Synthèse de travaux scientifiques

en vue de l'obtention de

l'habilitation à diriger des recherches

présentée à

l'Université de Cergy-Pontoise

en

Mathématiques

par

Hatem Zaag

Universalité et singularités pour certaines équations aux dérivées partielles

soutenue le 30 juin 2003.

Rapporteurs:
M. Serge Alinhac
M. Robert V. Kohn
M. Frank Merle

Jury:
M. Serge Alinhac . . . . Université Paris Sud
M. Abbes Bahri . . . . Rutgers University
M. Henri Berestycki . . . . École des Hautes Études en Sciences Sociales
M. Jean-Michel Coron . . . . Université Paris Sud
M. Frank Merle . . . . Université de Cergy-Pontoise
M. Louis Nirenberg . . . . New York University
M. Benoît Perthame . . . . Université Pierre et Marie Curie

Remerciements

Ma gratitude va d'abord à Frank Merle qui a bien voulu diriger mes premiers travaux de recherches lors de ma thèse de doctorat. Ses travaux et sa façon de penser m'ont beaucoup influencé.

Je suis aussi redevable à Robert V. Kohn dont les contributions ont été une grande source d'inspiration pour moi. J'admire en lui sa grande culture scientifique et ses talents de pédagogie et de rédaction. Il m'en a fait profiter généreusement pendant mon séjour au Courant Institute.

Louis Nirenberg qui par ses travaux a marqué l'évolution de l'analyse non linéaire me fait un grand honneur en acceptant de faire partie du jury.

Merci également à Abbes Bahri de faire partie du jury. Je voudrais lui exprimer ma reconnaissance pour son soutien constant. Nous avons partagé beaucoup de moments agréables à s'entretenir de mathématiques.

J'ai beaucoup d'admiration pour les contributions de Serge Alinhac qui a bien voulu écrire un rapport sur mes travaux. Qu'il en soit remercié très chaleureusement.

J'ai eu la chance d'avoir Henri Berestycki et Jean Michel Coron comme professeurs et d'apprécier leurs qualités pédagogiques. Discuter de mathématiques avec eux est un véritable plaisir. Ils ont accepté de faire partie du jury et je leur en suis reconnaissant.

C'est grâce à Benoît Perthame que j'ai pu m'initier aux mathématiques pour la biologie. J'ai ainsi eu la chance de collaborer avec lui sur le sujet. Il a bien voulu faire partie du jury et je lui en suis reconnaissant.

Je voudrais également remercier tous mes autres collaborateurs: Lucilla Corrias, Clotilde Fermanian Kammerer, Pablo Groisman et Julio Rossi. Travailler avec eux est un grand plaisir.

Le travail présenté a été fait au Département de mathématiques et applications de l'ENS ainsi qu'au Courant Institute de New York University. Je profite de cette occasion pour remercier les membres de ces deux institutions pour l'environnement exceptionnel dont j'ai bénéficié.

A ma mère.

Table des matières

Première partie

Singularités des équations semilinéaires de la chaleur

L'objet de cette partie est l'étude de la formation en temps fini de singularités dans des systèmes de réaction-diffusion de type chaleur:

$$\left\{\begin{array}{rcllll} \frac{\partial u}{\partial t} & = & \Delta u + F(u) & \text{dans} & \Omega \times [0,T) \\ u & = & 0 & \text{sur} & \partial\Omega \times [0,T) \\ u(.,0) & = & u_0 & \text{dans} & \Omega \end{array}\right. \tag{1}$$

où
$u : (x,t) \in \Omega \times [0,T) \to \mathbb{R}^M$, $u_0 : \Omega \to \mathbb{R}^M$,
Ω est un ouvert convexe borné et régulier de $\mathbb{R}^N$ ou $\Omega = \mathbb{R}^N$, $T > 0$,
$(\Delta u)_i = \Delta u_i$,
$F : \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}^M$ est de classe C^1,
et $N, M \in \mathbb{N}$. (La condition de bord est à ignorer si $\Omega = \mathbb{R}^N$).

Ce système constitue un modèle simplifié pour beaucoup de phénomènes rencontrés en physique, en chimie, en économie ou encore en biologie. Il apparaît notamment en combustion (voir Bebernes et Eberly [6], Galaktionov *et al.* [35], Galaktionov et Vazquez [36]). On le retrouve aussi dans beaucoup de situations physiques, de la mécanique des fluides à l'optique, sous la forme de l'équation de Ginzburg-Landau complexe (voir Plecháč et Šverák [82]). Le système (1) et ses variantes ont également un grand intérêt en biologie (voir Murray [78], Pao [80]), en particulier en dynamique des populations (voir [78]), chimiotactisme (voir Betterton et Brenner [10], Herrero et Velázquez [55]), étude du cancer (voir Bellomo et Preziosi [7], Swanson *et al.* [89]), neurobiologie (voir Nagasawa [79], McKean [67]) et dans des modèles génétiques (voir l'article pionnier de Fisher [30]).

Le problème de Cauchy (local en temps) pour (1) peut être résolu dans une grande classe d'espaces fonctionnels. Citons par exemple l'espace des fonctions de $C(\bar{\Omega})$ nulles sur $\partial\Omega$ (si Ω est borné) ainsi que l'espace $H_0^1 \cap L^\infty(\Omega)$ que nous considérons sans perte de généralité dans la suite (voir Friedman [31], [32], Henry [48], Pazy [81], Weissler [94]).
On peut alors définir $T > 0$ comme étant le temps maximum d'existence de la solution de (1). D'après la théorie locale, $u \in C\left([0,T), H_0^1 \cap L^\infty(\Omega)\right)$. Deux cas se présentent:
- $T = +\infty$: existence globale.
- $T < +\infty$: dans ce cas,

$$\lim_{t \to T} \|u(t)\|_{L^\infty(\Omega)} = \lim_{t \to T} \|u(t)\|_{H^1(\Omega)} = +\infty.$$

On dit alors que u explose en temps fini T. Un point $a \in \Omega$ est dit point d'explosion de u si $u(x,t)$ n'est pas localement bornée au voisinage de (a,T), autrement dit s'il existe $(x_n, t_n) \to (a,T)$ tel que $|u(x_n,t_n)| \to +\infty$ quand $n \to +\infty$. L'ensemble de tous les points d'explosion est appelé ensemble d'explosion de u. Il est à noter que pour une solution donnée, le temps d'explosion est par définition unique. En revanche, s'il est classique que l'ensemble d'explosion est non vide, celui-ci n'est pas forcément réduit à un point (voir chapitre 3).

Dans mon travail, je me suis intéressé principalement à l'équation :

$$u_t = \Delta u + |u|^{p-1}u, \tag{2}$$

avec $u(t) : x \in \mathbb{R}^N \to u(x,t) \in \mathbb{R}^M$. L'exposant $p > 1$ est sous critique :

$$\text{si } N \geq 3 \text{ alors } 1 < p < (N+2)/(N-2). \tag{3}$$

De plus, on suppose que

$$(p > 1 \text{ et } (3N-4)p < 3N+8) \text{ ou } ((3) \text{ avec } M = 1 \text{ et } u(0) \geq 0). \tag{4}$$

L'équation (2) sera considérée également dans un domaine borné Ω, avec des conditions homogènes de Dirichlet au bord. L'intérêt majeur du problème (2) est qu'il possède des traits communs à toute une famille de problèmes physiques. Citons par exemple le mouvement par courbure moyenne (Soner et Souganidis [87]), la diffusion de surface (Bernoff, Bertozzi et Witelski [9]), l'équation de Ginzburg-Landau (Plecháč et Šverák [82]) et le chimiotactisme (Brenner *et al.* [11], Betterton et Brenner [10]). En particulier, le problème (2) éclaire le rôle du changement d'échelle et celui de l'auto-similarité. Contrairement à certains problèmes physiques, l'équation (2) est suffisamment simple pour permettre une analyse mathématique rigoureuse.

La littérature sur le sujet est très abondante. Néanmoins, il est possible de dégager trois directions majeures sur le sujet:

- les conditions suffisantes d'explosion.
- la construction de solutions singulières.
- le comportement asymptotique à l'explosion de $u(x,t)$ au voisinage de la singularité (a,T).

Plusieurs auteurs ont cherché des conditions suffisantes d'explosion, sur les données initiales ou sur le terme non linéaire. Parmi eux, on cite Kaplan [57], Friedman [31], Fujita [34] (voir aussi l'article de revue de Deng et Levine [23]), Levine [61], Ball [5] et Weissler [95].

L'étude asymptotique de $u(t)$ au voisinage de (a,T) où u est une solution de (2) qui explose au temps T et a est un point d'explosion s'est faite d'abord grâce à l'introduction de variables autosimilaires:

$$y = \frac{x-a}{\sqrt{T-t}}, \; s = -\log(T-t), \; w_a(y,s) = (T-t)^{\frac{1}{p-1}} u(x,t). \tag{5}$$

D'après (2), w_a (ou simplement w) vérifie: $\forall s \geq -\log T$, $\forall y \in W_{a,s} \equiv (\Omega - a)e^{\frac{s}{2}}$,

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \Delta w - \frac{1}{2} y.\nabla w - \frac{w}{p-1} + |w|^{p-1}w. \tag{6}$$

Ainsi, l'étude de $u(t)$ au voisinage de (a,T) est équivalente à l'étude du comportement asymptotique de $w_a(s)$ quand $s \to +\infty$.

Giga et Kohn ont démontré dans [39] et [40] sous la condition (4) qu'il existe $\epsilon_0 > 0$ et $C > 0$ tels que

$$0 < \epsilon_0 \leq \lim_{s \to +\infty} \|w(s)\|_{L^\infty(W_{a,s})} \leq \frac{1}{\epsilon_0} \tag{7}$$

$$\text{et } \|\nabla w(s)\|_{L^\infty} + \|\Delta w(s)\|_{L^\infty} + \|\nabla \Delta w(s)\|_{L^\infty} \leq C. \tag{8}$$

Ceci revient à dire en terme de u que

$$\epsilon_0 \leq \lim_{t \to T} (T-t)^{\frac{1}{p-1}} \|u(t)\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{\epsilon_0} \tag{9}$$

$$\text{et } (T-t)^{\frac{1}{p-1}+\frac{1}{2}} \|\nabla u(t)\|_{L^\infty} + (T-t)^{\frac{1}{p-1}+1} \|\Delta u(t)\|_{L^\infty} + (T-t)^{\frac{1}{p-1}+\frac{3}{2}} \|\nabla \Delta u(t)\|_{L^\infty} \leq C.$$

Il semblerait que la condition (4) ait été récemment levée par Giga *et al.* [42] qui ont démontré que (7) était vraie pour tout p sous critique (3).

