THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE CERGY-PONTOISE

spécialité

MATHÉMATIQUES

présentée par

Hatem ZAAG

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE CERGY-PONTOISE

Sujet de la thèse:

SUR LA DESCRIPTION DES FORMATIONS DE SINGULARITÉS POUR L'ÉQUATION DE LA CHALEUR NON LINÉAIRE

Thèse soutenue le lundi 23 mars 1998 devant le jury:

M. Abbas Bahri..
M. Henri Berestycki...
M. Yann Brenier...
M. Jean Bricmont..Rapporteur
M. Thierry Cazenave...
M. Patrick Gérard..Rapporteur
M. Frank Merle...Directeur de thèse

REMERCIEMENTS

Je tiens à exprimer ma plus profonde gratitude à Frank Merle qui a dirigé mes travaux avec beaucoup de disponibilité et de bienveillance. Travailler avec lui fût pour moi un grand honneur et une occasion de profiter de son esprit vif et de sa grande culture scientifique.

Je remercie vivement Jean Bricmont qui a accepté d'être rapporteur sur ma thèse. Plusieurs de ses travaux m'ont été une source d'inspiration.
Mes remerciements vont aussi à Patrick Gérard qui a bien voulu rapporter sur ma thèse, et qui m'a constamment apporté son soutien.

Je remercie également Thierry Cazenave pour avoir accepté d'être parmi le jury de ma thèse.

Ma plus vive reconnaissance va à Henri Berestycki et Yann Brenier qui ont bien voulu faire partie de mon jury de thèse. Je tiens à les remercier aussi pour les encouragements qu'ils n'ont cessé de m'apporter tout au long de ma scolarité.

Abbas Bahri me fait l'honneur d'être dans le jury, et je l'en remercie très chaleureusement. Je lui exprime aussi ma reconnaissance pour son invitation à Rutgers University en décembre 97.

Cette thèse n'aurait pas pu être possible sans l'excellent environnement scientifique et humain du Département de Mathématiques et d'Informatique de l'École Normale Supérieure et du Département de Mathématique de l'Université de Cergy-Pontoise.

Enfin, un grand merci à toute ma famille, à mes amis et à tous ceux qui m'ont aidé un jour.

À la mémoire de mon père Aboubaker
et de mon grand-père Salem,
à ma mère Zahia, à mon frère Mohamed Lotfi.

Résumé

On s'intéresse au phénomène d'explosion en temps fini dans les équations du type:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + |u|^{p-1}u \tag{1}$$

où $u : (x,t) \in \mathbb{R}^N \times [0,T) \to \mathbb{R}$, $1 < p$, $(N-2)p < N+2$.

Dans une première direction, on construit pour (1) une solution u qui explose en temps fini $T > 0$ en un seul point d'explosion $x_0 \in \mathbb{R}^N$, et on décrit complètement le profil (ou comportement asymptotique) de u à l'explosion. Cette construction s'appuie sur la technique d'estimations a priori des solutions explosives de (1) qui permet une réduction en dimension finie du problème, et sur un lemme de type Brouwer. La méthode utilisée permet de dégager un résultat de *stabilité* du comportement de la solution construite par rapport à des perturbations dans les données initiales ou dans le terme non linéaire de réaction. De plus, la méthode se généralise à des équations vectorielles de type chaleur avec non-linéarité sans structure de gradient, ainsi qu'au traitement d'un problème de reconnexion d'un vortex avec la paroi en supra-conductivité.

Dans une seconde direction, on s'intéresse à l'équation suivante associée à (1):

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \Delta w - \frac{1}{2}y.\nabla w - \frac{w}{p-1} + w^p, \tag{2}$$

et on démontre un Théorème de Liouville qui donne une classification des solutions de (2) globales en temps et en espace et uniformément bornées. On obtient également une propriété de localisation de l'équation (1) (si $u \geq 0$) qui permet de la comparer de façon précise à la solution de l'équation différentielle associée.

Enfin, on s'intéresse de nouveau à la notion de profil et on utilise les estimations qui découlent du Théorème de Liouville pour prouver un résultat d'équivalence de différentes notions de profils d'explosion ou de développement asymptotique de u au voisinage de x_0 point d'explosion, en variable x, $y = \frac{x-x_0}{\sqrt{T-t}}$ ou $z = \frac{x-x_0}{\sqrt{(T-t)|\log(T-t)|}}$.

