature sous diverses formes. Pour $q = 0$, on a $K_0(k) = \mathbf{Z}$ et $N_0(X/k)$ est le sous-groupe engendré par l'indice de X. Pour $q = 1$, on a $K_1(k) = k^*$. Lorsque X est une variété de Severi–Brauer, le groupe $N_1(X/k)$ est l'image de la norme réduite $\mathrm{Nrd} : A^* \to k^*$, où A désigne l'algèbre centrale simple correspondant à X. Lorsque X est une quadrique, définie par une forme quadratique f, le groupe $N_1(X/k)$ contient k^{*2} et le quotient est l'image de la norme spinorielle $\mathrm{SO}_f(k) \to k^*/k^{*2}$ (principe de norme de Knebusch, cf. [**Gil07**, §32.4]). D'après un célèbre théorème de Merkurjev et Suslin, la norme spinorielle de toute forme quadratique et la norme réduite de toute algèbre centrale simple sont surjectives si k est parfait de dimension cohomologique $\leqslant 2$ (cf. [**Ser94**, Chapitre III, §3.2]).

Pour tout entier q, nous établissons aussi dans [15] la propriété C_1^q pour le corps des séries formelles itérées $\mathbf{C}((t_1))\cdots((t_{q+1}))$, ainsi qu'une variante « à une puissance de p près » de cette propriété pour les corps locaux supérieurs de dimension cohomologique $q+1$ et de caractéristique résiduelle p (un exemple de tel corps est $\mathbf{Q}_p((t))$, de dimension cohomologique 3).

Kato et Kuzumaki avaient déjà démontré tous ces résultats dans [**KK86**] en se restreignant aux hypersurfaces de degré *premier* (voire, dans le cas des corps de nombres totalement imaginaires, aux hypersurfaces lisses de degré premier), à l'aide d'arguments élémentaires très ingénieux. La démonstration du théorème 3.4, très différente, est esquissée au §3.2.2 ; nous présentons ensuite au §3.2.3 d'autres résultats obtenus comme sous-produits.

3.2.2. Stratégie de la preuve. La définition suivante constitue le point essentiel permettant d'aborder la propriété C_1^q. Elle la généralise en remplaçant les hypersurfaces de Fano apparaissant dans son énoncé par des schémas propres arbitraires.

Définition 3.5. Soient q un entier naturel et k un corps. On dit que k vérifie la *propriété C_1^q forte* si pour toute extension finie k'/k, tout k'-schéma propre X et tout faisceau cohérent E sur X, la caractéristique d'Euler–Poincaré $\chi(X,E) = \sum(-1)^i \dim_{k'} H^i(X,E)$ annule le groupe $K_q(k')/N_q(X/k')$.

Si p est un entier fixé, on définit de même la propriété C_1^q forte *hors de p* en demandant que $\chi(X,E)$ annule $(K_q(k')/N_q(X/k')) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}[1/p]$.

La propriété C_1^q forte implique la propriété C_1^q de Kato et Kuzumaki puisque les hypersurfaces de $\mathbf{P}^n$ de degré $d \leqslant n$ vérifient $\chi(X, \mathscr{O}_X) = 1$. Explicitons la définition pour $q = 0$: le corps k est C_1^0 fort si et seulement si pour toute extension finie k'/k, tout k'-schéma propre X et tout faisceau cohérent E sur X, l'indice de X divise $\chi(X,E)$. C'est la propriété déjà considérée dans le théorème 3.2.

Une première étape de la preuve du théorème 3.4 consiste à établir un théorème de transition pour la propriété C_1^q dans la situation d'un anneau de valuation discrète hensélien excellent. On convient, dans l'énoncé ci-dessous, que tout corps vérifie la propriété C_1^{-1} forte.

THÉORÈME 3.6 ([15, Théorème 4.2, Remarque 4.9 (ii)]). *Soit q un entier naturel. Soit R un anneau de valuation discrète hensélien excellent, de corps des fractions K et de corps résiduel k. Supposons k de dimension cohomologique $\leqslant q$ et notons p son exposant caractéristique. Si k vérifie la propriété C_1^{q-1} forte hors de p, alors K vérifie la propriété C_1^q forte hors de p.*

Pour $q = 0$, on retrouve l'énoncé du théorème 3.2 (1).

La preuve du théorème 3.6 repose sur deux types d'ingrédients :

— des arguments de dévissage K-théoriques, axiomatisés dans [15, §2] (il s'agit ici de la K-théorie des faisceaux cohérents sur X et non de celle du corps K), grâce auxquels la démonstration de la propriété C_1^q forte pour un corps donné se ramène à une vérification portant sur une classe restreinte de schémas propres ; en l'occurrence, sur la classe des K-schémas X qui s'étendent en des R-schémas $\mathscr{X}$ propres, irréductibles et réguliers, compte tenu d'un théorème de Gabber et de Jong garantissant l'existence d'altérations régulières de degré premier à ℓ pour tout R-schéma de type fini et tout nombre premier $\ell \neq p$;

— des arguments de nature géométrique permettant, dans la situation où X est la fibre générique d'un R-schéma $\mathscr{X}$ propre, irréductible et régulier, de contrôler le quotient $K_q(K)/N_q(X/K)$ en termes de la fibre spéciale Y de $\mathscr{X}$, à savoir, de l'exprimer comme une extension de $K_{q-1}(k)/N_{q-1}(Y/k)$ par un groupe abélien annulé par la multiplicité m de Y.

La démonstration se conclut avec l'aide du théorème de Snapper convenablement généralisé par Kleiman (cf. [**Kle66**, Chapter I, §1]), grâce auquel nous établissons l'égalité $\chi(X, \mathscr{O}_X) = m\chi(D, \mathscr{O}_D)$, où D désigne le diviseur effectif $\frac{1}{m}Y$ sur le schéma régulier $\mathscr{X}$ identifié à un sous-schéma fermé de $\mathscr{X}$.

Le « principe de dévissage » de [15, §2] que l'on vient d'évoquer s'appuie sur une récurrence sur la dimension des schémas propres considérés et fait appel, pour l'étape de récurrence, à des faisceaux cohérents *a priori* arbitraires et à des schémas propres *a priori* ni réguliers ni même irréductibles, même si l'on part d'un schéma régulier et de son faisceau structural. C'est l'une des raisons pour lesquelles il est important qu'aucune restriction sur X (y compris l'hypothèse que X est une hypersurface dans un espace projectif) ou sur E ne figure dans la définition 3.5 ou dans le théorème 3.2, l'autre raison étant que la preuve du théorème 3.6 passe par l'emploi de la propriété C_1^{q-1} forte hors de p pour le k-schéma D, qui en général n'est ni irréductible ni réduit (ni une hypersurface de $\mathbf{P}^n$ même si X en était une).

La deuxième étape de la preuve du théorème 3.4 est la démonstration de la propriété C_1^0 forte pour les corps finis. Il s'agit d'une application du principe de dévissage de [15, §2] et des bornes de Lang–Weil–Nisnevič.

Combinant la propriété C_1^0 forte pour les corps finis avec le théorème 3.6, on obtient déjà la propriété C_1^1 forte hors de p pour les corps p-adiques (notons que la preuve de cette assertion nécessite deux applications successives du principe de dévissage). Il reste, pour les corps p-adiques, une difficulté en p, due à la restriction $\ell \neq p$ dans le théorème de Gabber et de Jong. Celle-ci est résolue dans [15, §5] par un raffinement d'une partie des arguments géométriques intervenant dans la preuve du théorème 3.6 : nous parvenons à les mettre en œuvre même si $\mathscr{X}$ possède des singularités quotient (des modèles à singularités quotient sont fournis par un théorème plus ancien de de Jong sur l'existence d'altérations régulières équivariantes). Concrètement, si $\mathscr{X} = \mathscr{X}'/G$ où $\mathscr{X}'$ est un R-schéma régulier, projectif et plat muni d'une action d'un groupe fini G, nous montrons, malgré les singularités de $\mathscr{X}$, que l'indice de Y est égal au pgcd des degrés résiduels des extensions $K(x)/K$ lorsque x parcourt l'ensemble des points fermés de X (cf. [15, Lemme 5.3]). Dans le cas des hypersurfaces de $\mathbf{P}^n_K$ de degré $d \leqslant n$ sur un corps p-adique, le théorème de Lang selon lequel l'extension non ramifiée maximale de K est C_1 suffit à contourner l'autre partie des arguments géométriques de la démonstration du théorème 3.6. Ainsi prouvons-nous finalement que les corps p-adiques sont C_1^1 sans pour autant savoir s'ils vérifient la propriété C_1^1 forte.

La démonstration de la propriété C_1^1 pour les corps de nombres totalement imaginaires est plus délicate. Elle repose sur la propriété C_1^1 des corps p-adiques, sur la propriété C_1^1 forte hors de p des corps p-adiques, sur un théorème de type local-global, dû à Kato et Saito, concernant les quotients $k^*/N_1(X/k)$ pour les variétés lisses et *géométriquement irréductibles* sur un corps de nombres, sur une application du théorème de Hirzebruch–Riemann–Roch et sur un argument de dévissage portant non sur le quotient $k^*/N_1(X/k)$ mais sur le noyau

$$k^*/N_1(X/k) \to \prod_{v\in S} k_v^*/N_1(X \otimes_k k_v/k_v)$$

pour un ensemble fini S assez grand de places de k. Nous ne la détaillons pas ici et renvoyons le lecteur intéressé à [15, §6].

3.2.3. Autres conséquences. Voici deux autres résultats prouvés au fil de [15].

Théorème 3.7 ([15, Corollaire 5.6, Corollaire 5.8]). *Soit k un corps p-adique ou un corps de nombres totalement imaginaire. Si X est un espace homogène d'un groupe algébrique linéaire connexe sur k, alors $N_1(X/k) = k^*$.*

Dans le cas où X est une variété de Severi–Brauer ou une quadrique, on retrouve des théorèmes bien connus affirmant la surjectivité de la norme réduite des algèbres centrales simple ou de la norme spinorielle des formes quadratiques non dégénérées de rang au moins 3 sur les corps p-adiques et sur les corps de nombres totalement imaginaires (pour la norme réduite, cf. Hasse–Maass–Schilling [**HS36**] [**Maa37**]).

THÉORÈME 3.8 ([15, Corollaire 3.2]). *Pour tout premier p, la conjecture d'Ax vaut pour les corps dont le groupe de Galois absolu est un pro-p-groupe.*

La conjecture d'Ax dont il est question ici affirme que les corps parfaits pseudo-algébriquement clos sont C_1. Rappelons qu'un corps est *pseudo-algébriquement clos* si toute variété géométriquement intègre sur ce corps possède un point rationnel. Cette conjecture était connue auparavant pour les corps dont le groupe de Galois absolu est abélien (Ax [**Ax68**]), pour les corps contenant un corps algébriquement clos (Denef–Jarden–Lewis [**DJL83**]) et pour les corps de caractéristique nulle (Kollár [**Kol07**]).

3.3. Cycles homologiquement triviaux ([14])

L'article [14] est consacré à l'étude du groupe $A_0(X)$ des zéro-cycles de degré 0 à équivalence rationnelle près lorsque X est une variété (pour l'essentiel, une surface) irréductible, projective et lisse sur un corps local ou strictement local. Rappelons d'abord brièvement la situation, plus simple, sur les corps finis. Sur de tels corps, la théorie du corps de classes supérieur non ramifié fournit une description complète du groupe $A_0(X)$. En voici l'énoncé principal.