La borne (7) dans le cas scalaire et positif découle d'un théorème de type Liouville dû à Gidas et Spruck [37]:

Si p est sous critique (3), alors le problème

$$\Delta u + u^p = 0 \textit{ dans } \mathbb{R}^N, u \geq 0 \textit{ et } u(0) > 0$$

n'admet pas de solution.

Au premier chapitre, on s'intéresse à l'existence de solutions singulières stables pour des équations de type (2). L'originalité de notre approche tient à son application à des perturbations de l'équation (2), notamment à des équations où aucun résultat d'existence de solutions singulières n'était connu auparavant, en particulier à une équation à valeurs complexes sans structure variationnelle et à un problème de reconnexion de vortex avec la paroi dans un supra-conducteur de type II. Notre méthode est basée sur la technique d'estimations a priori des solutions de (6) qui permet une réduction en dimension finie du problème, et sur un lemme de type Brouwer. Cette méthode permet de dégager un résultat de *stabilité* du comportement singulier par rapport à des perturbations dans les données initiales ou dans le terme non linéaire de réaction.

Un nombre important d'auteurs se sont intéressés au comportement asymptotique de u au voisinage d'une singularité (a, T). Citons à ce propos les travaux fondamentaux de Giga et Kohn [39], [40], [41] (voir aussi Berger et Kohn [8], Filippas et Kohn [26], Filippas et Liu [27], Filippas et Merle [29], [28]), Friedman et McLeod [33], Mueller et Weissler [77], Weissler [95]. Herrero et Velázquez [53], [49], [50], [54], [52], [51], [90], [91], [92] se sont aussi intéressés au cas scalaire et positif de (2). Toutefois, les résultats obtenus étaient très souvent non uniformes, par rapport à des perturbations dans les données initiales, ou par rapport au point d'explosion pour une solution donnée. De plus, les techniques utilisées étaient très souvent liées à la positivité (principe du maximum) ou parfois à la dimension d'espace $N = 1$ (propriété de Sturm utilisée par Chen et Matano [21]).

Nous proposons dans ce travail une nouvelle façon d'aborder la question, qui repose sur la découverte d'une structure cachée dans l'équation (2). L'importance de cette structure pour le développement asymptotique est à comparer avec le rôle du résultat de Gidas et Spruck [37] pour le taux d'explosion (9). Nous avons démontré avec F. Merle dans [75] et [73] un théorème de Liouville qui nous a permis d'obtenir une multitude d'estimations uniformes pour les solutions explosives, dont des estimations uniformes de normes L^∞, une propriété de localisation uniforme, des résultats de stabilité de profil et un résultat de comportement de l'énergie (voir chapitre 2). Nous nous sommes attachés dans ce travail à nous affranchir des contraintes de la dimension 1 d'espace et du caractère scalaire des solutions.

L'équation (2) est également pour nous l'occasion pour s'intéresser aux phénomènes instables dans les équations d'évolution. Outre la difficulté de les mettre en évidence, à la fois expérimentalement et numériquement, leur étude théorique reste difficile par manque d'estimations globales. Au chapitre 3, nous commenterons brièvement un exemple de phénomène singulier instable en chimiotactisme. On s'intéressera ensuite pour le modèle (2) à l'explosion -instable !- sur un ensemble d'explosion contenant des points d'explosion non isolés. Les estimations connues auparavant dans ce cas n'étaient pas uniformes par rapport au point d'explosion (Velázquez [90]), ce qui a empêché les auteurs d'aborder les questions de régularité de l'ensemble d'explosion et du comportement asymptotique de la solution à son voisinage. Grâce au théorème de Liouville de [75], nous avons pu obtenir l'uniformité nécessaire pour démontrer en particulier sous une hypothèse de non dégénérescence que la simple hypothèse de continuité de l'ensemble d'explosion impliquait son caractère C^1.

Il est à noter que les outils que nous construisons autour du théorème de Liouville se sont avérés très efficaces dans d'autres situations, en particulier pour l'équation semilinéaire des ondes (voir Merle et Zaag [76], présentée dans la partie II), l'équation de KdV généralisée (voir Martel et Merle [66], [65]) ou encore l'équation de Schrödinger non linéaire critique (voir Merle et Raphaël [69]).

1 Existence de solutions singulières stables pour des équations semilinéaires de la chaleur

1.1 Équation de la chaleur avec une non-linéarité en puissance

Dans [72] (écrit en collaboration avec F. Merle; voir aussi [70]), nous construisons une solution explosant en temps fini pour l'équation (2) et on décrit précisément son comportement à l'explosion. Nous avons prouvé le théorème suivant:

Théorème 1 (Existence) *Il existe $T_0 > 0$ tel que pour tous $0 < \hat{T} \le T_0$ et $\hat{a} \in \mathbb{R}^N$, l'équation (2) admet une solution $\hat{u}(t)$ explosant en temps fini $\hat{T}$ uniquement au point $\hat{a} \in \mathbb{R}^N$, et qui vérifie:*
i)

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^N}\left|(\hat{T}-t)^{\frac{1}{p-1}}\hat{u}(x,t) - f\left(\frac{x-\hat{a}}{\sqrt{(\hat{T}-t)|\log(\hat{T}-t)|}}\right)\right| \to 0 \tag{10}$$

quand $t \to \hat{T}$ où

$$f(z) = \left(p-1+\frac{(p-1)^2}{4p}|z|^2\right)^{-\frac{1}{p-1}}. \tag{11}$$

ii) $\forall x \in \mathbb{R}^N \backslash \{\hat{a}\}$, $\hat{u}(x,t) \to \hat{u}^*(x)$ *quand* $t \to \hat{T}$ *et*

$$\hat{u}^*(x) \sim \left[\frac{8p|\log|x-\hat{a}||}{(p-1)^2|x-\hat{a}|^2}\right]^{\frac{1}{p-1}} \quad \textit{quand } x \to \hat{a}. \tag{12}$$

La preuve de ce théorème s'appuie sur:

1) La transformation du problème grâce à (5) et à des estimations a priori sur les solutions de (6) au voisinage du profil f défini en (11), ce qui permet de réduire le problème de construction à un problème de dimension finie,

2) Une résolution de ce problème de dimension finie à l'aide d'un argument topologique.

La méthode de réduction en dimension finie initiée pour la preuve du Théorème 1 dans [72] permet d'obtenir un résultat de stabilité de la solution construite par rapport à des perturbations $L^\infty \cap W^{1,p+1}(\mathbb{R}^N)$ de la donnée initiale. Plus précisément:

Théorème 2 (Stabilité du comportement (10) et (12)) *Soit* $\hat{u}(t)$ *la solution de (2) avec donnée initiale* $\hat{u}_0$ *(construite au Théorème 1) qui explose en temps fini* $\hat{T}$ *en un point* $\hat{a}$*. Alors, pour tout* $\epsilon > 0$*, il existe* $\mathcal{V}_\epsilon$ *voisinage de* $\hat{u}_0$ *tel que pour tout* $u_0 \in \mathcal{V}_\epsilon$*, la solution* $u(t)$ *de (2) avec donnée initiale* u_0 *explose en temps fini* T *en un point unique* $a \in \mathbb{R}^N$ *tels que*

$$|a-\hat{a}| + |T-\hat{T}| \leq \epsilon.$$

De plus, $u(t)$ *se comporte comme (10) et (12) avec* (a,T) *remplaçant* $(\hat{a},\hat{T})$*.*

La preuve du Théorème 2 s'appuie fondamentalement sur la technique de réduction en dimension finie du Théorème 1 ainsi que sur l'invariance de (6) sous l'action de la transformation géométrique

$$(a,T) \to w_{a,T}(y,s) = (T-t)^{\frac{1}{p-1}} u(x,t)$$

où $y = \frac{x-a}{\sqrt{T-t}}$, $s = -\log(T-t)$, associée à une condition de non dégénérescence lorsque $u(x,t)$ est au voisinage du profil $(\hat{T}-t)^{-\frac{1}{p-1}} f$.

1.2 Équation de la chaleur complexe sans structure de gradient

La technique de réduction à un problème de dimension finie s'applique en fait à des perturbations de l'équation (2) et donnent des solutions dans un cadre beaucoup plus général que (2), celui des équations vectorielles avec une non-linéarité ne dérivant pas nécessairement d'un gradient. Un prototype d'une telle équation est le suivant:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + (1+i\delta)|u|^{p-1}u \tag{13}$$

où $u(x,t) \in \mathbb{C}$, $x \in \mathbb{R}^N$, $t \geq 0$, $1 < p$ et $\delta \in \mathbb{R}$. Dans [96], une solution explosive stable de (13) est construite dans le cas où δ est petit. Nous obtenons le même énoncé que le théorème 1, sauf que le profil à l'explosion de l'estimation (10) est changé par

$$f_\delta(z) = \left(p - 1 + \frac{(p-1)^2}{4(p-\delta^2)}|z|^2\right)^{-\frac{1+i\delta}{p-1}}.$$

Bien que le résultat de [96] soit d'apparence très similaire au Théorème 1 démontré dans [72], il en diffère sur deux points:
1) Le résultat de [96] présente un comportement complètement complexe, au sens où le profil limite obtenu n'a pas de direction fixe dans $\mathbb{C}$.
2) La preuve du résultat de [96] qui s'appuie fondamentalement sur la technique de réduction en dimension finie introduite dans le cas réel, présente néanmoins une difficulté de plus sous la forme d'une direction dégénérée supplémentaire dans le problème. Cette difficulté est maîtrisée grâce à la théorie de la modulation (voir Filippas et Merle [28] pour un usage similaire de la théorie de la modulation). Le Théorème 2 de [96] généralise ce résultat au cas vectoriel.

1.3 Un problème d'extinction en temps fini

Dans [71] (écrit en collaboration avec F. Merle), on considère le problème suivant:

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} &= \Delta h - G(h) \quad \text{dans} \quad \Omega \times [0,T) \\ h(x,t) &= 1 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \times [0,T) \end{cases} \tag{14}$$

où Ω est un ouvert borné,

$$G(h) \sim \frac{1}{h^\beta} \text{ quand } h \to 0$$

et $\beta > 0$. Si h est définie sur $\Omega \times [0,T)$ et

$$\lim_{t\to T} \inf_{x\in\Omega} h(x,t) = 0,$$

alors on dit que h s'éteint en temps fini.

L'équation (14) constitue un modèle de reconnexion d'un vortex avec la paroi dans un semi-conducteur de type II si $\beta = 1$ (voir Chapman, Hunton et Ockendon [20]). Elle est également reliée à l'équation de diffusion générée par des phénomènes de polarisation dans des conducteurs ioniques (voir Kawarada [58]).

Quelques critères d'extinction en temps fini pour (14) étaient déjà connus en dimension 1 (voir Kawarada [58], Levine [62] (article de revue), [63]). Cependant, peu de choses étaient connues sur le comportement de la solution à l'extinction, sauf en ce qui concerne la localisation des points d'extinction (voir Guo [45], Deng et Levine [22]), ou le taux d'extinction (voir Guo [45], [46], [47]).