Mots clés: équation de la chaleur, singularité, explosion en temps fini, extinction en temps fini, profil, développement asymptotique, équations vectorielles, supra-conductivité.

Abstract

We are interested in finite-time blow-up phenomena for heat equations of the type:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + |u|^{p-1}u \tag{1}$$

where $u : (x,t) \in \mathbb{R}^N \times [0,T) \to \mathbb{R}$, $1 < p$, $(N-2)p < N+2$.

We first construct for (1) a solution u which blows-up in finite time T at only one blow-up point $x_0 \in \mathbb{R}^N$, and describe completely its blow-up profile (or asymptotic behavior). This construction is based on *a priori* estimates' technique which reduces the problem to a finite-dimensional one, and on a Brouwer type lemma. This method allows us to derive a stability result of the behavior of u with respect to initial data or perturbation of the nonlinearity. In addition, we generalize the method to the case of vector-valued equations with a non gradient nonlinearity, as well as a vortex reconnection with the boundary in super-conductivity.

In a second step, we consider the following equation derived form (1):

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \Delta w - \frac{1}{2} y.\nabla w - \frac{w}{p-1} + w^p, \tag{2}$$

and prove a Liouville Theorem which classifies all uniformly bounded globally (in space and time) defined solutions of (2). We then obtain a localization property of equation (1) (if $u \geq 0$) which allows a precise comparison with solutions of the associated ordinary differential equation.

In a third step, we use a consequence of the Liouville Theorem to prove the equivalence of different notions of blow-up profile or asymptotic behavior near a blow-up point x_0 of u, namely in variables x, $y = \frac{x-x_0}{\sqrt{T-t}}$ or $z = \frac{x-x_0}{\sqrt{(T-t)|\log(T-t)|}}$.

Key words: heat equation, singularity, finite time blow-up, finite time quenching, profile, asymptotic behavior, vector-valued equations, super-conductivity.

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

L'objet de cette thèse est l'étude de la formation en temps fini de singularités dans des systèmes de réaction-diffusion de type chaleur:

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{rclll} \frac{\partial u}{\partial t} & = & \Delta u + F(u) & \text{dans} & \Omega\times[0,T) \\ u & = & 0 & \text{sur} & \partial\Omega\times[0,T) \\ u(.,0) & = & u_0 & \text{dans} & \Omega \end{array}\right.$$

où
$u:(x,t)\in\Omega\times[0,T)\to\mathbb{R}^M$, $u_0:\Omega\to\mathbb{R}^M$,
Ω est un ouvert convexe borné et régulier de $\mathbb{R}^N$ ou $\Omega=\mathbb{R}^N$, $T>0$,
$(\Delta u)_i=\Delta u_i$,
$F:\mathbb{R}^M\to\mathbb{R}^M$ est de classe C^1,
et $N,M\in\mathbb{N}$. (La condition de bord est à ignorer si $\Omega=\mathbb{R}^N$).

Ce système constitue un modèle simplifié pour beaucoup de phénomènes physiques de réaction-diffusion. Il apparaît notamment en combustion (voir Williams [58], Kapila [31], Kassoy et Poland [33], [34] (explosions thermiques), Bebernes et Eberly [2] (en particulier, un modèle de combustion solide), Bebernes et Kassoy [3], Lacey [36], Galaktionov, Kurdyumov et Samarskii [19], Galaktionov et Vazquez [20]). On le retrouve aussi dans beaucoup de situations physiques, de la mécanique des fluides à l'optique, sous la forme de l'équation de Ginzburg-Landau complexe (voir Levermore et Oliver [37]). Le système (1) a également un intérêt en neuro-biologie (voir Nagasawa [49], McKean [41]), et dans des modèles génétiques (voir Fisher [14]).