THÉORÈME 3.9 (Kato, Saito [**KS83**]). *Si X est une variété irréductible, projective et lisse sur un corps fini K, le groupe $A_0(X)$ est fini, l'application de réciprocité*

$$\rho : \mathrm{CH}_0(X) \longrightarrow \pi_1^{\mathrm{ab}}(X) \tag{3.2}$$

est injective et son image s'identifie à l'ensemble des éléments de $\pi_1^{\mathrm{ab}}(X)$ dont l'image dans $\pi_1^{\mathrm{ab}}(\mathrm{Spec}(K))$ est une puissance entière du Frobenius.

L'application ρ est induite par la substitution de Frobenius (cf. Lang [**Lan56**]) : pour tout point fermé $x \in X$, l'image de la classe de x par ρ coïncide avec l'image de 1 par le morphisme $\widehat{\mathbf{Z}} = \pi_1^{\mathrm{ab}}(x) \to \pi_1^{\mathrm{ab}}(X)$ déduit de l'inclusion de x dans X.

Le théorème 3.9 peut se reformuler en termes cohomologiques. Soit ℓ un nombre premier, que l'on suppose inversible dans K pour simplifier. Posons $d = \dim(X)$. Comme K est un corps fini, le groupe de cohomologie étale ℓ-adique $H^{2d}(X, \mathbf{Z}_\ell(d))$ est le dual de Pontrjagin de $H^1(X, \mathbf{Q}_\ell/\mathbf{Z}_\ell) = \mathrm{Hom}(\pi_1^{\mathrm{ab}}(X), \mathbf{Q}_\ell/\mathbf{Z}_\ell)$; il s'identifie donc au pro-ℓ-complété de $\pi_1^{\mathrm{ab}}(X)$. Par cette identification se correspondent l'application de réciprocité ρ et l'application classe de cycle

$$\psi : \mathrm{CH}_0(X)\widehat{\otimes}\mathbf{Z}_\ell \longrightarrow H^{2d}(X, \mathbf{Z}_\ell(d)), \tag{3.3}$$

où $\mathrm{CH}_0(X)\widehat{\otimes}\mathbf{Z}_\ell = \varprojlim \mathrm{CH}_0(X)/\ell^n\mathrm{CH}_0(X)$. Le théorème 3.9 affirme que ψ est injective (la surjectivité de ψ était connue depuis Lang).

Supposons maintenant que K soit un corps local ou strictement local et notons p l'exposant caractéristique de son corps résiduel. Il est établi, depuis Saito et Sato [**SS10**], que si X est une variété irréductible, projective et lisse sur K, le groupe $A_0(X)$ est somme directe

$$A_0(X) \simeq D \oplus F \tag{3.4}$$

d'un groupe D qui est p'-divisible (c'est-à-dire divisible par n pour tout entier n premier à p) et d'un groupe fini F d'ordre premier à p. Le sous-groupe p'-divisible maximal D de $A_0(X)$ pour X sur un corps local ou strictement local n'est pas mieux compris que le groupe $A_0(X)$, tout entier divisible, lorsque X est une variété complexe (conjecture de Bloch, etc. ; cf. chapitre 1). On sait seulement qu'il peut contenir de la torsion même si X est simplement connexe (cf. [**AS07**], [**Asa12**]). Pour analyser le groupe $F = A_0(X)/D$, fini d'ordre premier à p, ou de façon équivalente le groupe $\mathrm{CH}_0(X)\widehat{\otimes}\mathbf{Z}_\ell$ pour tout premier $\ell \neq p$, on dispose de l'application classe de cycle ψ vers la cohomologie étale ℓ-adique (cf. (3.3)). L'objectif de [14] est d'analyser le problème de l'injectivité de ψ, c'est-à-dire de l'existence de zéro-cycles homologiquement triviaux, lorsque K est local ou strictement local. L'injectivité de ψ pour une variété X donnée sur un tel corps permet de réduire la détermination du groupe F à un calcul purement cohomologique. On trouvera dans [**Yam05**, §5] un exemple de cette stratégie menée à bien (détermination explicite de F) dans une situation où $D \neq 0$.

3.3.1. Sur les corps locaux. La question de la détermination du groupe de Chow des zéro-cycles et du noyau de ψ est ancienne et fut étudiée depuis les années 1970, pour les surfaces, par des méthodes de K-théorie algébrique remontant à Bloch (cf. [**Blo74**], [**Blo80**], [**Blo81**], [**CTS81**], [**CT83**], [**CTR91**], [**Sai91**]). Lorsque K est un corps p-adique, ces techniques permirent d'atteindre une bonne compréhension de l'application ψ pour les surfaces rationnelles et plus généralement les surfaces de genre géométrique nul, c'est-à-dire les surfaces X projectives et lisses telles que $H^2(X, \mathscr{O}_X) = 0$. Rappelons que ces surfaces sont celles pour lesquelles la conjecture de Bloch prédit que le groupe $A_0(X \otimes_K \bar{K})$ est représentable ; pour de telles surfaces sur un corps local, le sous-groupe divisible maximal de D devrait toujours être nul et D lui-même devrait s'annuler dès que $H^1(X, \mathscr{O}_X) = 0$. Plus récemment, Yamazaki [**Yam05**] a établi l'injectivité de ψ pour quelques surfaces de genre géométrique non nul très particulières (des produits de courbes de Mumford) sur un corps p-adique.

Avant d'énoncer le résultat principal de [14], introduisons quelques notations, que nous conserverons jusqu'à la fin du §3.3. Soit R un anneau de valuation discrète hensélien excellent de corps des fractions K et de corps résiduel k. Notons X une variété propre et lisse sur K. Nous dirons que $\mathscr{X}$ est un *bon modèle* de X si c'est un schéma régulier, propre et plat sur R, de fibre générique X, tel que, si l'on note $A = \mathscr{X} \otimes_R k$ sa fibre spéciale, le diviseur A_{red} soit un diviseur à croisements normaux simples sur $\mathscr{X}$. Un bon modèle est conjecturé toujours exister. Enfin, notons $(A_i)_{i \in I}$ la famille des composantes irréductibles de A_{red}.

THÉORÈME 3.10 ([14, Theorem 1]). *Soit X une surface propre et lisse sur un corps p-adique K. Supposons que la variété d'Albanese de X ait potentiellement bonne réduction (par exemple, soit nulle) et que X possède un bon modèle dont les composantes irréductibles de la fibre spéciale vérifient la conjecture de Tate. Alors pour tout $\ell \neq p$, l'application classe de cycle*

$$\psi : \mathrm{CH}_0(X)\widehat{\otimes}\mathbf{Z}_\ell \longrightarrow H^4(X, \mathbf{Z}_\ell(2)) \tag{3.5}$$

est injective. De façon équivalente, le noyau à gauche de l'accouplement naturel

$$\mathrm{CH}_0(X) \times \mathrm{Br}(X) \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \tag{3.6}$$

est contenu dans le sous-groupe p'-divisible maximal de $A_0(X)$.

Le théorème 3.10 est le premier résultat général sur l'application ψ qui s'applique à des surfaces de genre géométrique arbitraire. Dans le cas des surfaces de genre géométrique nul, il avait été établi par Saito [**Sai91**]. Déjà dans ce cas, un exemple de Parimala et Suresh [**PS95**] montrait que la conclusion tombe en défaut si l'on supprime l'hypothèse sur la variété d'Albanese. (L'exemple est une surface fibrée en coniques sur une courbe elliptique à réduction multiplicative et fut analysé plus en détail par Sato [**Sat98**].)

L'assertion du théorème 3.10 concernant l'accouplement (3.6) est à rapprocher du théorème de Tate et Lichtenbaum selon lequel cet accouplement est non dégénéré pour une courbe sur un corps p-adique (cf. [**PS95**, p. 85]). En dimension supérieure, comme le groupe $\mathrm{Br}(X)$ est de torsion, le noyau à gauche de (3.6) contient nécessairement le sous-groupe divisible maximal de $A_0(X)$.

L'hypothèse selon laquelle les surfaces A_i doivent vérifier la conjecture de Tate est trivialement satisfaite si les A_i sont birationnellement réglées. C'est le cas, notamment, pour beaucoup de dégénérescences de surfaces $K3$ (voir [**Sat05**] pour des exemples de telles surfaces dégénérant en un cube de surfaces rationnelles). Ainsi le théorème 3.10 assure-t-il que le noyau à gauche de (3.6) est contenu dans le sous-groupe p'-divisible maximal de $A_0(X)$ pour de nombreuses surfaces $K3$ sur un corps p-adique et conjecturalement pour toutes. Pour aller plus loin, il serait très intéressant de savoir si ce noyau est égal au sous-groupe divisible maximal de $A_0(X)$ pour toute surface $K3$ sur un corps p-adique. Cette question est ouverte même dans le cas de bonne réduction (par contraste, lorsque X a bonne réduction, le théorème 3.10 est facile à établir et ne requiert aucune hypothèse).

3.3.2. Ingrédients de la preuve. Conservons les notations introduites avant l'énoncé du théorème 3.10, supposons k fini et X irréductible et notons d la dimension de X. Le point de départ de la démonstration du théorème 3.10 est un théorème de Saito et Sato [**SS10**], dont une preuve simplifiée est donnée dans [14, Appendix], selon lequel l'application classe de cycle

$$\psi_{\mathscr{X}} : \mathrm{CH}_1(\mathscr{X})\widehat{\otimes}\mathbf{Z}_\ell \longrightarrow H^{2d}(\mathscr{X}, \mathbf{Z}_\ell(d)) \tag{3.7}$$

pour les cycles de dimension 1 sur $\mathscr{X}$ est un isomorphisme. Les applications ψ et $\psi_{\mathscr{X}}$ et l'application classe de cycle

$$\psi_A : \mathrm{CH}_1(A)\widehat{\otimes}\mathbf{Z}_\ell \longrightarrow H^{2d}_A(\mathscr{X}, \mathbf{Z}_\ell(d)) \tag{3.8}$$

pour les cycles de dimension 1 sur la fibre spéciale A de $\mathscr{X}$ (à valeurs dans l'homologie étale de A, qui s'identifie à la cohomologie de $\mathscr{X}$ à supports dans A puisque $\mathscr{X}$ est régulier) sont les flèches horizontales d'un diagramme commutatif dont les colonnes sont les suites de localisation pour les groupes de Chow et pour la cohomologie étale. Les théorèmes de dualité pour la cohomologie des schémas propres sur K et sur R et une chasse au diagramme reposant sur la surjectivité de la flèche de restriction $\mathrm{CH}_1(\mathscr{X}) \to \mathrm{CH}_0(X)$ et sur la bijectivité de $\psi_{\mathscr{X}}$ permettent alors d'exprimer le noyau de ψ comme le dual de Pontrjagin du groupe d'homologie du complexe

$$H^2(X, \mathbf{Q}_\ell/\mathbf{Z}_\ell(1)) \longrightarrow H^3_A(\mathscr{X}, \mathbf{Q}_\ell/\mathbf{Z}_\ell(1)) \longrightarrow \bigoplus_{i\in I} \frac{H^3(A_i, \mathbf{Q}_\ell/\mathbf{Z}_\ell(1))}{\mathrm{CH}_1(A_i)^\perp}, \tag{3.9}$$

dont la première flèche est issue de la suite de localisation et la seconde est la composée de la flèche d'oubli de support, de la flèche de restriction de $\mathscr{X}$ à A_i et de la flèche de passage au quotient par le sous-groupe $\mathrm{CH}_1(A_i)^\perp \subset H^3(A_i, \mathbf{Q}_\ell/\mathbf{Z}_\ell(1))$ constitué, par définition, des classes dont la restriction à $H^3(Z, \mathbf{Q}_\ell/\mathbf{Z}_\ell(1))$ s'annule pour toute courbe irréductible $Z \subset A_i$. À partir de là, la preuve du théorème 3.10 consiste à établir l'exactitude de ce complexe lorsque X est une surface satisfaisant à ses hypothèses. Les étapes principales sont les suivantes :