Dans [71], une solution stable de (14) s'éteignant en temps fini en un seul point est construite. Son comportement au voisinage du point d'extinction (analogue du temps d'explosion) est décrit avec précision.

Théorème 3 (Existence d'une solution de (14) s'éteignant en temps fini) *Pour tout $a \in \Omega$, l'équation (14) admet une solution h s'éteignant en temps fini $T > 0$. De plus, $\forall x \in \Omega\backslash\{a\}$, $h(x,t) \to h^*(x)$ quand $t \to T$ et*

$$h^*(x) \sim \left[\frac{(\beta+1)^2|x-a|^2}{8\beta|\log|x-a||}\right]^{\frac{1}{\beta+1}} \quad \textit{quand } x \to a.$$

2 Théorèmes de Liouville pour des équations vectorielles et applications à l'explosion

On se propose dans ce chapitre d'adopter un point de vue nouveau dans l'analyse du phénomène d'explosion pour les équations de type chaleur. Notre approche consiste à démontrer d'abord un théorème de Liouville (ou de classification de solutions globales) qui permet ensuite d'obtenir des estimations uniformes dans l'analyse de l'explosion. Cette uniformité constitue une amélioration substantielle par rapport aux travaux antérieurs (Herrero et Velázquez [53], [90], Filippas et Kohn [26], Filippas et Liu [27]). Elle nous permet surtout de dépasser le cadre des phénomènes purement locaux étudiés précédemment et d'aborder de nouvelles questions reliées à des problèmes globaux en espace et en temps.

Nos techniques ne dépendent pas du principe du maximum ou de la dimension. Elles s'appliquent en particulier au cas des équations vectorielles comme (2) et même à des équations sans structure de gradient (voir paragraphe 2.2). L'idée de passer par des théorèmes de Liouville pour obtenir des estimations à l'explosion s'est avérée très fructueuse pour d'autres équations, comme l'équation de KdV généralisée (voir Martel et Merle [65], [66]), ou encore l'équation de Schrödinger non linéaire critique (voir Merle et Raphaël [69]).

2.1 Cas où la non linéarité est un gradient

On s'intéresse à l'équation type (2). Dans [73] et [75] (écrit en collaboration avec F. Merle), on a obtenu un théorème de Liouville concernant l'équation (6) obtenue par l'éclatement (5) d'une solution de (2). Diverses applications pour les solutions explosives de (2) découlent de ce théorème de Liouville (voir [73], [74]). Notons que les techniques employées dans [73] pour la preuve de ce théorème étaient limitées au cas scalaire positif, alors que [75] couvrait le cas des solutions sans signe ou à valeurs vectorielles. Nous avons obtenu le théorème surprenant suivant :

Théorème 4 (Théorème de Liouville vectoriel pour (6)) *On suppose que p satisfait (3) et que $w : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^M$ est une solution de (6) définie pour $(y,s) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$ telle que $\forall (y,s) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$, $|w(y,s)| \le C$, alors, soit $w \equiv 0$, soit $w \equiv \kappa\omega_0$, soit $w(y,s) = \varphi(s-s_0)\omega_0$ où $\kappa = (p-1)^{-\frac{1}{p-1}}$, $\omega_0 \in S^{M-1}$, $s_0 \in \mathbb{R}$ et*

$$\varphi(s) = \kappa(1+e^s)^{-\frac{1}{p-1}}.$$

Une des conséquences majeures de ce résultat est la propriété de localisation des solutions vectorielles explosives de (2) sous la condition (4).

Proposition 5 (Comparaison optimale des solutions explosives de (2) avec la solution de l'EDO associée) *Sous la condition (4), on considère Ω un ouvert convexe, borné et régulier de $\mathbb{R}^N$, ou $\Omega = \mathbb{R}^N$. Soit $u : \Omega \times [0,T) \to \mathbb{R}^M$ une solution qui explose en temps fini $T \le T_0$ telle que $\|u(0)\|_{C^2(\Omega)} \le C_0$. Alors, $\forall \epsilon > 0$, $\exists C(\epsilon, C_0, T_0)$ tel que $\forall (x,t) \in \Omega \times [0,T)$*

$$\left|\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - |u|^{p-1}u(x,t)\right| \le \epsilon |u(x,t)|^p + C.$$

Un corollaire immédiat de cette proposition pour les équations scalaires sans signe, est l'absence d'oscillations de $u(t)$ au voisinage de (a, T) où a est un point d'explosion, et le fait que $u(t)$ garde un signe constant dans ce voisinage. Grâce à cette dernière propriété et à des techniques de localisation, nous nous ramenons au cas des solutions positives de (2) et généralisons ainsi des résultats qui n'étaient connus jusque là que pour des solutions positives. Notons également que cette propriété de localisation permet de simplifier la preuve de [68] et [72] montrant l'existence d'une solution de (2) explosant exactement en k points donnés à l'avance.

Plus généralement, on obtient dans [75] des résultats concernant l'existence de profils à l'explosion pour (2) dans le cas vectoriel.

2.2 Cas d'une non linéarité qui n'est pas un gradient

La preuve du Théorème de Liouville présenté au paragraphe 2.1 et publié dans [75] est très fortement liée au fait que la non linéarité de (2) est un gradient. En effet, ceci implique l'existence d'une fonctionnelle de Lyapounov pour (2) et (6), cruciale notamment dans un critère d'explosion déterminant dans la preuve. D'ailleurs, le résultat et la méthode de [75] peuvent se généraliser à des systèmes avec termes non linéaires plus généraux que $|u|^{p-1}u$, sans toutefois s'affranchir de la structure de gradient.

À partir de là, il était intéressant de considérer un système de type chaleur avec un terme non linéaire qui n'est pas un gradient, et d'essayer de trouver une autre approche pour démontrer des résultats analogues à ceux de [75]. C'est ainsi que je m'intéresse dans [98] à l'explosion en temps fini dans le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_t = \Delta u + v^p, & v_t = \Delta v + u^q \\ u(.,0) = u_0, & v(.,0) = v_0 \end{array} \right. \tag{15}$$

où $u, v : (x,t) \in \mathbb{R}^N \times [0, T) \to \mathbb{R}^+$, et T est le temps d'explosion. Dans [2], Andreucci, Herrero et Velázquez donnent le taux d'explosion et un développement asymptotique de la solution au voisinage d'un point d'explosion a quand $t \to T$, uniforme dans des domaines du type $|y - a| \le C\sqrt{T-t}$. Caristi et Mitidieri [19] ont étudié le système (15) dans une boule. Aucune estimation globale en espace et donc indépendante du point d'explosion n'était connue, à part le taux d'explosion.

Dans [98], le Théorème de Liouville suivant est démontré par perturbation du cas $p = q$ qui se ramène à un cas gradient :

Théorème 6 (Un Théorème de Liouville pour le système (15)) *Il existe une fonction continue strictement positive η telle que pour tout $p_0 > 1$ tel que $p_0(N-2) < N+2$, pour tout p, q tels que $|p - p_0| + |q - p_0| < \eta(p_0)$, $p \ge 1$ et $q \ge 1$, l'affirmation suivante est vérifiée :*

Soit (u, v) une solution de (15) définie sur $\mathbb{R}^N \times (-\infty, T)$ avec $T \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}^N \times (-\infty, T)$, $0 \le u(x,t) \le C(T-t)^{-\frac{p+1}{pq-1}}$ et $0 \le v(x,t) \le C(T-t)^{-\frac{q+1}{pq-1}}$ avec $C > 0$. Alors, soit $u \equiv v \equiv 0$, soit pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}^N \times (-\infty, T)$,

$$u(x,t) = \Gamma(T^* - t)^{-\frac{p+1}{pq-1}} \text{ et } v(x,t) = \gamma(T^* - t)^{-\frac{q+1}{pq-1}} \tag{16}$$

où $T^* \geq T$ et (Γ, γ) est défini par

$$\gamma^p = \Gamma \left(\frac{p+1}{pq-1} \right) \;\; et \; \Gamma^q = \gamma \left(\frac{q+1}{pq-1} \right),$$

Remarque: Sous les mêmes hypothèses, une classification moins précise des solutions est donnée dans [2] (seulement les limites à l'infini en temps sont données au lieu de l'expression explicite (16)).

La preuve de ce théorème s'appuie sur un nouveau critère d'explosion pour (15) différent de celui utilisé pour l'équation (2).

Ce théorème de Liouville nous fournit une propriété de localisation des solutions explosives de (15), qui permet de lier polynomialement les tailles de u et v et de comparer leur évolution à celle d'une solution d'un système différentiel découplé.

Théorème 7 (Une propriété de localisation des solutions explosives de (15)) *On fait les mêmes hypothèses sur p et q qu'au Théorème 4, et on considère une solution (u, v) de (15) qui explose au temps T. Alors, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $C(\epsilon) > 0$ tel que pour tout $(x, t) \in \mathbb{R}^N \times [0, T)$,*

$$\left| \partial_t u - \gamma^p \left(\tfrac{u}{\Gamma}\right)^{\frac{p(q+1)}{p+1}} \right| \leq \epsilon u^{\frac{p(q+1)}{p+1}} + C \;\; et \; \left| \left(\tfrac{u}{\Gamma}\right)^{\frac{1}{p+1}} - \left(\tfrac{v}{\gamma}\right)^{\frac{1}{q+1}} \right| \leq \epsilon u^{\frac{1}{p+1}} + C. \qquad (17)$$

v vérifie une estimation analogue.

2.3 Comportement de l'énergie à l'explosion

Poursuivant dans l'exploitation des conséquences du théorème de Liouville 4, je considère sous la condition (4) une solution scalaire explosive $u(t)$ de (2), définie sur $\Omega \times [0, T)$, où $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ est convexe, régulier et borné, et T est le temps d'explosion de u. Je démontre dans [97] le résultat suivant sur le comportement de l'énergie

$$E(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \frac{1}{p+1} \int_\Omega |u|^{p+1} dx$$

associée à l'équation (2) à l'explosion.

Théorème 8 (Comportement de l'énergie à l'explosion)
i) $E(u(t)) \to -\infty$ quand $t \to T$.
ii) Le quotient de Rayleigh pour la solution, $\|u(t)\|_{H_0^1} / \|u(t)\|_{L^{p+1}}$, ainsi que

$$J\left(\frac{u(t)}{\|u(t)\|_{H_0^1(\Omega)}} \right) = \sup_{\lambda > 0} E(\lambda u(t)) = \frac{p-1}{2(p+1)} \left(\frac{\|u(t)\|_{H_0^1}}{\|u(t)\|_{L^{p+1}}} \right)^{\frac{2(p+1)}{p-1}}$$

tendent vers $+\infty$ quand $t \to T$.

