

Master Mathématiques Fondamentales

Université Sorbonne Paris Nord

Cours “**EDP et singularités : Quelques exemples**”

par : Hatem ZAAG

Année Universitaire : 2022/2023

Dates : Entre le 6 mars et le 14 avril 2023.

Ce document contient les notes de cours.

Il sera enrichi après chaque séance.

Résumé :

Dans ce cours, on s'intéresse à l'apparition de singularités en temps fini dans certaines Équations aux Dérivées Partielles (EDP) d'évolution. Ce phénomène apparaît lorsque la solution maximale au problème de Cauchy existe sur un intervalle de temps $[0, T)$ avec $0 < T < \infty$. Dans ce cas, la norme de la solution (et/ou de certaines de ses dérivées) tend vers l'infini lorsque $t \rightarrow T$. On parle alors d'*explosion en temps fini*.

À travers l'exemple de quelques EDP issues de la biologie et de la physique, on abordera plusieurs méthodes importantes pour l'étude de l'explosion.

Après une brève introduction sur la modélisation, important préalable pour acquérir une intuition sur les différents termes dans une EDP, on s'intéressera à 3 grandes classes d'équations :

- l'équation semilinéaire de la chaleur ;
- l'équation semilinéaire de ondes ;
- le modèle de Keller-Segel pour la chimiotaxie.

Parmi les méthodes qui seront abordées dans ce cours, on cite les méthodes d'énergie ou de fonctionnelles de Lyapunov, combinées à des techniques d'interpolation, ainsi que certaines techniques élémentaires de point fixe ou de principe de maximum. Les notions de solutions fondamentales seront utilisées également, ainsi que le cadre des solutions auto-similaires.