— posant $\bar{A} = A \otimes_k \bar{k}$ et $\bar{A}_i = A_i \otimes_k \bar{k}$, où $\bar{k}$ désigne une clôture algébrique de k, on commence par établir l'injectivité de l'application naturelle

$$H^1(k, H^2(\bar{A}, \mathbf{Q}_\ell(1))) \to \bigoplus_{i\in I} H^1(k, H^2(\bar{A}_i, \mathbf{Q}_\ell(1))), \tag{3.10}$$

par un argument qui combine la suite spectrale de Mayer–Vietoris pour le recouvrement fermé $A = \bigcup_{i\in I} A_i$, la semi-simplicité du Frobenius agissant sur le sous-espace caractéristique de $H^2(\bar{A}_i, \mathbf{Q}_\ell(1))$ associé à la valeur propre 1 (conséquence de la conjecture de Tate pour A_i et de l'hypothèse $d = 2$) et des considérations de poids (conjectures de Weil, prouvées par Deligne [**Del80**]) ;

— à l'aide des travaux de Rapoport et Zink [**RZ82**] démontrant la conjecture de monodromie-poids pour les surfaces en inégale caractéristique, nous prouvons que l'hypothèse de bonne réduction potentielle de la variété d'Albanese de X suffit à garantir que le groupe $H^3(\bar{A}, \mathbf{Q}_\ell)$ est purement de poids 3, ce qui, compte tenu de la suite spectrale de Mayer–Vietoris, équivaut à l'injectivité de l'application naturelle

$$H^3(\bar{A}, \mathbf{Q}_\ell(1)) \to \bigoplus_{i\in I} H^3(\bar{A}_i, \mathbf{Q}_\ell(1)) ; \tag{3.11}$$

— l'injectivité de (3.10) et de (3.11) entraîne celle de l'application naturelle

$$H^3(A, \mathbf{Q}_\ell(1)) \to \bigoplus_{i \in I} H^3(A_i, \mathbf{Q}_\ell(1)) \tag{3.12}$$

et l'on démontre, en analysant et en comparant les suites spectrales de Mayer–Vietoris à coefficients $\mathbf{Q}_\ell$ et à coefficients $\mathbf{Q}_\ell/\mathbf{Z}_\ell$, que celle-ci entraîne à son tour l'injectivité de l'application

$$H^3(A, \mathbf{Q}_\ell/\mathbf{Z}_\ell(1)) \to \bigoplus_{i \in I} H^3(A_i, \mathbf{Q}_\ell/\mathbf{Z}_\ell(1)) \tag{3.13}$$

(l'hypothèse $d = 2$ est ici essentielle ; pour $d > 2$, l'implication serait fausse) ;

— d'autre part, on déduit de la validité de la conjecture de Tate pour les A_i que les groupes $\mathrm{CH}_1(A_i)^\perp$ sont nuls ; il s'ensuit, au vu de la suite de localisation et du théorème de changement de base propre, que l'injectivité de (3.13) implique l'exactitude du complexe (3.9).

3.3.3. Sur les corps strictement locaux. Considérons dorénavant une variété X irréductible, propre et lisse sur un corps strictement local K, que nous supposerons de caractéristique nulle pour simplifier, et conservons la notation introduite avant le théorème 3.10. Le cas du corps quasi-fini $\mathbf{C}((t))$ est à rapprocher de celui des corps finis : si $K = \mathbf{C}((t))$ et si l'on fixe un générateur topologique de $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$, il reste vrai que le groupe $H^{2d}(X, \mathbf{Z}_\ell(d))$ s'identifie au pro-ℓ-complété de $\pi_1^{\mathrm{ab}}(X)$ et que l'application ψ s'interprète comme la substitution de Frobenius (le générateur topologique fixé jouant le rôle de l'automorphisme de Frobenius). L'injectivité de l'application ψ, garantie sur les corps finis en toute généralité par le théorème de Kato et Saito, est-elle encore valable dans ce contexte ? Qu'en est-il si K est l'extension non ramifiée maximale d'un corps p-adique ?

Ces deux questions admettent une réponse affirmative dans le cas des surfaces de genre géométrique nul (sans hypothèse sur la variété d'Albanese). Cela peut se prouver à l'aide des méthodes de K-théorie algébrique évoquées au §3.3.1 (cf. [**CTR85**]). Alternativement, on peut en donner une démonstration plus géométrique suivant la stratégie du §3.3.2. L'expression du noyau de ψ en termes du complexe (3.9) dans le cas des corps locaux reste valable pour K strictement local, à un décalage près dans les degrés de cohomologie considérés : le noyau de ψ est maintenant dual du groupe d'homologie du complexe

$$H^1(X, \mathbf{Q}_\ell/\mathbf{Z}_\ell(1)) \longrightarrow H^2_A(\mathscr{X}, \mathbf{Q}_\ell/\mathbf{Z}_\ell(1)) \longrightarrow \bigoplus_{i \in I} \frac{H^2(A_i, \mathbf{Q}_\ell/\mathbf{Z}_\ell(1))}{\mathrm{CH}_1(A_i)^\perp} \tag{3.14}$$

défini de la même façon que (3.9). Ce qui empêche le reste de la preuve du §3.3.2 de fonctionner dans le cas strictement local, c'est d'une part que les groupes $\mathrm{CH}_1(A_i)^\perp$ ne sont pas nécessairement nuls et d'autre part que l'application naturelle $H^2(A, \mathbf{Q}_\ell(1)) \to \bigoplus_{i \in I} H^2(A_i, \mathbf{Q}_\ell(1))$ n'est pas toujours injective. Nous montrons dans [14, §4] que ces deux conditions sont cependant satisfaites si X est une surface de genre géométrique nul.

Les deux théorèmes suivants, établis dans [14], concernent la question de l'injectivité de ψ pour des surfaces simplement connexes de genre géométrique non nul sur un corps strictement local. Pour de telles surfaces, on a $H^{2d}(X, \mathbf{Z}_\ell(d)) = \mathbf{Z}_\ell$ d'après la suite spectrale de Hochschild–Serre, de sorte que l'application ψ est injective si et seulement si le groupe $A_0(X)$ est ℓ-divisible.

Théorème 3.11 ([14, Theorem 3]). *Si X est une surface $K3$ à réduction semi-stable sur le corps $\mathbf{C}((t))$, le groupe $A_0(X)$ est divisible.*

Le théorème 3.11 est prouvé en établissant l'exactitude du complexe (3.14) à l'aide des théorèmes de Kulikov–Persson–Pinkham [**Kul77**] [**PP81**] et de Miranda–Morrison [**MM83**] sur l'existence de bons modèles analytiques, à classe canonique triviale, des familles semi-stables de surfaces $K3$ sur le disque unité. Ces résultats fins sur la géométrie des dégénérescences de surfaces $K3$ à réduction semi-stable permettent en effet de traduire le groupe d'homologie du complexe (3.14) en termes de la combinatoire des triangulations de la sphère à courbure positive (cf. [**Laz08**]). L'information combinatoire globale intervenant au bout du compte dans la démonstration du théorème 3.11 est l'impossibilité de paver une sphère par des hexagones. Si X est une surface $K3$ sur l'extension non ramifiée maximale d'un corps p-adique, même à réduction semi-stable, nous ne savons pas si le groupe $A_0(X)$ est p'-divisible, faute de disposer d'analogues en caractéristique mixte des résultats géométriques que l'on vient de mentionner. *A posteriori*, il est remarquable qu'il ne soit pas nécessaire de connaître l'analogue des théorèmes de Kulikov–Persson–Pinkham et de Miranda–Morrison en caractéristique mixte pour établir l'injectivité de l'application ψ lorsque X est une surface $K3$ sur un corps p-adique (voir le théorème 3.10).

Théorème 3.12 ([14, Theorem 4]). *Sur le corps $K = \mathbf{C}((t))$ ainsi que, pour une infinité de nombres premiers p, sur l'extension non ramifiée maximale K d'un corps p-adique, il existe une surface X irréductible, projective, lisse, simplement connexe et à réduction semi-stable, telle que $A_0(X)/2A_0(X) = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.*

Ainsi, malgré le cas favorable des surfaces de genre géométrique nul et celui des surfaces $K3$ à réduction semi-stable sur $\mathbf{C}((t))$, ni le théorème de Kato–Saito sur les corps finis ni le théorème 3.10 sur les corps locaux ne s'étendent aux corps strictement locaux : les questions posées au début du §3.3.3 admettent une réponse négative en général.

Esquissons la construction de la surface X du théorème 3.12 dans le cas d'égale caractéristique nulle. Soit $f_0 : E \to \mathbf{P}^1_{\mathbf{C}}$ une surface $K3$ elliptique projective définie sur $\mathbf{C}$. Notons $\mathscr{E} \subset E$ l'ouvert de lissité de f_0 ; c'est le modèle de Néron de la fibre générique de f_0, en particulier c'est un schéma en groupes sur $\mathbf{P}^1_{\mathbf{C}}$. Comme $H^1(\mathbf{P}^1_{\mathbf{C}}, \mathscr{E}) = \mathrm{Br}(E) \simeq (\mathbf{Q}/\mathbf{Z})^{22-\rho}$ et comme $\rho \leqslant 20$, il existe un élément $\alpha \in H^1(\mathbf{P}^1_{\mathbf{C}}, \mathscr{E})$ d'ordre 4. Grâce à la théorie d'Ogg–Shafarevich, on en déduit l'existence d'une surface complexe V projective et lisse, munie d'un pinceau $f : V \to \mathbf{P}^1_{\mathbf{C}}$ de courbes de genre 1 dont la fibre générique est d'indice 4 et dont toutes les fibres sont de multiplicité 1 à l'exception de la fibre $f^{-1}(0)$, qui est de multiplicité 2 et dont la variété réduite sous-jacente $f^{-1}(0)_{\mathrm{red}}$ est lisse. On peut alors considérer le revêtement double X de V ramifié le long d'une fibre générale $f^{-1}(t)$ de f. Lorsque t tend vers 0, la surface X dégénère en une surface réductible $A = A_1 \cup A_2$, réunion de deux copies de V se coupant transversalement le long de $f^{-1}(0)_{\mathrm{red}}$ (cette construction est due à Persson). La surface X, définie sur $\mathbf{C}((t))$, est elle-même munie d'un pinceau de courbes de genre 1, sans fibre multiple mais avec au moins une fibre singulière, de sorte qu'elle est simplement connexe. Comme la fibre générique de f est d'indice 4, le nombre d'intersection, dans A_1 (resp. A_2), de la courbe $A_1 \cap A_2$ avec n'importe quel diviseur de A_1 (resp. de A_2) est pair. Cette condition et la simple connexité de X entraînent ensemble que pour $\ell = 2$, le groupe d'homologie du complexe (3.14) est $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.