Remarque : La limite i) était connue uniquement dans le cas positif (Giga [38]). Le résultat ii) admet des conséquences topologiques sur l'étude des nappes de niveau de l'énergie $E(u)$ (voir [97] et Bahri [4]).

2.4 Précision de la notion de stabilité du profil à l'explosion

Dans le cas scalaire ($M = 1$) sous la condition (4), on s'intéresse avec Clotilde Fermanian Kammerer dans [25] aux solutions $u(t)$ de (2) qui explosent en temps fini T en un seul point d'explosion $a \in \mathbb{R}^N$ et telles qu'après la transformation (5), on a $\forall R > 0$,

$$\sup_{|y| \leq R} \left| w_{a,T}(y,s) - \left[\kappa + \frac{\kappa}{2ps}(N - \frac{1}{2}|y|^2) \right] \right| = o(1/s). \tag{18}$$

Dans un premier temps, on démontre le résultat suivant :

Théorème 9 (Petitesse de la différence entre deux solutions de (2) explosant avec le comportement (18)) *On suppose $N = 1$. Soient u_i, $i = 1, 2$, deux solutions de (2) définies sur $\mathbb{R}^N \times [0, T_i)$ qui explosent en temps fini uniquement en un seul point et telles que (18) soit valable avec $T = T_i$ et $a = a_i$ (où T_i est le temps d'explosion de u_i et a_i son point d'explosion). Alors, il existe $\lambda > 0$ tel que pour tout $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0, T_1)$,*

$$|u_1(x,t) - \bar{u}_2(x,t)| \leq C \,\mathrm{mM} \left\{ \frac{(T_1 - t)^{\frac{1}{2} - \frac{1}{p-1}}}{|\log(T_1 - t)|^{\frac{3}{2}}}, \frac{|x - a_1|^{1 - \frac{2}{p-1}}}{|\log|x - a_1||^{4 - \frac{1}{p-1}}} \right\},$$

où $\mathrm{mM} = \min$ si $p < 3$ et $\mathrm{mM} = \max$ si $p \geq 3$. La fonction $\bar{u}_2$ donnée par

$$\bar{u}_2(x,t) = \lambda^{\frac{2}{p-1}} u_2(\lambda(x - a_1) + a_2, \lambda^2(t - T_1) + T_2)$$

est aussi une solution de (2) qui explose au temps T_1 au point a_1.

En d'autres termes, en modifiant u_2 grâce aux transformations laissant invariante (2), on arrive à bien contrôler la différence entre u_1 et $\bar{u}_2$ qui explosent en même temps T_1 au même point a_1. Une conséquence remarquable de ce théorème est visible dans le cas $p \geq 3$, où, bien que u_1 et $\bar{u}_2$ explosent toutes les deux en T_1, leur différence tend vers 0 quand (x,t) tend vers la singularité (a_1, T_1).

On démontre également dans [25] une version moins forte de ce théorème en dimension $N \geq 2$, qui nous permet grâce aux considérations géométriques de [72] d'obtenir un résultat de stabilité du comportement (18) par rapport à des perturbations dans les données initiales.

Théorème 10 (Stabilité du comportement (18) par rapport aux données initiales) *On suppose $N \geq 1$. Soit $\tilde{u}(t)$ une solution de (2) définie sur $\mathbb{R}^N \times [0, \tilde{T})$ qui explose en temps fini $\tilde{T}$ en un seul point d'explosion $\tilde{a}$ et $\tilde{w}_{\tilde{a},\tilde{T}}$ satisfait (18). Alors, $\forall \epsilon > 0$, il existe un voisinage $\mathcal{V}_\epsilon$ de $\tilde{u}(0)$ dans $H^1 \cap C^2(\mathbb{R}^N)$ tel que $\forall u_0 \in \mathcal{V}_\epsilon$, la solution $u(t)$ de (2) avec donnée initiale u_0 explose en temps fini T uniquement en un point a tel que*

$$|T - \tilde{T}| + |a - \tilde{a}| \leq \epsilon$$

et $w_{a,T}$ satisfait (18).

Il est à remarquer que ce résultat n'était connu auparavant qu'en dimension $N = 1$ (Herrero et Velázquez [52]), ou dans [72] en dimension $N \geq 1$ pour des solutions vérifiant une contrainte géométrique plus forte que (18).

Dans [24] (écrit en collaboration avec C. Fermanian et F. Merle), le même résultat de stabilité est démontré par une approche complètement différente. En effet, le linéarisé de (6) autour du profil apparaissant dans (18) est traité comme un système dynamique.

2.5 Régularité du temps d'explosion

Dans le cas scalaire ($M = 1$), on considère dans [44] (écrit en collaboration avec P. Groisman et J. Rossi) l'équation (2) dans un domaine borné Ω avec des conditions de Dirichlet homogènes au bord. Le travail de Giga et al. [42] nous permet de s'affranchir de la restriction (4).

On s'intéresse à la régularité du temps d'explosion comme fonction de la donnée initiale. La continuité du temps d'explosion était déjà connue (voir Merle [68] et Fermanian, Merle et Zaag [24]). Nous améliorons ce résultat dans [44] et montrons que le temps d'explosion est presque Lipschitz:

Théorème 11 (Estimation du module de continuité du temps d'explosion) *Si u et u_h sont deux solutions de (2) avec données initiales respectives u_0 et u_0+h, qui explosent respectivement en T et T_h, alors, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta(\epsilon) > 0$ tel que*

$$\|h\|_{L^\infty} < \eta(\epsilon) \longrightarrow |T - T_h| \le C(\epsilon)\|h\|_{L^\infty}|\ln(\|h\|_{L^\infty})|^{\frac{N+2}{2}+\epsilon}.$$

Remarque: Nous pensons qu'une estimation de la forme $|T - T_h| \le C\|h\|_{L^\infty}$ est correcte. La preuve utilise des techniques élémentaires d'équations différentielles ordinaires et repose fortement sur les estimations uniformes qui découlent du Théorème de Liouville de [75].

3 Régularité de l'ensemble d'explosion et comportement singulier

L'étude des phénomènes "instables" dans les problèmes appliqués demeure une grande question. L'obstacle majeur vient de la difficulté de les mettre en évidence, à la fois expérimentalement et numériquement. Les phénomènes instables peuvent néanmoins apparaître comme régimes transitoires avant le basculement du système vers un comportement stable. C'est le cas notamment dans une expérience sur le chimiotactisme chez des bactéries Escherichia Coli réalisée par Budrene et Berg [16], [17] (voir aussi Brenner *et al.* [12], Betterton et Brenner [10]). Le chimiotactisme est le mouvement de bactéries suivant le gradient d'un attracteur chimique. Dans l'expérience de Budrene et Berg, l'attracteur chimique est sécrété par les bactéries elles-mêmes, justement pour s'attirer les unes les autres. Dans un premier temps, il a été observé que les bactéries s'agrégeaient suivant un cylindre dont le rayon décroissait avec le temps. Ce mouvement suggérerait qu'en temps fini, toutes les bactéries seraient sur l'axe du cylindre, faisant ainsi apparaître une singularité sur cet axe, qui est une ligne. En fait, ceci n'a pas lieu en réalité car une instabilité apparaît et le cylindre s'effondre en des structures sphériques suggérant que l'ensemble singulier est plutôt fait de points isolés (un seul point en théorie). L'explosion sur une ligne est donc un comportement instable qui apparaît comme régime transitoire dans cette expérience de chimiotactisme. Ceci justifie l'étude de cas où l'ensemble singulier contient des points non isolés. L'équation (2) constitue un cas laboratoire où l'on peut pousser loin les questions sur ce phénomène instable, notamment grâce au théorème de Liouville de [75].

Dans le cas scalaire, on considère u une solution de (2) qui explose en temps fini T. Un point $a \in \mathbb{R}^N$ est dit point d'explosion de u si

$$|u(a_n, t_n)| \to +\infty \text{ pour une suite } (a_n, t_n) \to (a, T) \text{ lorsque } n \to \infty.$$

Grâce au théorème de Liouville de [75], nous avons montré qu'il équivalent de définir un point d'explosion comme étant un point $a \in \mathbb{R}^N$ où

$$|u(x,t)| \to +\infty \text{ lorsque } (x,t) \to (x,T).$$

L'ensemble de tous les points d'explosion de u est appelé "ensemble d'explosion de u". Il est noté S. D'après [75], on sait qu'il existe un *profil à l'explosion* $u^* \in C^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N \backslash S)$ tel que

$$u(x,t) \to u^*(x) \text{ dans } C^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N \backslash S) \text{ lorsque } t \to T. \tag{19}$$

Le comportement de la solution au voisinage de ses points d'explosion est une direction majeure dans la littérature sur le sujet. Deux questions se posent à propos d'un point d'explosion donné $\hat{a} \in S$:

- le **comportement à l'explosion** de $u(x,t)$ au voisinage de la singularité $(\hat{a},T)$.

- la **régularité** de l'ensemble d'explosion S au voisinage de $\hat{a}$.

Une littérature abondante est dédiée au cas où $\hat{a}$ est un point d'explosion isolé (remarquez que la deuxième question n'a plus de sens dans ce cas). Voir par exemple Weissler [95], Bricmont, Kupiainen et Lin [13], [14], [15], Herrero et Velázquez [53], [90]. En revanche, il n'y a pas de résultats substantiels dans le cas où $\hat{a}$ est non isolé. L'objet du présent chapitre est justement de démontrer quelques résultats dans ce cas là.

3.1 La régularité de l'ensemble d'explosion

Par définition, l'ensemble d'explosion est fermé. Si les données initiales sont suffisamment décroissantes à l'infini, alors il est borné aussi (voir Giga et Kohn [41]). Deux questions se posent alors au sujet de l'ensemble d'explosion :

- **La construction** : Étant donné un ensemble compact $\hat{S} \subset \mathbb{R}^N$, est-il possible de construire $\hat{u}$ une solution de (2) qui explose à un instant $\hat{T}$ exactement sur $\hat{S}$? La réponse est oui si $\hat{S}$ est une sphère (voir Giga et Kohn [41] par exemple) ou un ensemble fini de points (voir Merle [68] et Merle et Zaag [72]). Les techniques de [72] donnent aussi une solution si $\hat{S}$ est une union de k sphères concentriques (ce qui se réduit au cas de k points dans le cadre radial). La question reste ouverte dans les autres cas.

- **La description** : Étant donnée u une solution de (2) qui explose au temps T sur un ensemble S, on considère $\hat{a}$ un point d'explosion non isolé. Quelle est la régularité de S au voisinage de $\hat{a}$? Nous savons d'après Velázquez [92] que la mesure de Hausdorff $(N-1)$-dimensionnelle de S est bornée sur les compacts (à propos, ceci donne une condition nécessaire sur $\hat{S}$ dans la question de construction). On n'en savait pas davantage.