Le problème de Cauchy (local en temps) pour (1) peut être résolu dans une grande classe d'espaces fonctionnels. Citons par exemple l'espace des fonctions de $C(\bar\Omega)$ nulles sur $\partial\Omega$ (si Ω est borné) ainsi que l'espace $H^1_0\cap L^\infty(\Omega)$ que nous considérons dans la suite (voir Friedman [15], Henry [27], Pazy [50], Weissler [56]).
On peut alors définir $T>0$ comme étant le temps maximum d'existence de la solution de (1). D'après la théorie locale, $u\in C\left([0,T),H^1_0\cap L^\infty(\Omega)\right)$.
Deux cas se présentent:
- $T=+\infty$: existence globale.
- $T<+\infty$: dans ce cas,

$$\lim_{t\to T}\|u(t)\|_{L^\infty(\Omega)}=\lim_{t\to T}\|u(t)\|_{H^1(\Omega)}=+\infty.$$

On dit alors que u explose en temps fini T.

Par la suite, on s'intéresse à l'étude de telles solutions explosives.
Pour cela, on introduit la notion de point d'explosion (voir par exemple Friedman et McLeod [17]):

Définition 1 *Un point $a\in\Omega$ est dit point d'explosion de u si $u(x,t)$ n'est pas localement bornée au voisinage de (a,T), autrement dit s'il existe $(x_n,t_n)\to(a,T)$ tel que $|u(x_n,t_n)|\to+\infty$ quand $n\to+\infty$.*

Il est classique que

Si u explose en temps fini T, alors elle admet (au moins) un point d'explosion.

Plusieurs questions se posent autour de l'étude de l'explosion en temps fini dans (1):

Question 1: Existence. Existe-t-il des solutions de (1) qui explosent en temps fini? Existe-t-il des conditions suffisantes sur u_0 et F qui entraînent l'explosion?

Question 2: Normes de u. Peut-on avoir des estimations précises des normes (spatiales) de u et de ses dérivées à l'explosion?

Question 3: Comportement asymptotique. Comment se comporte u asymptotiquement au voisinage de (a, T) où $a \in \Omega$ est un point d'explosion? Est-ce que ce comportement est universel (i.e. indépendant des données initiales)? Est-il stable par rapport à des perturbations dans les données initiales ou le terme non linéaire?

Question 4: Interaction de la diffusion et de la réaction. Peut-on comparer l'équation (1) à une équation de dynamique locale en espace (une équation différentielle), ce qui permettrait de comprendre les rôles respectifs et les interactions entre le terme de diffusion Δu et le terme de réaction $F(u)$, surtout au voisinage de l'explosion.

1 Aperçu historique et directions fondamentales de l'étude

Dans la littérature sur l'explosion en temps fini pour le système (1), le cas suivant a constitué un prototype intéressant retenu par plusieurs auteurs:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + |u|^{p-1}u \tag{2}$$

avec $u : (x, t) \in \Omega \times [0, T) \to \mathbb{R}$, Ω ouvert de $\mathbb{R}^N$, $1 < p$ et si $N \geq 3$, $p < \frac{N+2}{N-2}$. Dans le cas $N = M = 1$, d'autres auteurs se sont intéressés au cas de

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + e^u. \tag{3}$$

Nous nous intéressons essentiellement à l'équation prototype (2).

Les premières conditions suffisantes d'existence d'une solution explosive pour les équations de type (2) sont dues en particulier à Kaplan [32], Friedman [16], Fujita [18], Levine [38], Ball [1] et Weissler [57]. Par exemple, dans le cas d'un domaine borné Ω, Ball a obtenu, grâce à l'énergie associée à (2)

$$E(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \frac{1}{p+1}\int_\Omega |u|^{p+1} dx,$$

et à des méthodes d'équations différentielles ordinaires, une obstruction à l'existence globale d'une solution de (2):

Si $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, $u_0 \neq 0$ et $E(u_0) \leq 0$, alors $u(t)$ explose en temps fini.

Dans un contexte plus général ($\Omega = \mathbb{R}^N$ ou Ω borné), Giga et Kohn [23] se sont appuyés sur l'énergie locale pondérée suivante:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{a,t}(\varphi) \quad &= \quad t^{\frac{2}{p-1}-\frac{N}{2}+1}\int_\Omega \left(\frac{1}{2}|\nabla\varphi|^2 - \frac{1}{p+1}|\varphi|^{p+1}\right) e^{-|x-a|^2/4t}dx \\ &+ \quad t^{\frac{2}{p-1}-\frac{N}{2}}\int_\Omega \frac{1}{2(p-1)}|\varphi|^2 e^{-|x-a|^2/4t}dx \end{aligned} \tag{4}$$

pour trouver une condition nécessaire de non explosion au voisinage d'un point donné:

Il existe une constante $\sigma(N,p) > 0$ telle que si $u(t)$ explose en temps fini T et si Ω est étoilé en un point $a \in \Omega$ vérifiant

$$\mathcal{E}_{a,T}(u_0) < \sigma,$$

alors a n'est pas point d'explosion pour $u(t)$.