Il est à noter que bien que les exemples fournis par le théorème 3.12 sur l'extension non ramifiée maximale d'un corps p-adique soient définis sur un corps p-adique K, l'injectivité de ψ ne tombe en défaut qu'après extension des scalaires à l'extension non ramifiée maximale de K. En effet, sur tout corps p-adique intermédiaire entre K et K^{nr}, le théorème 3.10 s'applique. *A contrario*, si l'on considère la cohomologie à coefficients finis et non ℓ-adiques, la compatibilité de la cohomologie étale avec les limites projectives de schémas permet de déduire du théorème 3.12 l'existence d'une surface projective et lisse X_0 définie sur un corps p-adique K_0 telle que $X(K_0) \neq \varnothing$ et telle que l'application classe de cycle

$$\mathrm{CH}_0(X_0)/n\mathrm{CH}_0(X_0) \longrightarrow H^4(X_0, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}(2)) \tag{3.15}$$

ne soit pas injective, pour un entier $n > 1$. Le seul autre exemple connu de ce phénomène est celui de Parimala et Suresh [**PS95**]. La surface X_0 est simplement connexe, contrairement à celle de *op. cit.*

Chapitre 4

Problèmes locaux-globaux et fibrations

Ce chapitre est consacré aux conjectures 1.3 et 1.4 énoncées dans l'introduction, qui portent sur l'existence de points rationnels et de zéro-cycles sur les variétés propres et lisses définies sur un corps de nombres. Nous y présentons le contenu des articles [11], [13] et [16]. Rappelons que la conjecture 1.4 n'est qu'une conséquence d'une conjecture plus générale de Colliot-Thélène, Kato et Saito prédisant, pour toute variété propre et lisse sur un corps de nombres, un analogue de la propriété d'approximation faible à équivalence rationnelle près pour les familles de zéro-cycles locaux soumises à la condition de Brauer–Manin. Nous renvoyons à [11, §1.1] pour l'énoncé précis de cette conjecture. Nous l'appellerons ci-dessous conjecture (E).

4.1. Contexte

Il existe deux méthodes générales pour vérifier les conjectures 1.3 et (E) pour une classe de variétés donnée.

La méthode de la descente, due à Colliot-Thélène et Sansuc [**CTS87**], étend aux variétés arbitraires la théorie classique de la descente sur les courbes elliptiques. Elle permit à ces auteurs d'établir d'une part la conjecture 1.3 pour les variétés toriques (cf. [**Sko01**, §6.3]) et d'autre part, en collaboration avec Swinnerton-Dyer, les conjectures 1.3 et (E) pour les surfaces de Châtelet, qui sont des surfaces rationnelles fibrées en coniques au-dessus de la droite projective, avec quatre fibres géométriques singulières (cf. [**CTSSD87**]). Le résultat sur les variétés toriques fut ensuite généralisé par Voskresenskiĭ, Sansuc et Borovoi pour aboutir au théorème suivant.

Théorème 4.1 ([**Bor96**]). *Soit X une variété propre, lisse et géométriquement irréductible sur un corps de nombres k. Si X est birationnellement équivalente à un espace homogène d'un groupe algébrique linéaire connexe à stabilisateurs géométriques connexes, l'ensemble $X(k)$ est dense dans $X(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{Br}(X)}$.*

La méthode des fibrations, également employée (quoique indirectement, c'est-à-dire non pas à X mais à des variétés auxiliaires obtenues par descente) dans le travail précédemment cité sur les surfaces de Châtelet, consiste à exploiter la structure d'une fibration $f : X \to Y$ pour déduire les conjectures 1.3 et (E) pour X lorsqu'on les connaît pour Y et pour beaucoup de fibres de f. C'est à cette méthode que les articles [11], [13] et [16] sont consacrés. Dans le cas de la conjecture 1.3, la question sous-jacente est la suivante.

Question 4.2. Un point arbitraire de $X(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{Br}(X)}$ peut-il être approché par un point de $X_c(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{Br}(X_c)}$ pour un $c \in Y(k)$ bien choisi ?

La situation la plus simple dans laquelle une réponse positive est connue est celle d'une fibration sur $\mathbf{P}^1_k$ dont les fibres sont géométriquement intègres et dont les fibres lisses ont un groupe de Brauer réduit aux classes constantes. La réponse positive à la question 4.2 est alors une simple conséquence de la propriété d'approximation faible sur $\mathbf{P}^1_k$ et des bornes de Lang–Weil-Nisnevič appliquées aux réductions des fibres de f sur les corps finis. Lorsque f admet une section définie sur $\bar{k}$, la démonstration fonctionne encore si l'on suppose seulement que les fibres au-dessus de $\mathbf{A}^1_k$ sont géométriquement intègres et que les fibres lisses ont un groupe de Brauer réduit aux constantes, grâce à la propriété d'approximation forte sur $\mathbf{A}^1_k$ (cf. [**CTSSD87**], [**Sko90**]) ; de plus, au lieu de supposer que les fibres sont géométriquement intègres, il suffit de supposer qu'elles sont *scindées*, c'est-à-dire qu'elles contiennent un ouvert non vide géométriquement intègre. Cependant, même pour $Y = \mathbf{P}^1_k$, le complémentaire d'un fermé de degré $\geqslant 2$ dans $\mathbf{P}^1_k$ ne possède pas assez de points entiers pour permettre à ce type d'arguments élémentaires de fonctionner lorsque f possède au moins deux fibres non scindées ou une fibre non scindée au-dessus d'un point non rationnel de la base.

Le premier argument de fibration autorisant plus d'une fibre non scindée est celui apparaissant dans la preuve, par Hasse, du théorème de Hasse–Minkowski pour les surfaces quadriques. Hasse parvint à se servir du théorème de Dirichlet sur les nombres premiers dans les progressions arithmétiques, combiné à la loi de réciprocité quadratique, pour répondre par l'affirmative à la question 4.2 dans le cas d'une fibration en produits de coniques sur $\mathbf{P}^1_k$ ayant des fibres non scindées au-dessus de 0 et ∞ (les autres fibres étant toutes scindées). L'argument de Hasse fut généralisé, depuis les années 1980, dans une série de travaux dus à Colliot-Thélène, Sansuc, Serre, Skorobogatov et Swinnerton-Dyer concernant les fibrations possédant un nombre arbitraire de fibres non scindées (tout en conservant l'hypothèse sur le groupe de Brauer des fibres). Le point de départ de cette série de généralisations fut l'article [**CTS82**]. Elle aboutit au théorème suivant, qui généralise aussi le théorème de Salberger [**Sal88**] [**Sal03**] selon lequel la conjecture (E) est vraie pour les surfaces fibrées en coniques sur $\mathbf{P}^1_k$.

Théorème 4.3 ([**CTSSD98**] [1]). *Soit X une variété propre, lisse et géométriquement irréductible sur un corps de nombres k, munie d'un morphisme dominant $f : X \to \mathbf{P}^1_k$ de fibre générique géométrique rationnellement connexe. Supposons les deux conditions suivantes satisfaites :*

(1) pour tout point fermé $m \in \mathbf{P}^1_k$, la fibre X_m possède une composante irréductible de multiplicité 1 *dans le corps des fonctions de laquelle la fermeture algébrique de $k(m)$ soit une extension abélienne de $k(m)$;*

1. En toute rigueur, seule une version légèrement affaiblie de l'énoncé (b) apparaît dans cet article ; sous les hypothèses du théorème, l'assertion (b) est établie en toute généralité dans [11].

(2) le groupe de Brauer des fibres lisses de f est réduit aux classes constantes.

Alors :

(a) si la conjecture 1.4 vaut pour les fibres lisses de f, elle vaut pour X ;

(b) si la conjecture (E) vaut pour les fibres lisses de f, elle vaut pour X ;

(c) si l'hypothèse de Schinzel est vraie et si la conjecture 1.3 vaut pour les fibres lisses de f, elle vaut pour X.

Rappelons que la conjecture 1.4 et la conjecture (E) concernent les zéro-cycles tandis que la conjecture 1.3 porte sur les points rationnels (cf. chapitre 1, pages 12 et 13, ainsi que l'introduction du chapitre 4).

L'hypothèse de Schinzel est une conjecture sur l'existence d'entiers en lesquels un nombre fini de polynômes de $\mathbf{Z}[t]$ prennent simultanément une valeur première. Seul le cas d'un polynôme de degré 1 est connu, c'est le théorème de Dirichlet sur les premiers dans les progressions arithmétiques. Le théorème 4.3 (c) est ainsi inconditionnel lorsque les fibres de f au-dessus de $\mathbf{P}^1_k \setminus \{0, \infty\}$ sont scindées (lorsque $k \neq \mathbf{Q}$, l'argument nécessite une variante du théorème de Dirichlet qui repose sur un théorème de Waldschmidt en théorie de la transcendance).

L'existence d'une composante de multiplicité 1 dans chaque fibre de f est automatique lorsque la fibre générique est rationnellement connexe, d'après Graber, Harris et Starr. L'hypothèse d'abélianité (1) apparaissant dans le théorème 4.3, en revanche, limite significativement le champ d'applicabilité du théorème. Elle est néanmoins satisfaite, ainsi que l'hypothèse (2), lorsque la fibre générique de f est un produit de quadriques et de variétés de Severi–Brauer.

Dans une direction différente, si l'on revient à la situation où toutes les fibres au-dessus de $\mathbf{A}^1_k$ sont géométriquement intègres ou du moins scindées, le premier résultat dans lequel l'hypothèse sur le groupe de Brauer des fibres lisses est relâchée est le théorème suivant, dû à Harari.

Théorème 4.4 ([**Har94**] [**Har97**]). *Soit X une variété propre, lisse et géométriquement irréductible sur un corps de nombres k, munie d'un morphisme dominant $f : X \to \mathbf{P}^1_k$ de fibre générique géométrique rationnellement connexe. Supposons les fibres de f au-dessus de $\mathbf{A}^1_k$ scindées. Si la conjecture 1.3 vaut pour les fibres lisses de f, elle vaut pour X.*

L'énoncé analogue concernant la conjecture (E) (« si toutes les fibres de f sont scindées et si la conjecture (E) ou la conjecture 1.3 vaut pour les fibres lisses de f, alors la conjecture (E) vaut pour X ») fut établi par Liang [**Lia12**], qui, du même coup, en considérant la fibration triviale (c'est-à-dire la seconde projection $X = V \times \mathbf{P}^1_k \to \mathbf{P}^1_k$), déduisit du théorème 4.1 la validité de la conjecture (E) pour toutes les variétés birationnellement équivalentes à un espace homogène d'un groupe linéaire connexe à stabilisateurs géométriques connexes (cf. [**Lia13**]).

Les arguments employés dans la preuve du théorème 4.4 butent, dans la situation où f possède davantage de fibres non scindées, sur le même problème d'abélianité que ceux de la preuve du théorème 4.3 lorsque l'hypothèse (1) dudit théorème n'est pas satisfaite (et ce, même si, dans le cas du théorème 4.4, on suppose que les fibres non scindées vérifient l'hypothèse (1) du théorème 4.3 ; la difficulté est qu'on a alors affaire à des extensions abéliennes d'extensions abéliennes, qui ne sont pas nécessairement des extensions abéliennes elles-mêmes).

La raison pour laquelle tous les travaux précédemment cités requièrent une hypothèse d'abélianité est qu'ils reposent, en fin de compte, sur l'énoncé bien connu suivant, conséquence de la loi de réciprocité globale de la théorie du corps de classes : si L/k est une extension finie *abélienne* de corps de nombres et si $\alpha \in k$ est une norme locale depuis L en toute place de k sauf au plus une, alors α est une norme locale depuis L en toute place de k sans exception. Cette affirmation tombe en défaut si l'extension L/k n'est pas abélienne.

Qu'il s'agisse de points rationnels ou de zéro-cycles, la littérature ne contient qu'un seul résultat qui porte sur des fibrations générales ne vérifiant pas cette condition d'abélianité [2], en dehors du théorème 4.4. Il s'agit d'un théorème de Colliot-Thélène et Skorobogatov [**Sko96**] [**CTS00**] selon lequel le théorème 4.3 (c) vaut inconditionnellement et sans supposer l'hypothèse (1) satisfaite, lorsque le lieu, dans $\mathbf{P}^1_k$, des fibres non scindées de f est de degré 2. Sa preuve est sensiblement différente de celles des théorèmes 4.3 et 4.4 ; elle repose sur la méthode de la descente. Signalons, pour terminer, que dans ce dernier énoncé comme dans le théorème 4.4 (ainsi que dans [**Lia12**]), au lieu de supposer la validité de la conjecture 1.3, 1.4 ou (E) pour chaque fibre lisse de f, il suffit de la supposer pour les fibres lisses au-dessus d'un sous-ensemble hilbertien de $\mathbf{P}^1_k$.