C'est à la description de l'ensemble d'explosion qu'on s'intéressera plutôt. Si $\hat{a} \in S$, alors on sait d'après Velázquez [90] qu'à des changements d'échelle près, u approche un profil explicite au voisinage de la singularité $(\hat{a},T)$. On considère le cas où pour tout $K_0 > 0$,

$$\sup_{|z| \le K_0} \left| (T-t)^{\frac{1}{p-1}} u\left(\hat{a} + Q_{\hat{a}} z \sqrt{(T-t)|\log(T-t)|}, t\right) - f_{l_{\hat{a}}}(z) \right| \to 0 \tag{20}$$

lorsque $t \to T$, où $Q_{\hat{a}}$ est une matrice orthonormale de taille $N \times N$, $l_{\hat{a}} = 1, ..., N$ et

$$f_l(z) = \left(p - 1 + \frac{(p-1)^2}{4p} \sum_{i=1}^{l} z_i^2\right)^{-\frac{1}{p-1}}. \tag{21}$$

D'autres comportements qui font apparaître l'échelle $(T-t)^{-\frac{1}{2k}}(x - \hat{a})$ où $k = 2, 3, ..$ peuvent avoir lieu (voir [90]). On les soupçonne d'être instables.

Si $l_{\hat{a}} = N$, alors $\hat{a}$ est un point d'explosion isolé. Beaucoup d'auteurs se sont intéressés à ce cas (Weissler [95], Bricmont et Kupiainen [14], Herrero et Velázquez [53], [90],...). Nous avons démontré la stabilité d'un tel comportement avec Fermanian et Merle dans [24]. Le Théorème de Liouville de [75] a été l'argument clé de notre preuve.

Le cas $l_{\hat{a}} < N$ se produit aussi, notamment lorsque u est invariante dans certaines coordonnées. Cependant, lorsque $l_{\hat{a}} < N$, on ne peut même pas affirmer si $\hat{a}$ est isolé ou pas, ou si S est continu au voisinage de $\hat{a}$ ou pas. Ainsi, nous allons supposer que $\hat{a}$ est non isolé et que S contient un continuum de points d'explosion qui passe par $\hat{a}$. Plus précisément, on considère $a \in C((-1,1)^{N-l_{\hat{a}}}, \mathbb{R}^N)$ tel que $\hat{a} = a(0) \in \operatorname{Im} a \subset S$, $\operatorname{Im} a$ est de "dimension" au moins égale à $(N - l_{\hat{a}})$ et $\hat{a}$ n'est pas un "point d'arrêt" dans $\operatorname{Im} a$. Nous avons alors le résultat suivant :

Théorème 12 (Régularité de l'ensemble d'explosion au voisinage d'un point avec le comportement (20) si S contient un continuum de "dimension" $N - l$) *Soient $N \geq 2$ et $l \in \{1, ..., N-1\}$. On considère u une solution de (2) qui explose au temps T sur un ensemble S et on prend $\hat{a} \in S$ un point où u se comporte localement conformément à (20). On considère également $a \in C((-1,1)^{N-l}, \mathbb{R}^N)$ tel que $\hat{a} = a(0) \in \operatorname{Im} a \subset S$ et $\operatorname{Im} a$ est de "dimension" au moins égale à $(N - l)$. Si $\hat{a}$ n'est pas un "point d'arrêt" dans $\operatorname{Im} a$, alors il existe $\delta > 0$, $\delta_1 > 0$ et $\varphi \in C^1([-\delta_1, \delta_1]^{N-l}, \mathbb{R}^l)$ tels que*

$$S \cap B(\hat{a}, 2\delta) = \operatorname{graph} \varphi \cap B(\hat{a}, 2\delta) = \operatorname{Im} a \cap B(\hat{a}, 2\delta). \tag{22}$$

En particulier, S est une variété C^1 au voisinage du point $\hat{a}$. Plus précisément, il existe $C_0 > 0$ et h_0 tels que pour tous $|\xi| < \delta_1$ et $|h| < h_0$ vérifiant $|\xi + h| < \delta_1$, on a :

$$|\varphi(\xi + h) - \varphi(\xi) - h.\nabla\varphi(\xi)| \leq C_0 |h| \sqrt{\frac{\log|\log|h||}{|\log|h||}}.$$

Remarque : Définir un "point d'arrêt" et la "dimension $(N - l)$" dans ce théorème demande plus de notations. Voir la section 6 dans [99] pour plus de précision.
Remarque : Si l, la codimension de l'ensemble d'explosion est 1, alors la fonction φ est en fait $C^{1,\alpha}$ pour tout $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$ (voir Proposition 16 ci-après).
Remarque : D'après [90], nous savons que le profil limite annoncé dans (20) admet une direction dégénérée, et qu'on ne peut pas avoir deux courbes de points d'explosion qui se couperaient transversalement en $\hat{a}$. Avec notre contribution, nous éliminons la possibilité d'avoir deux courbes qui se toucheraient tangentiellement en $\hat{a}$. En particulier, on ne peut avoir un coin ou un point de rebroussement en $\hat{a}$, ni même une suite de points d'explosion isolés convergeant vers $\hat{a}$.

3.2 Comportement à l'explosion au voisinage d'un point d'explosion non isolé

Le comportement de $u(x,t)$ au voisinage de la singularité $(\hat{a}, T)$ est notre deuxième objectif dans cette partie. Nous avons le théorème suivant

Théorème 13 (Comportement et profil à l'explosion au voisinage d'un point d'explosion où u se comporte selon (20), si S contient un continuum) *Sous les hypothèses du théorème 12, il existe $t_0 < T$ tel que pour tous $K_0 > 0$, $t \in [t_0, T)$ et $x \in B(\hat{a}, \delta)$ avec $d(x,S) \le K_0\sqrt{(T-t)|\log(T-t)|}$, on a*

$$\left|(T-t)^{\frac{1}{p-1}}u(x,t) - f_1\left(\frac{d(x,S)}{\sqrt{(T-t)|\log(T-t)|}}\right)\right| \le C_0'(K_0)\frac{\log|\log(T-t)|}{|\log(T-t)|} \qquad (23)$$

où f_1 est définie dans (21). De plus, $\forall x \in \mathbb{R}^N \backslash S$, $u(x,t) \to u^*(x)$ quand $t \to T$ avec

$$u^*(x) \sim U(d(x,S)) \text{ lorsque } d(x,S) \to 0 \text{ et } x \in B(\hat{a}, \delta) \qquad (24)$$

où $U(z) = \left(\frac{8p}{(p-1)^2}\frac{|\log z|}{z^2}\right)^{\frac{1}{p-1}}$ pour tout $z > 0$.

Remarque : C'est la première fois que le profil à l'explosion u^* est obtenu au voisinage d'un point d'explosion non isolé. En effet, dans ses travaux antérieurs, Velázquez n'a pas obtenu le comportement suivant la direction "tangentielle" de S. De façon surprenante, l'estimation (23) montre que le profil au voisinage d'un ensemble d'explosion de codimension l n'est autre que le profil symétrique (autour d'un point d'explosion isolé) en une seule dimension d'espace (noter qu'en dimension un, tous les points d'explosion sont isolés).

La preuve de la stabilité du comportement (20) dans un voisinage de $\hat{a}$ dans S constitue l'étape principale en direction du théorème 12. Sans cette stabilité, on ne peut espérer une amélioration du résultat de Velázquez [92] concernant la mesure de Hausdorff de S. Le Théorème de Liouville de [75] est l'argument clé de la stabilité.

Le terme d'erreur dans (23) montre que nous tombons dans des échelles logarithmiques $\nu = -1/\log(T-t)$ du petit paramètre d'explosion $\epsilon = T-t$. Des raffinements dans cette direction devraient donner un développement de la solution en termes de puissances de ν, i.e., dans des échelles logarithmiques de ϵ (voir Stewartson et Stuart [88]). Les échelles logarithmiques apparaissent aussi dans des problèmes de perturbation singulière comme les fluides à faible nombre de Reynolds et certaines membranes vibrantes (voir Ward [93] et les références citées, voir aussi Segur et Kruskal [85] pour une équation de Klein-Gordon). Puisque ν tend vers zéro lentement, l'intérêt pratique des séries logarithmiques infinies dans l'approximation des solutions exactes est très limité. Les bonnes approximations, i.e., les approximations jusqu'à des ordres inférieurs comme ϵ^β où $\beta > 0$, se situent au delà de toute échelle logarithmique. Lorsque la codimension de l'ensemble d'explosion est 1, précisément lorsque

$$l = 1,$$

nous obtenons mieux que (23), et nous arrivons à des termes d'ordre $(T-t)^\beta$ avec $\beta > 0$. Notre idée pour atteindre ce terme est d'abandonner le profil explicite f_1 obtenu comme première approximation, et de prendre à la place comme première approximation du comportement singulier une fonction moins explicite. Bien que les deux formulations s'accordent au premier ordre, le profil moins explicite nous permettra d'atteindre l'ordre ϵ^β par une simple itération.

3.3 Raffinements lorsque la codimension de l'ensemble d'explosion est égale à un

Une solution explosive de (2) en dimension un avec le profil f_1 est un candidat naturel pour le profil moins explicite. Il est classique qu'il existe une fonction symétrique unidimensionnelle $\tilde{u}(x_1,t)$, solution de (2), qui décroît sur $(0,\infty)$ et explose au temps T uniquement à l'origine, avec le profil f_1, au sens où pour tous $K_0>0$ et $t\in[t_0,T)$, si $|x_1|\le K_0\sqrt{(T-t)|\log(T-t)|}$, alors

$$\left|(T-t)^{\frac{1}{p-1}}\tilde{u}(x_1,t)-f_1\left(\frac{x_1}{\sqrt{(T-t)|\log(T-t)|}}\right)\right|\le C_0'(K_0)\frac{\log|\log(T-t)|}{|\log(T-t)|} \tag{25}$$

(voir Appendice A dans [100] pour une preuve d'existence). Ainsi, on déduit de (23) que pour tous $K_0>0$, $t\in[t_0,T)$ et $x\in B(\hat{a},\delta)$ tels que $d(x,S)\le K_0\sqrt{(T-t)|\log(T-t)|}$, on a

$$(T-t)^{\frac{1}{p-1}}\left|u(x,t)-\tilde{u}(d(x,S),t)\right|\le C(K_0)\frac{\log|\log(T-t)|}{|\log(T-t)|}. \tag{26}$$

Cette estimation reste valable même si on remplace $\tilde{u}(d(x,S),t)$ par n'importe quel $\tilde{u}_{\sigma(x,t)}(d(x,S),t)$ où $\tilde{u}_\sigma$ est défini par

$$\tilde{u}_\sigma(x_1,t)=e^{-\frac{\sigma}{p-1}}\tilde{u}(e^{-\frac{\sigma}{2}}x_1,T-e^{-\sigma}(T-t)), \tag{27}$$

tant que $|\sigma(x,t)|\le C(K_0)$. En effet, pour tout $\sigma\in\mathbb{R}$, $\tilde{u}_\sigma$ est aussi une solution explosive de (2) avec les mêmes propriétés et le même profil (25) que $\tilde{u}$. De plus, $\tilde{u}_\sigma\ne\tilde{u}$, sauf si $\sigma=0$, parce que $\tilde{u}$ n'est pas auto-similaire (voir Appendice A dans [100]).