L'étude du comportement asymptotique de $u(t)$ au voisinage de (a,T) où a est un point d'explosion s'est faite d'abord grâce à l'introduction de variables auto-similaires:

$$y = \frac{x-a}{\sqrt{T-t}},\ s = -\log(T-t),\ w_a(y,s) = (T-t)^{\frac{1}{p-1}} u(x,t). \tag{5}$$

D'après (2), w_a (ou simplement w) vérifie: $\forall s \geq -\log T$, $\forall y \in W_{a,s}$,

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \Delta w - \frac{1}{2} y.\nabla w - \frac{w}{p-1} + |w|^{p-1} w \tag{6}$$

où $W_{a,s} = (\Omega - a)e^{\frac{s}{2}}$.
Ainsi, l'étude de $u(t)$ au voisinage de (a,T) est équivalente à l'étude du comportement asymptotique de $w_a(s)$ quand $s \to +\infty$. D'ailleurs, l'énergie locale $\mathcal{E}_{a,t}$ définie en (4) n'est autre que l'équivalent pour u de la fonctionnelle de Liapunov associée à (6).

Giga et Kohn ont démontré dans [21] et [22] que si

$$u_0 \geq 0$$

ou

$$p < \frac{3N+8}{3N-4} \text{ ou } N = 1,$$

alors il existe $\epsilon_0 > 0$ et $C > 0$ tels que

$$0 < \epsilon_0 \leq \lim_{s \to +\infty} \|w(s)\|_{L^\infty(W_{a,s})} \leq \frac{1}{\epsilon_0} \tag{7}$$

et

$$\|\nabla w(s)\|_{L^\infty} + \|\Delta w(s)\|_{L^\infty} + \|\nabla \Delta w(s)\|_{L^\infty} \leq C. \tag{8}$$

Ceci revient à dire en terme de u que

$$\epsilon_0 \leq \lim_{t \to T} (T-t)^{\frac{1}{p-1}} \|u(t)\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{\epsilon_0}$$

et

$$\begin{aligned} (T-t)^{\frac{1}{p-1}+\frac{1}{2}} \|\nabla u(t)\|_{L^\infty} + (T-t)^{\frac{1}{p-1}+1} \|\Delta u(t)\|_{L^\infty} & \\ + (T-t)^{\frac{1}{p-1}+\frac{3}{2}} \|\nabla \Delta u(t)\|_{L^\infty} & \leq C. \end{aligned}$$

Une première approche dans la recherche d'un développement asymptotique pour w_a a consisté en une étude de (6) dans L^2_ρ où

$$\rho(y) = \frac{e^{-\frac{|y|^2}{4}}}{(4\pi)^{N/2}}, \tag{9}$$

ce qui a permis d'avoir des convergences de $w(s)$ quand $s \to +\infty$ valables uniformément sur tout compact. Cette étude a été initiée par Giga et Kohn qui ont démontré dans [22] et [23] qu'il existe $l_a \in \{-\kappa, \kappa\}$ tel que

$$\sup_{|y|\le R} |w_a(y,s) - l_a| \to 0 \text{ quand } s \to +\infty$$

où

$$\kappa = (p-1)^{-\frac{1}{p-1}}.$$

Notons que κ, $-\kappa$ et 0 sont les seules solutions de (6) indépendantes du temps. Ce résultat a été précisé dans le cas $\Omega = \mathbb{R}^N$ par Filippas et Kohn [11], Filippas et Liu [13], et Herrero et Velázquez [28], [53] (voir aussi les articles de revue [30] et [52]), grâce à une analyse dans des espaces de Sobolev avec poids Gaussien (9). Ces auteurs ont montré que deux cas peuvent se produire:

- soit il existe $k \in \{0, ..., N-1\}$ et une matrice orthonormée Q tels que

$$\forall R > 0, \quad \sup_{|y|\le R} \left| w_a(y,s) - \kappa - \frac{\kappa}{2ps}\left((N-k) - \frac{1}{2} y^T A_k y\right)\right| = o\left(\frac{1}{s}\right) \tag{10}$$

où

$$A_k = Q^{-1}\begin{pmatrix} I_{N-k} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q$$

et I_{N-k} est la matrice identité $(N-k)\times(N-k)$,

- soit il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall R > 0, \quad \sup_{|y|\le R} |w_a(y,s) - \kappa| \le C(R) e^{-\delta s}.$$

Herrero et Velázquez ont affiné ce cas de convergence exponentielle à l'ordre 1 (voir [29] et [53]).

D'un point de vue physique, ces développements asymptotiques sont insuffisants. En effet, une fois traduite dans les variables d'origine (x,t), la convergence est uniforme uniquement à l'intérieur de paraboles du type $|x-a| \le R\sqrt{T-t}$, ce qui ne permet pas de déduire un profil asymptotique de $u(t)$ dans la variable x.

Néanmoins, le domaine de convergence a pu être étendu par Herrero et Velázquez [28], [55] (voir aussi [54]) aux ensembles $|z| \le C$ où

$$z = \frac{y}{\sqrt{s}}$$

en dimension N. Ils se sont appuyés sur une estimation linéaire dans des espaces de Sobolev avec poids Gaussien de l'effet du terme convectif $-\frac{1}{2}y.\nabla w$ dans l'équation (6). Ce résultat de Herrero et Velázquez leur a permis de dégager dans le cas (10) une notion de profil limite pour la fonction u au sens où $u(x,t) \to u^*(x)$ quand $t \to T$ si $x \ne a$ et x est voisin de a, avec

$$u^*(x) \sim \left[\frac{8p|\log|x-a||}{(p-1)^2|x-a|^2}\right]^{\frac{1}{p-1}} \quad \text{quand } x \to a. \tag{11}$$

Ce problème a été également exploré d'un point de vue numérique. Citons en particulier une étude numérique de Berger et Kohn [4] qui a permis de dégager l'existence d'un profil asymptotique pour certaines solutions de (6)

$$f(z) = \left(p - 1 + \frac{(p-1)^2}{4p}|z|^2\right)^{-\frac{1}{p-1}}. \tag{12}$$

Il a été observé numériquement dans [4] que

$$w(y,s) \sim f\left(\frac{y}{\sqrt{s}}\right) \text{ quand } s \to +\infty.$$

Bricmont et Kupiainen ont démontré dans [6] (voir aussi [5] et Bricmont, Kupiainen et Lin [7]) l'existence d'une donnée initiale pour w telle que

$$\sup_{y\in\mathbb{R}^N} \left| w(y,s) - f\left(\frac{y}{\sqrt{s}}\right)\right| \to 0 \text{ quand } s \to +\infty. \tag{13}$$

Grâce à la transformation (5), ceci donne pour tout $a \in \mathbb{R}^N$ une solution explosive $u(t)$ de (2) telle que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^N} \left| (T-t)^{\frac{1}{p-1}} u(x,t) - f\left(\frac{x-a}{\sqrt{(T-t)|\log(T-t)|}}\right)\right| \to 0 \tag{14}$$

quand $t \to T$.

Nous nous proposons de développer trois directions dans cette thèse:

- Dans une première direction, on propose une seconde méthode de démonstration du résultat (13) de Bricmont et Kupiainen, basée sur la technique d'estimations a priori des solutions de (6) qui permet une réduction en dimension finie du problème, et sur un lemme de type Brouwer. Cette méthode permet de dégager un résultat de *stabilité* du comportement (13) par rapport à des perturbations dans les données initiales ou dans le terme non linéaire de réaction. D'autre part, la méthode se généralise à des équations vectorielles de type chaleur avec non-linéarité sans structure de gradient, ainsi qu'au traitement d'un problème de reconnexion d'un vortex avec la paroi en supra-conductivité.

- Dans une seconde direction, on affine les estimations (7) et (8) de Giga et Kohn, grâce à un Théorème de Liouville qui donne une classification des solutions globales de (6). On obtient également une propriété de localisation de l'équation (2) qui permet de la comparer de façon précise à la solution de l'équation différentielle associée.