4.2. Contributions des articles [11] et [13]

Tous les résultats des articles [11] et [13] étant généralisés dans [16], nous nous contentons ici d'évoquer brièvement les contributions de [11] et de [13]. (Notons cependant qu'une partie significative du contenu de [11] est utile à [16].)

4.2.1. Fibrations sur une courbe de genre non nul. L'article [11] concerne les zéro-cycles, c'est-à-dire les conjectures 1.4 et (E), dans la situation d'une variété fibrée au-dessus d'une courbe de genre non nul. D'après un théorème de Saito, la conjecture (E) vaut pour les courbes de genre arbitraire pour lesquelles le sous-groupe divisible du groupe de Tate–Shafarevich de la jacobienne s'annule. Qu'en est-il pour les surfaces fibrées en coniques au-dessus d'une telle courbe ? Le théorème principal de [11] affirme que les assertions (a) et (b) du théorème 4.3 restent valables, telles quelles, si l'on remplace $\mathbf{P}^1_k$, dans son énoncé, par une courbe arbitraire vérifiant elle-même la conjecture (E). Cela s'applique, en particulier,

2. On trouve toutefois dans [**Wei13**] quelques résultats portant sur la variété définie par l'équation $N_{K/k}(x) = P(t)$ dans des situations où l'extension finie K/k n'est pas abélienne. Comme nous le montrons dans [16], ces arguments s'appliquent à des fibrations générales soumises à une condition d'abélianité affaiblie (« presque abélianité » dans la terminologie de [16] ; par exemple, les extensions cubiques sont toutes « presque abéliennes »).

aux fibrations en produits de quadriques et de variétés de Severi–Brauer au-dessus d'une courbe de genre quelconque : si la base d'une telle fibration vérifie la conjecture (E), l'espace total la vérifie aussi. Cet énoncé avait auparavant été établi par Colliot-Thélène, Frossard et van Hamel dans le cas des fibrations en variétés de Severi–Brauer d'indice sans facteur carré au-dessus d'une courbe de genre quelconque. Il s'agissait du premier cas connu de la conjecture 1.4 pour des variétés non rationnellement connexes de dimension > 1. Leurs arguments reposaient sur de nombreuses considérations spécifiques aux variétés de Severi–Brauer (modèles d'Artin, théorème de Merkurjev et Suslin, etc).

La démonstration des résultats de [11] procède par réduction au cas où la base est $\mathbf{P}^1_k$, traité dans [**CTSSD98**], et s'appuie notamment sur les trois ingrédients nouveaux suivants, tous réutilisés dans [16] :

— un argument général de réduction aux zéro-cycles effectifs, à la base duquel se trouve un lemme de déplacement affirmant que si C est une courbe géométriquement irréductible, projective et lisse de genre g sur un corps de nombres k et si $f : X \to C$ est un morphisme de fibre générique lisse et géométriquement irréductible, il existe un ensemble fini S de places de k tel que pour toute place $v \notin S$, tout diviseur de degré $> 2g$ sur $C \otimes_k k_v$ soit linéairement équivalent à un diviseur effectif réduit de la forme f_*z où z est un zéro-cycle effectif sur $X \otimes_k k_v$;

— un théorème sur les groupes de Chow de zéro-cycles dans les familles de variétés rationnellement connexes, selon lequel si $f : X \to C$ est comme ci-dessus et si la fibre générique géométrique de f est rationnellement connexe, l'application $f_* : \mathrm{CH}_0(X \otimes_k k_v) \to \mathrm{CH}_0(C \otimes_k k_v)$ est un isomorphisme pour toute place v de k hors d'un ensemble fini (l'énoncé analogue où C est remplacée par $\mathrm{Spec}(k)$ est dû à Kollár et Szabó [**KS03**]) ; la démonstration repose sur les théorèmes de Kato, Saito et Sato discutés au §3.3 et sur une variante « en famille » de l'argument de décomposition de la diagonale ;

— un théorème de dualité arithmétique lié au formalisme des groupes $\mathrm{Pic}_+(C)$, $\mathrm{Br}_+(C)$ discuté au §4.3.2 ci-après, qui développe les idées de van Hamel sur l'homologie « pseudo-motivique » (cf. [**vH03**]).

Par la suite, Liang [**Lia12**] étendit les résultats de [11] aux fibrations au-dessus de l'espace projectif et montra que l'on peut se contenter, là aussi, de supposer les conjectures 1.4 et (E) pour les fibres au-dessus d'un ensemble hilbertien de points fermés de la base plutôt que pour toutes les fibres lisses.

4.2.2. Combinatoire additive et Schinzel homogène. Les techniques fines de théorie analytique des nombres (méthode du cercle de Hardy–Littlewood, méthodes de crible, combinatoire additive) combinées à la méthode de la descente ont permis, depuis une quinzaine d'années, plusieurs résultats spectaculaires établissant la conjecture 1.3 (voire aussi la conjecture (E)) dans des cas hors d'atteinte des théorèmes énoncés au §4.1. Browning, Matthiesen et Skorobogatov ont notamment obtenu le théorème suivant.

THÉORÈME 4.5 ([**BMS14**]). *Soit X une surface irréductible, propre et lisse sur $\mathbf{Q}$, munie d'un morphisme $f : X \to \mathbf{P}^1_{\mathbf{Q}}$ dont la fibre générique est une conique. Supposons que toutes les fibres singulières de f soient au-dessus de points rationnels de $\mathbf{P}^1_{\mathbf{Q}}$. Alors X vérifie la conjecture 1.3.*

Ce que nous remarquons dans [13], c'est d'une part qu'il est possible d'adapter la preuve du théorème 4.3 (c) de telle sorte qu'elle ne nécessite qu'une variante de l'hypothèse de Schinzel pour des polynômes homogènes en deux variables, plus faible que l'hypothèse de Schinzel d'origine, et d'autre part, que les résultats de Green, Tao et Ziegler [**GT10**] [**GT12**] [**GTZ12**], sur lesquels [**BMS14**] reposait déjà, établissent cette variante dans le cas de polynômes linéaires. Le théorème principal de [13] affirme ainsi que le théorème 4.3 (c) est vrai inconditionnellement lorsque $k = \mathbf{Q}$ et que les fibres non scindées de f sont toutes au-dessus de points rationnels de $\mathbf{P}^1_{\mathbf{Q}}$. Il s'ensuit une nouvelle démonstration, plus simple, de la plupart des résultats de [**BMS14**] ainsi qu'une généralisation de ces résultats aux fibrations soumises seulement aux hypothèses (1) et (2) du théorème 4.3, par exemple les fibrations en produits de quadriques et de variétés de Severi–Brauer.

4.3. Au-delà de la condition d'abélianité ([16])

4.3.1. Zéro-cycles dans les fibrations. Nous menons dans [16] la méthode des fibrations à son terme dans le contexte des zéro-cycles, lorsque la fibre générique est rationnellement connexe et que la base est une courbe.

THÉORÈME 4.6 ([16, Theorem 8.3]). *Soit $f : X \to C$ un morphisme dominant de fibre générique géométrique rationnellement connexe d'une variété X propre, lisse et géométriquement irréductible sur un corps de nombres k vers une courbe C vérifiant la conjecture (E).*

(1) Si la conjecture (E) vaut pour les fibres lisses de f, elle vaut pour X.

(2) Si la conjecture 1.4 vaut pour les fibres lisses de f, elle vaut pour X.

(3) Si la conjecture 1.3 vaut pour les fibres lisses de f, la conjecture (E) vaut pour X.

Le théorème 4.6 généralise le théorème 4.3, assertions (a) et (b), en le débarrassant à la fois de l'hypothèse d'abélianité sur les fibres singulières et de l'hypothèse de trivialité du groupe de Brauer des fibres lisses modulo les classes constantes.

Le résultat prouvé dans [16] est quelque peu plus précis : d'une part, nous n'y supposons les conjectures 1.3, 1.4 et (E) que pour les fibres au-dessus d'un ensemble hilbertien de points fermés de C et d'autre part, au lieu d'exiger que la fibre générique géométrique $X_{\bar{\eta}}$ de f soit rationnellement connexe, nous supposons seulement qu'elle vérifie $H^1(X_{\bar{\eta}}, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) = 0$ et $A_0(X_{\bar{\eta}} \otimes K) = 0$, où K désigne une clôture algébrique du corps de fonctions de $X_{\bar{\eta}}$ (conditions satisfaites par exemple par les surfaces de Barlow, qui sont de type général).

Une récurrence quasi immédiate montre que le théorème 4.6 reste valable si dans son énoncé on remplace la courbe C par le produit $C \times (\mathbf{P}^1_k)^n$ pour un $n \geqslant 1$. Les hypothèses et conclusions du théorème 4.6 étant des invariants birationnels, il s'ensuit que l'on peut remplacer, dans son énoncé, la courbe C par toute variété birationnellement équivalente à $C \times \mathbf{P}^n_k$ où C est une courbe vérifiant (E), par exemple par l'espace projectif lui-même. Par contraste, les raisonnements ayant permis jusqu'ici d'obtenir des versions du théorème 4.3 pour des fibrations au-dessus d'un espace projectif à partir du cas des fibrations au-dessus de $\mathbf{P}^1_k$ sont beaucoup plus délicats, l'hypothèse (2) du théorème 4.3 ne se propageant pas, en général, des fibres de f à X (cf. [4, Corollaire 3.5], [**Lia12**, Théorème 3.5]).

En combinant le théorème 4.6 (3) avec le théorème 4.1, on obtient ainsi :

Corollaire 4.7. *Soit X une variété propre, lisse et géométriquement irréductible sur un corps de nombres k. Supposons qu'il existe un morphisme $f : X \to Y$ de fibre générique birationnellement équivalente à un espace homogène d'un groupe linéaire connexe à stabilisateurs géométriques connexes, vers une variété Y birationnellement équivalente à C, à $\mathbf{P}^n_k$ ou à $C \times \mathbf{P}^n_k$ pour un entier $n \geqslant 1$ et une courbe C vérifiant la conjecture (E). Alors X vérifie la conjecture (E).*

Ce corollaire s'applique en particulier à l'espace total de toute famille de variétés toriques paramétrée par Y.

Dans le cas où la base est $\mathbf{P}^1_k$, où la fibre générique est birationnellement équivalente à un torseur sous un tore, où ce tore est constant et plus précisément est le tore normique $R^1_{K/k}\mathbf{G}_{\mathrm{m}}$ associé à une extension finie K/k, la conjecture (E) était auparavant connue pour X lorsque K/k est cyclique ou de degré premier mais elle était ouverte déjà pour K/k biquadratique (cf. [**Wei13**], [**Sme13**]).

Appliquant le corollaire 4.7 à la fibration triviale, on retrouve aussi le théorème de Liang mentionné après le théorème 4.4.