Pour tout point d'explosion a voisin de $\hat{a}$, nous allons choisir convenablement ce paramètre d'échelle libre $\sigma=\sigma(a)$ de façon à ce que la différence $(T-t)^{\frac{1}{p-1}}\left(u(x,t)-\tilde{u}_{\sigma(a)}(d(x,S),t)\right)$ le long de la direction normale à S en a soit minimum. Suivant les idées de la page 22, si on raffine le développement autour de cette fonction $\tilde{u}_{\sigma(a)}(d(x,S),t)$, certes non explicite, alors on échappe aux échelles logarithmiques. En particulier, si $p>3$, alors la différence $u(x,t)-\tilde{u}_{\sigma(a)}(d(x,S),t)$ est bornée et tend vers zéro lorsque $t\to T$, bien que les deux fonctions explosent. Ceci ne peut être fait que si

$$l=1$$

ce qui correspond à un ensemble d'explosion de codimension 1. Nous avons le théorème suivant :

Théorème 14 (La solution en N dimensions comme superposition de solutions unidimensionnelles de la variable normale à l'ensemble d'explosion, avec une dilatation convenable) *Sous les hypothèses du théorème 12 et si $l=1$ et $p>3$, alors* *pour tous $t \in [t_1, T)$ et $x \in B(\hat{a}, \delta)$ tels que $d(x,S) < \epsilon_0$ pour des $t_1 < T$, $\delta > 0$ et $\epsilon_0 > 0$, on a*

$$\left|u(x,t) - \tilde{u}_{\sigma(P_S(x))}\left(d(x,S),t\right)\right| \leq h(x,t) < M < +\infty, \tag{28}$$

où $P_S(x)$ est la projection de x sur S et $h(x,t) \to 0$ lorsque $d(x,S) \to 0$ et $t \to T$.

Ainsi, lorsque $p > 3$, tous les termes singuliers de u dans un voisinage de $(\hat{a}, T)$ sont absorbés dans le solution unidimensionnelle rééchelonnée $\tilde{u}_{\sigma(P_S(x))}\left(d(x,S),t\right)$, ce qui montre que dans un voisinage tubulaire de l'ensemble d'explosion S, la variable d'espace x se scinde en deux variables indépendantes :

- Une variable primaire, $d(x,S)$, normale à S. Elle rend compte du terme singulier principal de u et donne la taille de $u(x,t)$, comme on le voyait déjà dans (23).

- Une variable secondaire, $P_S(x)$, dont l'effet est plus délicat. À travers le choix optimal de la dilatation $\sigma(P_S(x))$, elle absorbe *tous* les termes singuliers suivants dans la direction normale à S à $P_S(x)$.

Cette idée de superposition a été utilisée aussi par Betterton et Brenner [10] dans un modèle de chimiotactisme; voir section 5 dans [100] pour une brève discussion des connexions avec ce travail. On voudrait mentionner que nous avons utilisés avec succès cette idée de modulation de la dilatation avec Fermanian dans [25] si $N = 1$ et $p \geq 3$ pour démontrer qu'à une fonction bornée et aux invariances de l'équation (la dilatation et les translations en espace et en temps) près, il y avait juste une seule solution explosive à (2) avec le profil (20),

Théorème 14 est une conséquence directe du résultat suivant qui est valable aussi pour $1 < p \leq 3$.

Théorème 15 (Comportement et profil à l'explosion au voisinage d'un point où u se comporte comme dans (20), si S est localement une variété de dimension $(N-1)$) *Sous les hypothèses du théorème 12 et sans la restriction $p > 3$, si $l = 1$, alors il existe $t_1 < T$ et $\epsilon_0 > 0$ tels que pour tout $x \in B(\hat{a}, \delta)$ avec $d(x,S) \leq \epsilon_0$, on a :*
i) Pour tout $t \in [t_1, T)$,

$$\begin{aligned}&\left|u(x,t) - \tilde{u}_{\sigma(P_S(x))}\left(d(x,S),t\right)\right| \leq \\ &C \,\mathrm{mM}\left((T-t)^{\frac{p-3}{2(p-1)}}|\log(T-t)|^{\frac{3}{2}+C_0}, d(x,S)^{\frac{p-3}{p-1}}|\log d(x,S)|^{\frac{p}{p-1}+C_0}\right),\end{aligned} \tag{29}$$

où $P_S(x)$ est la projection de x sur S, $\mathrm{mM} = \min$ *si* $1 < p \leq 3$ *et* $\mathrm{mM} = \max$ *si* $p > 3$.
ii) Si $x \notin S$, alors $u(x,t) \to u^*(x)$ lorsque $t \to T$ et

$$\begin{aligned}&\left|u^*(x) - e^{-\frac{\sigma(P_S(x))}{p-1}}\tilde{u}^*\left(e^{-\frac{\sigma(P_S(x))}{2}}d(x,S)\right)\right| \\ &\leq C d(x,S)^{\frac{p-3}{p-1}}|\log d(x,S)|^{\frac{p}{p-1}+C_0},\end{aligned}$$

où $\tilde{u}^*(x_1) = \lim_{t\to T}\tilde{u}(x_1,t)$.

Remarque: En comparaison avec le théorème 13, on voit d'après notre nouvelle estimation qu'à une dilatation convenable près, tous les termes suivants dans le développement de u^* jusqu'à l'ordre $d(x,S)^{\frac{p-3}{p-1}} |\log d(x,S)|^{\frac{p}{p-1}+C_0}$ sont les mêmes que pour la solution particulière $\tilde{u}^*$ en dimension un.

Le partage de la variable d'espace x en $d(x,S)$ et $P_S(x)$, comme cela apparaît dans (29), induit une contrainte géométrique sur l'ensemble d'explosion S, ce qui conduit à plus de régularité sur S.

Proposition 16 (Régularité $C^{1,\frac{1}{2}-\eta}$ pour S et $C^{1-\eta}$ pour la dilatation σ) *Sous les hypothèses du Théorème 12 et si $l = 1$, alors S est le graphe d'une fonction $\varphi \in C^{1,\frac{1}{2}-\eta}(B_{N-1}(0,\delta_1),\mathbb{R})$, localement au voisinage de $\hat{a}$, et σ est une fonction $C^{1-\eta}$, pour tout $\eta > 0$. Plus précisément, il existe $h_0 > 0$ tel que pour tout $|\xi| < \delta_1$ et $|h| < h_0$ vérifiant $|\xi + h| < \delta_1$, on a*

$$\begin{aligned}
|\varphi(\xi+h) - \varphi(\xi) - h.\nabla\varphi(\xi)| &\leq C|h|^{3/2}|\log|h||^{\frac{1}{2}+C_0},\\
|\sigma(\xi,\varphi(\xi)) - \sigma(\xi+h,\varphi(\xi+h))| &\leq C|h||\log|h||^{3+C_0}.
\end{aligned}$$

Les articles [99] et [100] ainsi que la note [101] contiennent les preuves et d'autres détails concernant les résultats exposés dans ce chapitre.

Deuxième partie

Singularités des équations semilinéaires des ondes: taux optimal d'explosion

On s'intéresse dans [76] (écrit en collaboration avec F. Merle) à l'équation semilinéaire des ondes qui suit:

$$\begin{cases} u_{tt} = \Delta u + |u|^{p-1}u, \\ u(0) = u_0 \text{ et } u_t(0) = u_1, \end{cases} \tag{30}$$

où $u(t) : x \in \mathbb{R}^N \to u(x,t) \in \mathbb{R}$, $u_0 \in \mathrm{H}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^\mathrm{N})$, $u_1 \in \mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^\mathrm{N})$ et

$$1 < p < 1 + \frac{4}{N-1}. \tag{31}$$

Le problème de Cauchy et l'existence de solutions explosives pour (30) étaient déjà connues (voir par exemple Lindblad et Sogge [64], Shatah et Struwe [86] et John [56]). Caffarelli et Friedman [18], Alinhac [1], Kichenassamy et Litman [59], [60] ont obtenu d'autres résultats d'explosion. En revanche, les résultats antérieurs concernant la vitesse d'explosion étaient très partiels; Caffarelli et Friedman ont obtenu dans [18] quelques résultats sur les solutions explosives, sous une condition de monotonie de la donnée initiale en dimension $N = 1$; Antonini et Merle [3] ont démontré avec une restriction sur la puissance p une estimation du taux d'explosion de toutes les solutions *positives* de (30).

Notre idée consiste à développer un programme "parabolique" pour l'équation hyperbolique (30), analogue à celui développé pour l'équation de la chaleur, notamment par Giga et Kohn [39], [40], [41] (changement de variable autosimilaire, estimations d'énergie; des développements similaires ont été réalisés par Quittner [84] [83], et Giga, Matsui et Sasayama [42]).

Dans [76], nous enlevons la condition de positivité et les restrictions sur p contenues dans Antonini et Merle [3] pour démontrer le théorème suivant:

Théorème 17 (Bornes uniformes sur les solutions explosives de l'équation (30)) *Si u est une solution de (30) qui explose en temps fini T, alors pour tout $t \in [T(1-e^{-1}), T)$,*

$$\epsilon_0(p,N) \le (T-t)^{\frac{2}{p-1}} \|u\|_{\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc,u}}(\mathbb{R}^\mathrm{N})} + (T-t)^{\frac{2}{p-1}+1} \left(\|u_t\|_{\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc,u}}(\mathbb{R}^\mathrm{N})} + \|\nabla u\|_{\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc,u}}(\mathbb{R}^\mathrm{N})} \right) \le K$$

où

$$\|v\|_{\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc,u}}(\mathbb{R}^\mathrm{N})} = \sup_{a \in \mathbb{R}^N} \left(\int_{|x-a|<1} |v(x)|^2 dx \right)^{1/2} < +\infty,$$

pour un certain K qui ne dépend que de N, p, T et de la norme de la donnée initiale dans $\mathrm{H}^1_{\mathrm{loc,u}} \times \mathrm{L}^2_{\mathrm{loc,u}}(\mathbb{R}^N)$.