- Enfin, on s'intéresse de nouveau à la notion de profil et on utilise les estimations qui découlent du Théorème de Liouville pour prouver un résultat d'équivalence des trois notions de profils d'explosion ou de développements asymptotiques en variable x, y, ou $z = \frac{y}{\sqrt{s}}$.

2 Existence et stabilité d'une solution de (2) avec les comportements (14) et (11)

a) Équation de la chaleur avec une non-linéarité en puissance

On considère le problème de construction d'une solution de l'équation

$$\text{(15)}\qquad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + |u|^{p-1}u \\ u(x,t) \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^N,\ t \geq 0 \\ 1 < p, \text{ et si } N \geq 3,\ p < \frac{N+2}{N-2} \end{cases}$$

qui explose en temps fini donné $T > 0$ en un point unique donné $a \in \mathbb{R}^N$, et telle que u vérifie (14) et (11).

Dans [48] et [59] (voir aussi [47]), le résultat suivant a été obtenu (Théorème 1 page 48, Théorème 1 page 93 et Proposition 1 page 93):

Théorème 1 (Existence) *Il existe $T_0 > 0$ tel que pour tous $0 < \hat{T} \leq T_0$ et $\hat{a} \in \mathbb{R}^N$, il existe $\hat{u}_0 \in L^\infty \cap W^{1,p+1}(\mathbb{R}^N)$ telle que l'équation (15) avec donnée initiale $\hat{u}_0$ admet une solution $\hat{u}(t)$ explosant en temps fini $\hat{T}$ uniquement au point $\hat{a} \in \mathbb{R}^N$, et qui vérifie:*
i)

$$\text{(16)}\qquad \sup_{x\in\mathbb{R}^N} \left| (\hat{T}-t)^{\frac{1}{p-1}}\hat{u}(x,t) - f\left(\frac{x-\hat{a}}{\sqrt{(\hat{T}-t)|\log(\hat{T}-t)|}}\right)\right| \to 0$$

quand $t \to \hat{T}$ où f est définie en (12),
ii) $\forall x \in \mathbb{R}^N \setminus \{\hat{a}\}$, $\hat{u}(x,t) \to \hat{u}^*(x)$ quand $t \to \hat{T}$ et

$$\text{(17)}\qquad \hat{u}^*(x) \sim \left[\frac{8p|\log|x-\hat{a}||}{(p-1)^2|x-\hat{a}|^2}\right]^{\frac{1}{p-1}} \quad \textit{quand } x \to \hat{a}.$$

Signalons d'abord que *ii)* est une conséquence directe de *i)* grâce à l'invariance de l'équation (15) sous la transformation

$$\lambda \to u_\lambda(x,t) = \lambda^{\frac{2}{p-1}}u(\lambda x, \lambda^2 t),$$

et à des estimations de régularité parabolique de (15) s'appuyant sur une condition suffisante de non explosion de solutions de (15) due à Giga et Kohn [23] (voir section 4 dans [59]).

L'objet du théorème se réduit donc à la construction d'une donnée initiale u_0 pour (15) telle que *i)* soit satisfaite. La preuve de ceci s'appuie sur:

1) La transformation du problème grâce à (5) et à des estimations a priori sur les solutions de (6) au voisinage du profil f défini en (12), ce qui permet de réduire le problème de construction à un problème de dimension finie,

2) Une résolution de ce problème de dimension finie à l'aide d'un argument topologique.

La méthode de réduction en dimension finie initiée pour la preuve du Théorème 1 dans [48] permet d'obtenir un résultat de stabilité du comportement (16) (et donc de (17)) par rapport à des perturbations $L^\infty \cap W^{1,p+1}(\mathbb{R}^N)$ de la donnée initiale. Plus précisément (Théorème 2 page 50 et Théorème 3 page 114):

Théorème 2 (Stabilité du comportement (16) et (17)) *Soit $\hat{u}_0$ la donnée initiale construite au Théorème 1. Soit $\hat{u}(t)$ la solution de (15) avec donnée initiale $\hat{u}_0$ qui explose en temps fini $\hat{T}$ en un point $\hat{a}$. Alors,*
pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\mathcal{V}_\epsilon$ voisinage de $\hat{u}_0$ dans $L^\infty \cap W^{1,p+1}(\mathbb{R}^N)$ tel que pour

tout $u_0 \in \mathcal{V}_\epsilon$, la solution $u(t)$ de (15) avec donnée initiale u_0 explose en temps fini T en un point unique $a \in \mathbb{R}^N$ tels que

$$|a - \hat{a}| + |T - \hat{T}| \le \epsilon.$$

De plus, $u(t)$ se comporte comme (16) et (17) avec (a, T) remplaçant $(\hat{a}, \hat{T})$.