4.3.2. Deux ingrédients de la preuve. L'un des ingrédients grâce auxquels toute hypothèse d'abélianité est évitée dans le théorème 4.6 est le lemme suivant, qui doit être mis en parallèle avec le théorème de Dirichlet sur les nombres premiers dans les progressions arithmétiques. Celui-ci affirme que si l'on se donne un ensemble fini S de places finies d'un corps de nombres k et un élément $\xi_v \in k_v^*$ pour chaque $v \in S$, il existe $\xi \in k^*$ arbitrairement proche de ξ_v pour $v \in S$ tel que ξ soit une unité hors de S sauf en une unique place, non spécifiée, en laquelle ξ est une uniformisante. C'est pour contrôler la décomposition de cette place non spécifiée dans une extension abélienne L/k donnée que Hasse et ses continuateurs employaient l'argument de réciprocité signalé à la fin du §4.1.

Lemme 4.8. *Soit L/k une extension finie de corps de nombres. Soit S un ensemble fini de places de k. Pour $v \in S$, soit $\xi_v \in k_v^*$. Supposons que ξ_v soit une* *norme locale depuis L pour tout $v \in S$. Alors il existe $\xi \in k^*$ arbitrairement proche de ξ_v pour $v \in S$, tel que ξ soit une unité hors de S sauf en des places v au-dessus desquelles L admet une place de degré* 1.

L'extension L/k, ici, n'est pas supposée abélienne. Le lemme 4.8 se démontre par une simple application de la propriété d'approximation forte en dehors d'une place pour le complémentaire d'un fermé de codimension au moins 2 dans un espace affine ; en l'occurrence, le complémentaire, dans l'espace affine $R_{L/k}\mathbf{A}^1_L$, du lieu singulier du complémentaire du tore quasi-trivial $R_{L/k}\mathbf{G}_{\mathrm{m},L}$.

Un autre ingrédient nouveau de la démonstration du théorème 4.6, illustré ci-après, repose sur l'emploi d'un théorème de dualité arithmétique prouvé dans [11]. Celui-ci s'exprime en termes d'une variante, notée $\mathrm{Pic}_+(C)$, du groupe de Picard relatif introduit par Rosenlicht. Dans le cas où $C = \mathbf{P}^1_k$, ce théorème de dualité se réduit au théorème de Poitou–Tate pour les tores algébriques et l'usage de la notation $\mathrm{Pic}_+(C)$ n'est alors pas indispensable, quoique commode.

De façon générale, le groupe $\mathrm{Pic}_+(C)$ dépend du choix d'un ensemble fini de points fermés $M \subset C$ et d'une algèbre finie étale $L_m/k(m)$ pour chaque $m \in M$. Il est défini comme le quotient de $\mathrm{Div}(C \setminus M)$ par le sous-groupe des diviseurs principaux de la forme $\mathrm{div}(h)$ où h est une fonction rationnelle sur C, inversible aux points de M, telle que $h(m)$ soit une norme depuis L_m pour tout $m \in M$. Le théorème de dualité arithmétique dont il est question ici décrit l'image de l'application naturelle

$$\mathrm{Pic}_+(C) \to \prod_{v\in\Omega} \mathrm{Pic}_+(C \otimes_k k_v), \tag{4.1}$$

ou plutôt de l'application obtenue après une complétion convenable des groupes considérés. Nous renvoyons à [11, §5] pour l'énoncé précis. Il se déduit des théorèmes de dualité arithmétique classiques pour les modules galoisiens finis, pour les tores algébriques et pour les variétés abéliennes.

Voici comment, dans le cas très simple d'une fibration $f : X \to \mathbf{P}^1_k$ dont les fibres au-dessus de $\mathbf{P}^1_k \setminus \{0, \infty\}$ sont scindées, le lemme 4.8 et une information sur l'image de l'application (4.1) peuvent se combiner et permettre de fabriquer une fibre lisse de f possédant un point adélique. Choisissons une extension finie L/k sur laquelle les variétés $f^{-1}(0)$ et $f^{-1}(\infty)$ deviennent scindées et considérons le groupe $\mathrm{Pic}_+(C)$ associé à la courbe $C = \mathbf{P}^1_k$, au fermé $M = \{0, \infty\}$ et aux extensions $L_0 = L_\infty = L$. Si $(P_v)_{v\in\Omega} \in X(\mathbf{A}_k)$ désigne un point adélique supporté hors de $f^{-1}(M)$, il est aisé de vérifier que la classe de la famille $(f(P_v))_{v\in\Omega}$ dans $\prod_{v\in\Omega} \mathrm{Pic}_+(C \otimes_k k_v)$ est l'image d'un élément de $\mathrm{Pic}_+(C)$ si et seulement s'il existe $\alpha \in k^*$ tel que αt_v soit une norme locale depuis L pour tout $v \in \Omega$, où t_v désigne la coordonnée du point $f(P_v) \in \mathbf{P}^1(k_v)$. Si cette condition est satisfaite, on peut appliquer le lemme 4.8 aux $\xi_v = \alpha t_v$, ce qui fournit $\xi \in k^*$; posant $t = \xi/\alpha$, on obtient ainsi un point $t \in k^* = \mathbf{G}_\mathrm{m}(k) \subset \mathbf{P}^1(k)$ tel que $X_t(\mathbf{A}_k) \neq \varnothing$ si l'ensemble S a été choisi assez grand au début de l'argument.

Lorsque $C = \mathbf{P}^1_k$, l'existence d'un point adélique $(P_v)_{v\in\Omega} \in X(\mathbf{A}_k)$ supporté hors de $f^{-1}(M)$ tel que la classe $(f(P_v))_{v\in\Omega} \in \prod_{v\in\Omega} \mathrm{Pic}_+(C\otimes_k k_v)$ soit l'image d'un élément de $\mathrm{Pic}_+(C)$ est une conséquence de l'hypothèse $X(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{Br}(X)} \neq \varnothing$. Cela résulte de la combinaison du « lemme formel » démontré par Harari dans [**Har94**], du théorème de dualité arithmétique concernant $\mathrm{Pic}_+(C)$ évoqué ci-dessus et d'une propriété de finitude simple mais essentielle du groupe $\mathrm{Br}_+(C)$ avec lequel $\mathrm{Pic}_+(C)$ s'accouple naturellement (cf. [16, Remark 2.2 (ii)]).

4.3.3. Une conjecture sur les valeurs localement décomposées des polynômes. Les idées menant à la preuve du théorème 4.6 s'appliquent aussi à l'étude de la conjecture 1.3 dans les fibrations au-dessus de $\mathbf{P}^1_k$. Dans ce contexte, le pendant du théorème 4.6 ne saurait être inconditionnel puisque même dans le cas des surfaces fibrées en coniques au-dessus de $\mathbf{P}^1_{\mathbf{Q}}$, la conjecture 1.3 n'est connue que sous l'hypothèse de Schinzel. Nous proposons dans [16] la conjecture suivante ; elle généralise le lemme 4.8 (en toute rigueur, une version légèrement affaiblie du lemme 4.8, qui suffit néanmoins à la preuve du théorème 4.6 lorsque $C = \mathbf{P}^1_k$) et permettrait de répondre à la question 4.2 sous la seule hypothèse que la fibre générique géométrique de f est rationnellement connexe (cf. §4.3.4). Son énoncé est à rapprocher de celui de la conséquence de l'hypothèse de Schinzel formulée par Serre, notée (H_1) dans [**CTSD94**].

CONJECTURE 4.9 ([16]). *Soient k un corps de nombres et $P_1, \dots, P_n \in k[t]$, pour un entier $n \geqslant 1$, des polynômes irréductibles unitaires deux à deux distincts. Posons $k_i = k[t]/(P_i(t))$. Notons $a_i \in k_i$ la classe de t. Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, supposons donnés une extension finie L_i/k_i et un élément $b_i \in k_i^*$. Soit S un ensemble fini de places de k contenant les places réelles de k et les places finies au-dessus desquelles l'un des b_i n'est pas une unité ou l'une des extensions L_i/k_i est ramifiée. Pour $v \in S$, soit $t_v \in k_v$ tel que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on ait*

$$b_i(t_v - a_i) = N_{L_i\otimes_k k_v/k_i\otimes_k k_v}(x_{i,v})$$

dans $k_i \otimes_k k_v$ pour un $x_{i,v} \in (L_i \otimes_k k_v)^*$. Il existe alors $t_0 \in k$ vérifiant :

(1) t_0 est arbitrairement proche de t_v pour $v \in S$;

(2) pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ et toute place finie w de k_i telle que $w(t_0 - a_i) > 0$, soit w divise une place de S, soit le corps L_i possède une place de degré 1 sur w.

Lorsque les L_i sont tous isomorphes à une même extension finie galoisienne L de k (ce que dans les applications on peut toujours supposer), la conclusion (2) est équivalente à la condition suivante : pour tout i, l'élément $P_i(t_0) \in k^*$ n'est de valuation strictement positive aux places hors de S qu'en des places qui se décomposent totalement dans L.

Nous montrons dans [16, §9.2] que la conjecture 4.9 résulte de l'hypothèse de Schinzel, et même de sa variante homogène (cf. §4.2.2), lorsque les extensions L_i/k_i

sont toutes abéliennes. Pour des extensions L_i/k_i arbitraires, nous prouvons dans [16] la conjecture 4.9 lorsque $\sum_{i=1}^{n}[k_i : k] \leqslant 2$, à l'aide d'arguments algébro-géométriques reposant sur la propriété d'approximation forte en dehors d'une place pour des variétés auxiliaires similaires à celle apparue dans la preuve du lemme 4.8. Le résultat le plus fort en direction de la conjecture 4.9 est un théorème récent de Matthiesen [**Mat14**] : à l'aide des techniques de combinatoire additive, elle établit la conjecture sous la seule hypothèse que $k = k_1 = \cdots = k_n = \mathbf{Q}$. Enfin, signalons qu'un travail d'Irving [**Irv14**] reposant sur des méthodes de crible, convenablement reformulé (cf. [16, §9.2.5]), démontre la conjecture 4.9 dans un cas (le seul connu) où $\sum_{i=1}^{n}[k_i : k] \geqslant 4$ et où les extensions k_i/k ne sont cependant pas toutes triviales.

4.3.4. Application aux points rationnels dans les fibrations. Les idées employées dans la preuve du théorème 4.6 conduisent au théorème suivant.

THÉORÈME 4.10 ([16, Corollary 9.25]). *Soient X une variété propre, lisse et géométriquement irréductible sur un corps de nombres k et $f : X \to \mathbf{P}^n_k$ un morphisme dominant de fibre générique géométrique rationnellement connexe, pour un $n \geqslant 1$. Admettons la conjecture 4.9. Si la conjecture 1.3 vaut pour les fibres lisses de f, elle vaut pour X.*

Dans la situation d'une fibration au-dessus de $\mathbf{P}^1_k$, la conjecture 4.9 est appliquée, au cours de la preuve du théorème 4.10, aux polynômes définissant les points fermés de $\mathbf{P}^1_k$ au-dessus desquels les fibres de f ne sont pas scindées, éventuellement accompagnés d'un polynôme de degré 1 dans certains cas exceptionnels qui en tout cas ne se présentent pas si f possède une fibre non scindée au-dessus d'un point rationnel, ou si k est totalement imaginaire, ou si les fibres lisses de f ont leur groupe de Brauer réduit aux constantes. Compte tenu de la validité de la conjecture 4.9 lorsque $\sum_{i=1}^{n}[k_i : k] \leqslant 2$, on voit ainsi que le théorème 4.10 est inconditionnel pour les fibrations au-dessus de la droite projective lorsque le lieu, dans $\mathbf{P}^1_k$, des fibres non scindées de f est de degré $\leqslant 2$, à l'exception d'un cas très particulier. Ce résultat généralise simultanément le théorème 4.4 et le théorème de [**CTS00**] mentionné à la fin du §4.1, replaçant ainsi ce dernier dans le contexte de la méthode des fibrations.