La preuve de notre résultat repose sur:

- l'existence d'une fonctionnelle de Lyapounov pour l'équation

$$w_{ss}+\frac{p+3}{p-1}w_s+2y.\nabla w_s+\sum_{i,j}(y_iy_j-\delta_{i,j})\partial^2_{y_iy_j}w+\frac{2(p+1)}{p-1}y.\nabla w=|w|^{p-1}w-\frac{2(p+1)}{(p-1)^2}w,$$

obtenue de (30) grâce au changement de variables autosimilaire

$$w_a(y,s)=(T-t)^{\frac{2}{p-1}}u(x,t),\ \ y=\frac{x-a}{T-t},\ \ s=-\log(T-t),$$

et des estimations d'énergie se rapportant à cette structure,

- des techniques d'interpolation pour l'amélioration de ces estimations,

- un argument de type Gagliardo-Nirenberg similaire à celui utilisé pour l'équation de Schrödinger non linéaire, où des bornes uniformes H^1 ont été obtenues à partir de la conservation de l'énergie et de la masse L^2, dans le cas sous-critique $p<1+\dfrac{4}{N}$ (voir Ginibre et Velo [43]).

Troisième partie

Liste des publications présentées pour l'habilitation (novembre 2002)

- C. Fermanian Kammerer, F. Merle, and H. Zaag. Stability of the blow-up profile of non-linear heat equations from the dynamical system point of view. *Math. Annalen*, 317(2):195–237, 2000.

- C. Fermanian Kammerer and H. Zaag. Boundedness up to blow-up of the difference between two solutions to a semilinear heat equation. *Nonlinearity*, 13(4):1189–1216, 2000.

- P. Groisman, J. D. Rossi, and H Zaag. On the dependence of the blow-up time with respect to the initial data in a semilinear parabolic problem. *Comm. Partial Differential Equations*, 28:737–744, 2003.

- F. Merle and H. Zaag. A Liouville theorem for vector-valued nonlinear heat equations and applications. *Math. Annalen*, 316(1):103–137, 2000.

- F. Merle and H. Zaag. Determination of the blow-up rate for a semilinear wave equation. *Amer. J. Math.*, 125, 2003. to appear.

- F. Merle and H. Zaag. Estimations uniformes à l'explosion pour les équations de la chaleur non linéaires et applications. In *Séminaire sur les Équations aux Dérivées Partielles, 1996–1997*, pages Exp. No. XIX, 10. École Polytech., Palaiseau, 1997.

- F. Merle and H. Zaag. Optimal estimates for blowup rate and behavior for nonlinear heat equations. *Comm. Pure Appl. Math.*, 51(2):139–196, 1998.

- F. Merle and H. Zaag. Reconnection of vortex with the boundary and finite time quenching. *Nonlinearity*, 10(6):1497–1550, 1997.

- F. Merle and H. Zaag. Refined uniform estimates at blow-up and applications for nonlinear heat equations. *Geom. Funct. Anal.*, 8(6):1043–1085, 1998.

- F. Merle and H. Zaag. Stabilité du profil à l'explosion pour les équations du type $u_t = \Delta u + |u|^{p-1}u$. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 322(4):345–350, 1996.

- F. Merle and H. Zaag. Stability of the blow-up profile for equations of the type $u_t = \Delta u + |u|^{p-1}u$. *Duke Math. J.*, 86(1):143–195, 1997.

- H. Zaag. A Liouville theorem and blow-up behavior for a vector-valued nonlinear heat equation with no gradient structure. *Comm. Pure Appl. Math.*, 54:107–133, 2001.

- H. Zaag. A remark on the energy blow-up behavior for nonlinear heat equations. *Duke Math. J.*, 103(3):545–556, 2000.

- H. Zaag. Blow-up results for vector-valued nonlinear heat equations with no gradient structure. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 15(5):581–622, 1998.

- H. Zaag. On the regularity of the blow-up set for semilinear heat equations. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 19(5):505–542, 2002.

- H. Zaag. One dimensional behavior of singular N dimensional solutions of semilinear heat equations. *Comm. Math. Phys.*, 225(3):523–549, 2002.

Actes de congrès avec comité de lecture

- F. Merle and H. Zaag. O.D.E. type behavior of blow-up solutions of nonlinear heat equations. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 8(2):435–450, 2002. Current developments in partial differential equations (Temuco, 1999).

- F. Merle and H. Zaag. Uniform blow-up estimates for nonlinear heat equations and applications. *Methods Appl. Anal*, 8(4), 2002.

- H. Zaag. Regularity of the blow-up set and singular behavior for semilinear heat equations. In *Mathematics & mathematics education (Bethlehem, 2000)*, pages 337–347. World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 2002.

Références

[1] S. Alinhac, *Blowup for nonlinear hyperbolic equations*, Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, vol. 17, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1995.

[2] D. Andreucci, M. A. Herrero, and J. J. L. Velázquez, *Liouville theorems and blow up behaviour in semilinear reaction diffusion systems*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **14** (1997), no. 1, 1–53.

[3] C. Antonini and F. Merle, *Optimal bounds on positive blow-up solutions for a semilinear wave equation*, Internat. Math. Res. Notices (2001), no. 21, 1141–1167.

[4] A. Bahri, *Topological results on a certain class of functionals and application*, J. Funct. Anal. **41** (1981), no. 3, 397–427.

[5] J. M. Ball, *Remarks on blow-up and nonexistence theorems for nonlinear evolution equations*, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) **28** (1977), no. 112, 473–486.

[6] J. Bebernes and D. Eberly, *Mathematical problems from combustion theory*, Springer-Verlag, New York, 1989.

[7] N. Bellomo and L. Preziosi, *Modelling and mathematical problems related to tumor evolution and its interaction with the immune system*, Math. Comput. Modelling **32** (2000), no. 3-4, 413–452.

[8] M. Berger and R. V. Kohn, *A rescaling algorithm for the numerical calculation of blowing-up solutions*, Comm. Pure Appl. Math. **41** (1988), no. 6, 841–863.

[9] A. J. Bernoff, A. L. Bertozzi, and T. P. Witelski, *Axisymmetric surface diffusion: dynamics and stability of self-similar pinchoff*, J. Statist. Phys. **93** (1998), no. 3-4, 725–776.

[10] M. D. Betterton and M. P. Brenner, *Collapsing bacterial cylinders*, Phys. Rev. E **64** (2001), no. 061904.

[11] M. P. Brenner, P. Constantin, L. P. Kadanoff, A. Schenkel, and S. C. Venkataramani, *Diffusion, attraction and collapse*, Nonlinearity **12** (1999), no. 4, 1071–1098.

[12] M.P. Brenner, L. Levitov, and E.O. Budrene, *Physical mechanisms for chemotactic pattern formation by bacteria*, Biophys. J. **74** (1995), 1677–1693.

[13] J. Bricmont and A. Kupiainen, *Renormalization group and nonlinear PDEs*, Quantum and non-commutative analysis (Kyoto, 1992), Math. Phys. Stud., vol. 16, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1993, pp. 113–118.

[14] ———, *Universality in blow-up for nonlinear heat equations*, Nonlinearity **7** (1994), no. 2, 539–575.

[15] J. Bricmont, A. Kupiainen, and G. Lin, *Renormalization group and asymptotics of solutions of nonlinear parabolic equations*, Comm. Pure Appl. Math. **47** (1994), no. 6, 893–922.

[16] E.O. Budrene and H.C. Berg, *Complex patterns formed by motiile cells of escherichia coli*, Nature **349** (1991), 630–633.

[17] ———, *Dynamics of formation of symmetrical patterns by chemotactic bacteria*, Nature **376** (1995), 49–53.

[18] L. A. Caffarelli and A. Friedman, *The blow-up boundary for nonlinear wave equations*, Trans. Amer. Math. Soc. **297** (1986), no. 1, 223–241.

[19] G. Caristi and E. Mitidieri, *Blow-up estimates of positive solutions of a parabolic system*, J. Differential Equations **113** (1994), no. 2, 265–271.

[20] S. J. Chapman, B. J. Hunton, and J. R. Ockendon, *Vortices and boundaries*, Quart. Appl. Math. **56** (1998), no. 3, 507–519.

[21] X. Y. Chen and H. Matano, *Convergence, asymptotic periodicity, and finite-point blow-up in one-dimensional semilinear heat equations*, J. Differential Equations **78** (1989), no. 1, 160–190.

[22] K. Deng and H. A. Levine, *On the blow up of u_t at quenching*, Proc. Amer. Math. Soc. **106** (1989), no. 4, 1049–1056.

[23] ______, *The role of critical exponents in blow-up theorems : the sequel*, J. Math. Anal. Appl **243** (2000), 85–126.

[24] C. Fermanian Kammerer, F. Merle, and H. Zaag, *Stability of the blow-up profile of non-linear heat equations from the dynamical system point of view*, Math. Annalen **317** (2000), no. 2, 195–237.

[25] C. Fermanian Kammerer and H. Zaag, *Boundedness up to blow-up of the difference between two solutions to a semilinear heat equation*, Nonlinearity **13** (2000), no. 4, 1189–1216.

[26] S. Filippas and R. V. Kohn, *Refined asymptotics for the blowup of $u_t - \Delta u = u^p$*, Comm. Pure Appl. Math. **45** (1992), no. 7, 821–869.

[27] S. Filippas and W. X. Liu, *On the blowup of multidimensional semilinear heat equations*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **10** (1993), no. 3, 313–344.

[28] S. Filippas and F. Merle, *Modulation theory for the blowup of vector-valued nonlinear heat equations*, J. Differential Equations **116** (1995), no. 1, 119–148.

[29] ______, *Compactness and single-point blowup of positive solutions on bounded domains*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **127** (1997), no. 1, 47–65.

[30] R.A. Fisher, *The advance of advantageous genes*, Ann. of Eugenics **7** (1937), 355–369.

[31] A. Friedman, *Remarks on nonlinear parabolic equations*, Proc. Sympos. Appl. Math., Vol. XVII, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1965, pp. 3–23.

[32] ______, *Partial differential equations*, original ed., Robert E. Krieger Publishing Co., Huntington, N.Y., 1976.

[33] A. Friedman and B. McLeod, *Blow-up of positive solutions of semilinear heat equations*, Indiana Univ. Math. J. **34** (1985), no. 2, 425–447.

[34] H. Fujita, *On the blowing up of solutions of the Cauchy problem for $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. I **13** (1966), 109–124.

[35] V. A. Galaktionov, S. P. Kurdyumov, and A. A. Samarskiĭ, *Approximate self-similar solutions of a class of quasilinear heat equations with a source*, Mat. Sb. (N.S.) **124(166)** (1984), no. 2, 163–188.

[36] V. A. Galaktionov and J. L. Vázquez, *Regional blow up in a semilinear heat equation with convergence to a Hamilton-Jacobi equation*, SIAM J. Math. Anal. **24** (1993), no. 5, 1254–1276.

[37] B. Gidas and J. Spruck, *Global and local behavior of positive solutions of nonlinear elliptic equations*, Comm. Pure Appl. Math. **34** (1981), 525–598.

[38] Y. Giga, *A bound for global solutions of semilinear heat equations*, Comm. Math. Phys. **103** (1986), no. 3, 415–421.

[39] Y. Giga and R. V. Kohn, *Asymptotically self-similar blow-up of semilinear heat equations*, Comm. Pure Appl. Math. **38** (1985), no. 3, 297–319.

[40] ———, *Characterizing blowup using similarity variables*, Indiana Univ. Math. J. **36** (1987), no. 1, 1–40.

[41] ———, *Nondegeneracy of blowup for semilinear heat equations*, Comm. Pure Appl. Math. **42** (1989), no. 6, 845–884.

[42] Y. Giga, S. Matsui, and S. Sasayama, *Blow up rate for semilinear heat equation with subcritical nonliearrity*, (2003), preprint.

[43] J. Ginibre and G. Velo, *On a class of nonlinear Schrödinger equations. I. The Cauchy problem, general case*, J. Funct. Anal. **32** (1979), no. 1, 1–32.

[44] P. Groisman, J. D. Rossi, and H Zaag, *On the dependence of the blow-up time with respect to the initial data in a semilinear parabolic problem*, Comm. Partial Differential Equations **28** (2003), 737–744.

[45] J. Guo, *On the quenching behavior of the solution of a semilinear parabolic equation*, J. Math. Anal. Appl. **151** (1990), no. 1, 58–79.

[46] ———, *On the quenching rate estimate*, Quart. Appl. Math. **49** (1991), no. 4, 747–752.

[47] ———, *On the semilinear elliptic equation* $\Delta w - \frac{1}{2}y \cdot \nabla w + \lambda w - w^{-\beta} = 0$ *in* $\mathbf{R}^n$, Chinese J. Math. **19** (1991), no. 4, 355–377.

[48] D. Henry, *Geometric theory of semilinear parabolic equations*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 840, Springer-Verlag, Berlin, 1981.

[49] M. A. Herrero and J. J. L. Velázquez, *Blow-up profiles in one-dimensional, semilinear parabolic problems*, Comm. Partial Differential Equations **17** (1992), no. 1-2, 205–219.

[50] ———, *Comportement générique au voisinage d'un point d'explosion pour des solutions d'équations paraboliques unidimensionnelles*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **314** (1992), no. 3, 201–203.

[51] ———, *Flat blow-up in one-dimensional semilinear heat equations*, Differential Integral Equations **5** (1992), no. 5, 973–997.

[52] ———, *Generic behaviour of one-dimensional blow up patterns*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) **19** (1992), no. 3, 381–450.

[53] ———, *Blow-up behaviour of one-dimensional semilinear parabolic equations*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **10** (1993), no. 2, 131–189.

[54] ———, *Explosion de solutions d'équations paraboliques semilinéaires supercritiques*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **319** (1994), no. 2, 141–145.

[55] ———, *Singularity patterns in a chemotaxis model*, Math. Ann. **306** (1996), no. 3, 583–623.

[56] F. John, *Blow-up of solutions of nonlinear wave equations in three space dimensions*, Manuscripta Math. **28** (1979), no. 1-3, 235–268.

[57] S. Kaplan, *On the growth of solutions of quasi-linear parabolic equations*, Comm. Pure Appl. Math. **16** (1963), 305–330.

[58] H. Kawarada, *On solutions of initial-boundary problem for* $u_t = u_{xx} + 1/(1-u)$, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **10** (1974/75), no. 3, 729–736.

[59] S. Kichenassamy and W. Littman, *Blow-up surfaces for nonlinear wave equations. I*, Comm. Partial Differential Equations **18** (1993), no. 3-4, 431–452.

[60] ———, *Blow-up surfaces for nonlinear wave equations. II*, Comm. Partial Differential Equations **18** (1993), no. 11, 1869–1899.

[61] H. A. Levine, *Some nonexistence and instability theorems for solutions of formally parabolic equations of the form $Pu_t = -Au + F(u)$*, Arch. Rational Mech. Anal. **51** (1973), 371–386.

[62] ———, *The long-time behaviour of solutions of reaction-diffusion equations in unbounded domains: a survey*, Ordinary and partial differential equations, Vol. II (Dundee, 1988), Pitman Res. Notes Math. Ser., vol. 216, Longman Sci. Tech., Harlow, 1989, pp. 97–118.

[63] ———, *Quenching, nonquenching, and beyond quenching for solution of some parabolic equations*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **155** (1989), 243–260.

[64] H. Lindblad and C. D. Sogge, *On existence and scattering with minimal regularity for semilinear wave equations*, J. Funct. Anal. **130** (1995), no. 2, 357–426.

[65] Y. Martel and F. Merle, *A Liouville theorem for the critical generalized Korteweg-de Vries equation*, J. Math. Pures Appl. (9) **79** (2000), no. 4, 339–425.

[66] ———, *Stability of blow-up profile and lower bounds for blow-up rate for the critical generalized KdV equation*, Ann. of Math. (2) **155** (2002), no. 1, 235–280.

[67] H. P. McKean, *Application of Brownian motion to the equation of Kolmogorov-Petrovskii-Piskunov*, Comm. Pure Appl. Math. **28** (1975), no. 3, 323–331.

[68] F. Merle, *Solution of a nonlinear heat equation with arbitrarily given blow-up points*, Comm. Pure Appl. Math. **45** (1992), no. 3, 263–300.

[69] F. Merle and P. Raphaël, *Stability and universality of blow-up profiles for critical NLS*, (2002), preprint.

[70] F. Merle and H. Zaag, *Stabilité du profil à l'explosion pour les équations du type $u_t = \Delta u + |u|^{p-1}u$*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **322** (1996), no. 4, 345–350.

[71] ———, *Reconnection of vortex with the boundary and finite time quenching*, Nonlinearity **10** (1997), no. 6, 1497–1550.

[72] ———, *Stability of the blow-up profile for equations of the type $u_t = \Delta u + |u|^{p-1}u$*, Duke Math. J. **86** (1997), no. 1, 143–195.

[73] ———, *Optimal estimates for blowup rate and behavior for nonlinear heat equations*, Comm. Pure Appl. Math. **51** (1998), no. 2, 139–196.

[74] ———, *Refined uniform estimates at blow-up and applications for nonlinear heat equations*, Geom. Funct. Anal. **8** (1998), no. 6, 1043–1085.

[75] ———, *A Liouville theorem for vector-valued nonlinear heat equations and applications*, Math. Annalen **316** (2000), no. 1, 103–137.

[76] ———, *Determination of the blow-up rate for a semilinear wave equation*, Amer. J. Math. **125** (2003), to appear.

[77] C. E. Mueller and F. B. Weissler, *Single point blow-up for a general semilinear heat equation*, Indiana Univ. Math. J. **34** (1985), no. 4, 881–913.

[78] J. D. Murray, *Mathematical biology. I*, third ed., Interdisciplinary Applied Mathematics, vol. 17, Springer-Verlag, New York, 2002, An introduction.

[79] M. Nagasawa, *A limit theorem of a pulse-like wave form for a Markov process*, Proc. Japan Acad. **44** (1968), 491–494.

[80] C. V. Pao, *Nonlinear parabolic and elliptic equations*, Plenum Press, New York, 1992.

[81] A. Pazy, *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, Springer-Verlag, New York, 1983.

[82] P. Plecháč and V. Šverák, *On self-similar singular solutions of the complex Ginzburg-Landau equation*, Comm. Pure Appl. Math. **54** (2001), no. 10, 1215–1242.

[83] P. Quittner, *Continuity of the blow-up time and a priori bounds for solutions in superlinear parabolic problems*, Houston J. Math., to appear.

[84] ———, *A priori bounds for global solutions of a semilinear parabolic problem*, Acta Math. Univ. Comenian. (N.S.) **68** (1999), no. 2, 195–203.

[85] H. Segur and M. D. Kruskal, *Nonexistence of small-amplitude breather solutions in ϕ^4 theory*, Phys. Rev. Lett. **58** (1987), no. 8, 747–750.

[86] J. Shatah and M. Struwe, *Geometric wave equations*, New York University Courant Institute of Mathematical Sciences, New York, 1998.

[87] H. M. Soner and P. E. Souganidis, *Singularities and uniqueness of cylindrically symmetric surfaces moving by mean curvature*, Comm. Partial Differential Equations **18** (1993), no. 5-6, 859–894.

[88] K. Stewartson and J. T. Stuart, *A non-linear instability theory for a wave system in plane Poiseuille flow*, J. Fluid Mech. **48** (1971), 529–545.

[89] K. R. Swanson, E. C. Alvord, and J. D. Murray, *Quantifying efficacy of chemotherapy of brain tumors (gliomas) with homogeneous and heterogeneous drug*, Acta Biotheorica **50** (2002), no. 4, 223–237.

[90] J. J. L. Velázquez, *Higher-dimensional blow up for semilinear parabolic equations*, Comm. Partial Differential Equations **17** (1992), no. 9-10, 1567–1596.

[91] ———, *Classification of singularities for blowing up solutions in higher dimensions*, Trans. Amer. Math. Soc. **338** (1993), no. 1, 441–464.

[92] ———, *Estimates on the $(n-1)$-dimensional Hausdorff measure of the blow-up set for a semilinear heat equation*, Indiana Univ. Math. J. **42** (1993), no. 2, 445–476.

[93] M. J. Ward, *Topics in singular perturbations and hybrid asymptotic-numerical methods*, ICIAM 95 (Hamburg, 1995), Akademie Verlag, Berlin, 1996, pp. 435–462.

[94] F. B. Weissler, *Local existence and nonexistence for semilinear parabolic equations in L^p*, Indiana Univ. Math. J. **29** (1980), no. 1, 79–102.

[95] ———, *Single point blow-up for a semilinear initial value problem*, J. Differential Equations **55** (1984), no. 2, 204–224.

[96] H. Zaag, *Blow-up results for vector-valued nonlinear heat equations with no gradient structure*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **15** (1998), no. 5, 581–622.

[97] ———, *A remark on the energy blow-up behavior for nonlinear heat equations*, Duke Math. J. **103** (2000), no. 3, 545–556.

[98] ———, *A Liouville theorem and blow-up behavior for a vector-valued nonlinear heat equation with no gradient structure*, Comm. Pure Appl. Math. **54** (2001), 107–133.

[99] ———, *On the regularity of the blow-up set for semilinear heat equations*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **19** (2002), no. 5, 505–542.

[100] ———, *One dimensional behavior of singular N dimensional solutions of semilinear heat equations*, Comm. Math. Phys. **225** (2002), no. 3, 523–549.

[101] ———, *Regularity of the blow-up set and singular behavior for semilinear heat equations*, Mathematics & mathematics education (Bethlehem, 2000), World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 2002, pp. 337–347.