Enfin, en combinant le théorème de Matthiesen [**Mat14**] et le théorème 4.10, on obtient l'énoncé inconditionnel suivant :

THÉORÈME 4.11 ([16, Theorem 9.28]). *Soit X une variété propre, lisse et géométriquement irréductible sur $\mathbf{Q}$ munie d'un morphisme dominant $f : X \to \mathbf{P}^1_{\mathbf{Q}}$ de fibre générique géométrique rationnellement connexe. Supposons que toutes les fibres non scindées de f soient au-dessus de points rationnels de $\mathbf{P}^1_{\mathbf{Q}}$. Si la conjecture 1.3 vaut pour les fibres lisses de f, elle vaut pour X.*

Dans l'énoncé du théorème 4.10 comme dans celui du théorème 4.11, on peut se contenter de supposer la conjecture 1.3 vérifiée pour les fibres de f au-dessus d'un ensemble hilbertien de points rationnels de la base.

Bibliographie

[Abr09] D. Abramovich, *Birational geometry for number theorists*, Arithmetic geometry, Clay Math. Proc., vol. 8, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009, p. 335–373.

[AS07] M. Asakura et S. Saito, *Surfaces over a p-adic field with infinite torsion in the Chow group of 0-cycles*, Algebra Number Theory **1** (2007), no. 2, 163–181.

[Asa12] M. Asakura, *Quintic surface over p-adic local fields with infinite p-primary torsion in the Chow group of 0-cycles*, Regulators, Contemp. Math., vol. 571, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2012, p. 1–17.

[Ati71] M. F. Atiyah, *Riemann surfaces and spin structures*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **4** (1971), 47–62.

[Ax68] J. Ax, *The elementary theory of finite fields*, Ann. of Math. (2) **88** (1968), 239–271.

[BCP11] I. Bauer, F. Catanese et R. Pignatelli, *Surfaces of general type with geometric genus zero : a survey*, Complex and differential geometry, Springer Proc. Math., vol. 8, Springer, Heidelberg, 2011, p. 1–48.

[BCTS08] M. Borovoi, J.-L. Colliot-Thélène et A. N. Skorobogatov, *The elementary obstruction and homogeneous spaces*, Duke Math. J. **141** (2008), no. 2, 321–364.

[Blo74] S. Bloch, *Torsion algebraic cycles, K_2, and Brauer groups of function fields*, Bull. Amer. Math. Soc. **80** (1974), 941–945.

[Blo80] ———, *Lectures on algebraic cycles*, Duke University Mathematics Series, IV, Duke University Mathematics Department, Durham, N.C., 1980.

[Blo81] ———, *On the Chow groups of certain rational surfaces*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **14** (1981), no. 1, 41–59.

[BMS14] T. D. Browning, L. Matthiesen et A. N. Skorobogatov, *Rational points on pencils of conics and quadrics with many degenerate fibers*, Ann. of Math. (2) **180** (2014), no. 1, 381–402.

[Bor96] M. Borovoi, *The Brauer-Manin obstructions for homogeneous spaces with connected or abelian stabilizer*, J. reine angew. Math. **473** (1996), 181–194.

[BSD75] B. J. Birch et H. P. F. Swinnerton-Dyer, *The Hasse problem for rational surfaces*, J. reine angew. Math. **274/275** (1975), 164–174 (volume en l'honneur de Hasse).

[Cam92] F. Campana, *Connexité rationnelle des variétés de Fano*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **25** (1992), no. 5, 539–545.

[Che35] C. Chevalley, *Démonstration d'une hypothèse de M. Artin*, Hamb. Abh. **11** (1935), 73–75.

[Coo91] K. R. Coombes, *The arithmetic of zero cycles on surfaces with geometric genus and irregularity zero*, Math. Ann. **291** (1991), no. 3, 429–452.

[CT83] J.-L. Colliot-Thélène, *Hilbert's Theorem 90 for K_2, with application to the Chow groups of rational surfaces*, Invent. math. **71** (1983), no. 1, 1–20.

[CT95] ———, *L'arithmétique du groupe de Chow des zéro-cycles*, J. Théor. Nombres Bordeaux **7** (1995), no. 1, 51–73, Les Dix-huitièmes Journées Arithmétiques (Bordeaux, 1993).

[CT03] ———, *Points rationnels sur les fibrations*, Higher dimensional varieties and rational points (Budapest, 2001), Bolyai Soc. Math. Stud., vol. 12, Springer, Berlin, 2003, p. 171–221.

[CT11] ———, *Variétés presque rationnelles, leurs points rationnels et leurs dégénérescences*, Arithmetic geometry, Lecture Notes in Math., vol. 2009, Springer, Berlin, 2011, p. 1–44.

[CTM04] J.-L. Colliot-Thélène et D. A. Madore, *Surfaces de del Pezzo sans point rationnel sur un corps de dimension cohomologique un*, J. Inst. Math. Jussieu **3** (2004), no. 1, 1–16.

[CTR85] J.-L. Colliot-Thélène et W. Raskind, *$\mathscr{K}_2$-cohomology and the second Chow group*, Math. Ann. **270** (1985), no. 2, 165–199.

[CTR91] ———, *Groupe de Chow de codimension deux des variétés définies sur un corps de nombres : un théorème de finitude pour la torsion*, Invent. math. **105** (1991), no. 2, 221–245.

[CTS81] J.-L. Colliot-Thélène et J.-J. Sansuc, *On the Chow groups of certain rational surfaces : a sequel to a paper of S. Bloch*, Duke Math. J. **48** (1981), no. 2, 421–447.

[CTS82] ———, *Sur le principe de Hasse et l'approximation faible, et sur une hypothèse de Schinzel*, Acta Arith. **41** (1982), no. 1, 33–53.

[CTS87] ———, *La descente sur les variétés rationnelles. II*, Duke Math. J. **54** (1987), no. 2, 375–492.

[CTS00] J.-L. Colliot-Thélène et A. N. Skorobogatov, *Descent on fibrations over $\mathbf{P}^1_k$ revisited*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **128** (2000), no. 3, 383–393.

[CTSD94] J.-L. Colliot-Thélène et Sir Peter Swinnerton-Dyer, *Hasse principle and weak approximation for pencils of Severi-Brauer and similar varieties*, J. reine angew. Math. **453** (1994), 49–112.

[CTSSD87] J.-L. Colliot-Thélène, J.-J. Sansuc et Sir Peter Swinnerton-Dyer, *Intersections of two quadrics and Châtelet surfaces, I*, J. reine angew. Math. **373** (1987), 37–107 ; *II*, **374** (1987), 72–168.

[CTSSD98] J.-L. Colliot-Thélène, A. N. Skorobogatov et Sir Peter Swinnerton-Dyer, *Rational points and zero-cycles on fibred varieties : Schinzel's hypothesis and Salberger's device*, J. reine angew. Math. **495** (1998), 1–28.

[Del73] P. Deligne, *Cohomologie à supports propres*, Exp. XVII, Théorie des topos et cohomologie étale des schémas. Tome 3, Springer-Verlag, Berlin, 1973, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1963–1964 (SGA 4), Lecture Notes in Mathematics, vol. 305.

[Del80] ———, *La conjecture de Weil : II*, Publ. Math. de l'I.H.É.S. (1980), no. 52, 137–252.

[Del89] ———, *Le groupe fondamental de la droite projective moins trois points*, Galois groups over **Q** (Berkeley, CA, 1987), Math. Sci. Res. Inst. Publ., vol. 16, Springer, New York, 1989, p. 79–297.

[Dem09] C. Demarche, *Obstruction de descente et obstruction de Brauer-Manin étale*, Algebra Number Theory **3** (2009), no. 2, 237–254.

[DJL83] J. Denef, M. Jarden et D. J. Lewis, *On Ax-fields which are C_i*, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) **34** (1983), no. 133, 21–36.

[dJS03] A. J. de Jong et J. Starr, *Every rationally connected variety over the function field of a curve has a rational point*, Amer. J. Math. **125** (2003), no. 3, 567–580.

[Esn03] H. Esnault, *Varieties over a finite field with trivial Chow group of* 0*-cycles have a rational point*, Invent. math. **151** (2003), no. 1, 187–191.

[GA05] C. D. González-Avilés, *On the Hasse principle for zero-cycles on Severi-Brauer fibrations*, Int. Math. Res. Not. (2005), no. 48, 2969–2982.

[GHS03] T. Graber, J. Harris et J. Starr, *Families of rationally connected varieties*, J. Amer. Math. Soc. **16** (2003), no. 1, 57–67.

[Gil07] P. Gille, *Rationality properties of linear algebraic groups and Galois cohomology*, notes, 2007, http://math.univ-lyon1.fr/homes-www/gille/prenotes/mcm.pdf.

[Gro83] A. Grothendieck, lettre à Faltings du 27 juin 1983 (en allemand), parue dans : Geometric Galois actions, Vol. 1, London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 242, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997, p. 49–58.

[GT10] B. Green et T. Tao, *Linear equations in primes*, Ann. of Math. (2) **171** (2010), no. 3, 1753–1850.

[GT12] ———, *The Möbius function is strongly orthogonal to nilsequences*, Ann. of Math. (2) **175** (2012), no. 2, 541–566.

[GTZ12] B. Green, T. Tao et T. Ziegler, *An inverse theorem for the Gowers $U^{s+1}[N]$-norm*, Ann. of Math. (2) **176** (2012), no. 2, 1231–1372.

[Har94] D. Harari, *Méthode des fibrations et obstruction de Manin*, Duke Math. J. **75** (1994), no. 1, 221–260.

[Har97] ———, *Flèches de spécialisations en cohomologie étale et applications arithmétiques*, Bull. Soc. Math. France **125** (1997), no. 2, 143–166.

[Has10] B. Hassett, *Weak approximation and rationally connected varieties over function fields of curves*, Variétés rationnellement connexes : aspects géométriques et arithmétiques, Panor. Synthèses, vol. 31, Soc. Math. France, Paris, 2010, p. 115–153.

[Hat66] A. Hattori, *Integral characteristic numbers for weakly almost complex manifolds*, Topology **5** (1966), 259–280.

[Hau13] O. Haution, *Degree formula for the Euler characteristic*, Proc. Amer. Math. Soc. **141** (2013), no. 6, 1863–1869.

[HS36] H. Hasse et O. Schilling, *Die Normen aus einer normalen Divisionsalgebra über einem algebraischen Zahlkörper*, J. reine angew. Math. **174** (1936), 248–252.

[HS08] D. Harari et T. Szamuely, *Local-global principles for* 1*-motives*, Duke Math. J. **143** (2008), no. 3, 531–557.

[HS09] ———, *Galois sections for abelianized fundamental groups*, Math. Ann. **344** (2009), no. 4, 779–800, avec un appendice de E. V. Flynn.

[HS12] D. Harari et J. Stix, *Descent obstruction and fundamental exact sequence*, The arithmetic of fundamental groups, PIA 2010 (ed. J. Stix), Contributions in Mathematical and Computational Sciences, vol. 2, Springer-Verlag, Heidelberg, 2012, p. 147–166.

[HS13] Y. Harpaz et T. M. Schlank, *Homotopy obstructions to rational points*, Torsors, étale homotopy and applications to rational points, London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 405, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2013, p. 280–413.

[HT06] B. Hassett et Y. Tschinkel, *Weak approximation over function fields*, Invent. math. **163** (2006), no. 1, 171–190.

[Irv14] A. J. Irving, *Cubic polynomials represented by norm forms*, prépublication, 2014.

[Kat80] K. Kato, *A generalization of local class field theory by using K-groups. II*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **27** (1980), no. 3, 603–683.

[Kin09] G. Kings, *A note on polylogarithms on curves and abelian schemes*, Math. Z. **262** (2009), no. 3, 527–537.

[KK86] K. Kato et T. Kuzumaki, *The dimension of fields and algebraic K-theory*, J. Number Theory **24** (1986), no. 2, 229–244.

[Kle66] S. L. Kleiman, *Toward a numerical theory of ampleness*, Ann. of Math. (2) **84** (1966), 293–344.

[KMM92] J. Kollár, Y. Miyaoka et S. Mori, *Rational connectedness and boundedness of Fano manifolds*, J. Differential Geom. **36** (1992), no. 3, 765–779.

[Kne13] A. Knecht, *Weak approximation for general degree two del Pezzo surfaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **141** (2013), no. 3, 801–811.

[Koe05] J. Koenigsmann, *On the 'section conjecture' in anabelian geometry*, J. reine angew. Math. **588** (2005), 221–235.

[Kol96] J. Kollár, *Rational curves on algebraic varieties*, Ergeb. Math. Grenzgeb. (3), vol. 32, Springer-Verlag, Berlin, 1996.

[Kol07] ———, *A conjecture of Ax and degenerations of Fano varieties*, Israel J. Math. **162** (2007), 235–251.

[Kol13] ———, *Esnault–Levine–Wittenberg indices*, prépublication 2013, arXiv:1312.3923.

[KS83] K. Kato et S. Saito, *Unramified class field theory of arithmetical surfaces*, Ann. of Math. (2) **118** (1983), no. 2, 241–275.

[KS86] ———, *Global class field theory of arithmetic schemes*, Applications of algebraic K-theory to algebraic geometry and number theory, Part I (Boulder, Colo., 1983), Contemp. Math., vol. 55, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1986, p. 255–331.

[KS03] J. Kollár et E. Szabó, *Rationally connected varieties over finite fields*, Duke Math. J. **120** (2003), no. 2, 251–267.

[Kul77] V. S. Kulikov, *Degenerations of $K3$ surfaces and Enriques surfaces*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **41** (1977), no. 5, 1008–1042 (russe), traduction anglaise : Math. USSR-Izv. **11** (1977), no. 5, 957–989.

[Lan52] S. Lang, *On quasi algebraic closure*, Ann. of Math. (2) **55** (1952), 373–390.

[Lan56] ———, *Unramified class field theory over function fields in several variables*, Ann. of Math. (2) **64** (1956), 285–325.

[Laz08] R. Laza, *Triangulations of the sphere and degenerations of $K3$ surfaces*, prépublication 2008, arXiv:0809.0937.

[Lia12] Y. Liang, *Principe local-global pour les zéro-cycles sur certaines fibrations au-dessus de l'espace projectif*, Bull. Soc. Math. France (2012), à paraître.

[Lia13] ———, *Arithmetic of 0-cycles on varieties defined over number fields*, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4) **46** (2013), no. 1, 35–56.

[Lic68] S. Lichtenbaum, *The period-index problem for elliptic curves*, Amer. J. Math. **90** (1968), 1209–1223.

[Lic69] ______, *Duality theorems for curves over p-adic fields*, Invent. math. **7** (1969), 120–136.

[LT58] S. Lang et J. Tate, *Principal homogeneous spaces over abelian varieties*, Amer. J. Math. **80** (1958), 659–684.

[Maa37] H. Maass, *Beweis des Normensatzes in einfachen hyperkomplexen Systemen*, Abh. Math. Semin. Univ. Hamb. **12** (1937), no. 1, 64–69.

[Man71] Yu. I. Manin, *Le groupe de Brauer-Grothendieck en géométrie diophantienne*, Actes du Congrès International des Mathématiciens (Nice, 1970), Tome 1, Gauthier-Villars, Paris, 1971, p. 401–411.

[Mat14] L. Matthiesen, *On the squarefree representation function of a norm form and nilsequences*, prépublication, 2014.

[Mer91] A. S. Merkurjev, *Simple algebras and quadratic forms*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **55** (1991), no. 1, 218–224.

[MM83] R. Miranda et D. R. Morrison, *The minus one theorem*, The birational geometry of degenerations (Cambridge, Mass., 1981), Progr. Math., vol. 29, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1983, p. 173–259.

[Moc99] S. Mochizuki, *The local pro-p anabelian geometry of curves*, Invent. math. **138** (1999), no. 2, 319–423.

[Moc03] ______, *Topics surrounding the anabelian geometry of hyperbolic curves*, Galois groups and fundamental groups, Math. Sci. Res. Inst. Publ., vol. 41, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2003, p. 119–165.

[MS82] A. S. Merkurjev et A. A. Suslin, *K-cohomology of Severi-Brauer varieties and the norm residue homomorphism*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **46** (1982), no. 5, 1011–1046, trad. anglaise Math. USSR–Izv. **21** (1983), no. 2, 307–340.

[Nag57] M. Nagata, *Note on a paper of Lang concerning quasi algebraic closure*, Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto. Ser. A. Math. **30** (1957), 237–241.

[NTM98] H. Nakamura, A. Tamagawa et S. Mochizuki, *Grothendieck's conjectures concerning fundamental groups of algebraic curves*, Sūgaku **50** (1998), no. 2, 113–129.

[Pey05] E. Peyre, *Obstructions au principe de Hasse et à l'approximation faible*, Astérisque (2005), no. 299, Exp. No. 931, viii, 165–193, Séminaire Bourbaki, Vol. 2003/2004.

[Pir12] A. Pirutka, *R-equivalence on low degree complete intersections*, J. Algebraic Geom. **21** (2012), no. 4, 707–719.

[Poo06] B. Poonen, *Heuristics for the Brauer-Manin obstruction for curves*, Experiment. Math. **15** (2006), no. 4, 415–420.

[Poo10] ______, *Insufficiency of the Brauer-Manin obstruction applied to étale covers*, Ann. of Math. (2) **171** (2010), no. 3, 2157–2169.

[Pop10] F. Pop, *On the birational p-adic section conjecture*, Compos. Math. **146** (2010), no. 3, 621–637.

[Pop12] ______, *Lectures on anabelian phenomena in geometry and arithmetic*, Non-abelian fundamental groups and Iwasawa theory, London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 393, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2012, p. 1–55.

[PP81] U. Persson et H. Pinkham, *Degeneration of surfaces with trivial canonical bundle*, Ann. of Math. (2) **113** (1981), no. 1, 45–66.

[PS95] R. Parimala et V. Suresh, *Zero-cycles on quadric fibrations : finiteness theorems and the cycle map*, Invent. math. **122** (1995), no. 1, 83–117.

[Ram01] N. Ramachandran, *Duality of Albanese and Picard 1-motives*, K-Theory **22** (2001), no. 3, 271–301.

[RZ82] M. Rapoport et T. Zink, *Über die lokale Zetafunktion von Shimuravarietäten. Monodromiefiltration und verschwindende Zyklen in ungleicher Charakteristik*, Invent. math. **68** (1982), no. 1, 21–101.

[Sai89] S. Saito, *Some observations on motivic cohomology of arithmetic schemes*, Invent. math. **98** (1989), no. 2, 371–404.

[Sai91] ———, *On the cycle map for torsion algebraic cycles of codimension two*, Invent. math. **106** (1991), no. 3, 443–460.

[Sal88] P. Salberger, *Zero-cycles on rational surfaces over number fields*, Invent. math. **91** (1988), no. 3, 505–524.

[Sal03] ———, *On obstructions to the Hasse principle*, Number theory and algebraic geometry, London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 303, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2003, p. 251–277.

[Sat98] K. Sato, *Injectivity of the torsion cycle map of codimension two of varieties over p-adic fields with semi-stable reduction*, J. reine angew. Math. **501** (1998), 221–235.

[Sat05] ———, *Non-divisible cycles on surfaces over local fields*, J. Number Theory **114** (2005), no. 2, 272–297.

[Sch84] A. Schinzel, *Hasse's principle for systems of ternary quadratic forms and for one biquadratic form*, Studia Math. **77** (1984), no. 2, 103–109.

[Ser92] J-P. Serre, *Topics in Galois theory*, Research Notes in Mathematics, vol. 1, Jones and Bartlett Publishers, Boston, MA, 1992.

[Ser94] ———, *Cohomologie galoisienne*, cinquième ed., Lecture Notes in Mathematics, vol. 5, Springer-Verlag, Berlin, 1994.

[SGA1] *Revêtements étales et groupe fondamental*, Documents Mathématiques, vol. 3, Société Mathématique de France, Paris, 2003, Séminaire de géométrie algébrique du Bois-Marie 1960–1961, dirigé par A. Grothendieck.

[Sha57] I. R. Shafarevich, *Exponents of elliptic curves*, Dokl. Akad. Nauk SSSR (N.S.) **114** (1957), 714–716.

[Sko90] A. N. Skorobogatov, *On the fibration method for proving the Hasse principle and weak approximation*, Séminaire de Théorie des Nombres, Paris 1988–1989, Progr. Math., vol. 91, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990, p. 205–219.

[Sko96] ———, *Descent on fibrations over the projective line*, Amer. J. Math. **118** (1996), no. 5, 905–923.

[Sko01] ———, *Torsors and rational points*, Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 144, Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

[Sko09] ———, *Descent obstruction is equivalent to étale Brauer-Manin obstruction*, Math. Ann. **344** (2009), no. 3, 501–510.

[Sme13] A. Smeets, *Principes locaux-globaux pour certaines fibrations en torseurs sous un tore*, prépublication, 2013.

[Sme14] ———, *Insufficiency of the Brauer–Manin obstruction : towards a simply connected example*, prépublication 2014.

[SS10] S. Saito et K. Sato, *A finiteness theorem for zero-cycles over p-adic fields*, Ann. of Math. (2) **172** (2010), no. 3, 1593–1639, avec un appendice de U. Jannsen.

[Sti10] J. Stix, *On the period-index problem in light of the section conjecture*, Amer. J. Math. **132** (2010), no. 1, 157–180.

[Sti13] ———, *Rational points and arithmetic of fundamental groups*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 2054, Springer, Heidelberg, 2013, xx+249 pp.

[Sto65] R. E. Stong, *Relations among characteristic numbers. I*, Topology **4** (1965), 267–281.

[Sto07] M. Stoll, *Finite descent obstructions and rational points on curves*, Algebra Number Theory **1** (2007), no. 4, 349–391.

[Sur96] V. Suresh, *Zero cycles on conic fibrations and a conjecture of Bloch*, K-Theory **10** (1996), no. 6, 597–610.

[SW95] P. Sarnak et L. Wang, *Some hypersurfaces in* $\mathbf{P}^4$ *and the Hasse-principle*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **321** (1995), no. 3, 319–322.

[Tia13] Z. Tian, *Weak approximation for cubic hypersurfaces*, à paraître à Duke Mathematical Journal.

[Tse33] C. C. Tsen, *Divisionsalgebren über Funktionenkörpern*, Gött. Nachr. (1933), 335–339.

[vH03] J. van Hamel, *The Brauer-Manin obstruction for zero-cycles on Severi-Brauer fibrations over curves*, J. London Math. Soc. (2) **68** (2003), no. 2, 317–337.

[Wei13] D. Wei, *On the equation* $N_{K/k}(\Xi) = P(t)$, prépublication, 2013.

[Xu12] C. Xu, *Weak approximation for low degree del Pezzo surfaces*, J. Algebraic Geom. **21** (2012), no. 4, 753–767.

[Yam05] T. Yamazaki, *On Chow and Brauer groups of a product of Mumford curves*, Math. Ann. **333** (2005), no. 3, 549–567.

[Zai10] K. Zainoulline, *Degree formula for connective K-theory*, Invent. math. **179** (2010), no. 3, 507–522.