Remarque: Par les techniques de localisation présentées à la fin de la thèse, on peut avoir le même résultat dans l'espace d'énergie H^1.

La preuve du Théorème 2 s'appuie fondamentalement sur la technique de réduction en dimension finie du Théorème 1 ainsi que sur l'invariance de (6) sous l'action de la transformation géométrique

$$(a, T) \to w_{a,T}(y, s) = (T - t)^{\frac{1}{p-1}} u(x, t)$$

où $y = \frac{x-a}{\sqrt{T-t}}$, $s = -\log(T - t)$, associée à une condition de non dégénérescence lorsque $u(x, t)$ est au voisinage du profil

$$(\hat{T} - t)^{-\frac{1}{p-1}} f\left(\frac{x - \hat{a}}{\sqrt{(\hat{T} - t)|\log(\hat{T} - t)|}}\right).$$

b) Équation de la chaleur complexe

La technique de réduction à un problème de dimension finie s'applique en fait dans un cadre beaucoup plus général que (15), celui des équations vectorielles avec une non-linéarité ne dérivant pas nécessairement d'un gradient (voir section 5 dans [59]). Un prototype d'une telle équation est le suivant:

$$(18) \qquad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + (1 + i\delta)|u|^{p-1}u \\ u(x,t) \in \mathbb{C}, \ x \in \mathbb{R}^N, \ t \ge 0 \\ 1 < p, \text{ et si } N \ge 3, \ p < \frac{N+2}{N-2}. \end{cases}$$

Dans [59], une solution explosive stable de (18) est construite dans le cas où δ est petit (voir Théorème 1 page 93 et Proposition 1 page 93):

Théorème 3 (Existence) *Il existe $\delta_0 > 0$ et $T_0 > 0$ tels que pour tous $\delta \in [-\delta_0, \delta_0]$, $0 < T \le T_0$ et $a \in \mathbb{R}^N$, il existe $u_0 \in L^\infty \cap W^{1,p+1}(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$ telle que l'équation (18) avec donnée initiale u_0 admet une solution $u(t)$ explosant en temps fini T uniquement au point $a \in \mathbb{R}^N$ et qui vérifie:*
i)

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^N} \left| (T - t)^{\frac{1+i\delta}{p-1}} u(x, t) - f_\delta\left(\frac{x - a}{\sqrt{(T - t)|\log(T - t)|}}\right)^{1+i\delta} \right| \to 0$$

quand $t \to T$, où

$$f_\delta(z) = \left(p - 1 + \frac{(p - 1)^2}{4(p - \delta^2)}|z|^2\right)^{-\frac{1}{p-1}},$$

ii) $\forall x \in \mathbb{R}^N \backslash \{a\}$, $u(x, t) \to u_\delta^*(x)$ quand $t \to T$ et

$$u_\delta^*(x) \sim \left[\frac{8(p - \delta^2)|\log|x - a||}{(p - 1)^2|x - a|^2}\right]^{\frac{1+i\delta}{p-1}} \quad \text{quand } x \to a.$$

Bien que ce Théorème soit d'apparence très similaire au Théorème 1, il en diffère sur deux points:
1) Le Théorème 3 présente un comportement complètement complexe, au sens où le profil limite obtenu n'a pas de direction fixe dans $\mathbb{C}$.
2) La preuve du Théorème 3 qui s'appuie fondamentalement sur la technique de réduction en dimension finie introduite dans le cas réel, présente néanmoins une difficulté de plus sous la forme d'une direction dégénérée supplémentaire dans le problème. Cette difficulté est maîtrisée grâce à la théorie de la modulation (voir Filippas et Merle [12] pour un usage similaire de la théorie de la modulation). Le Théorème 2 de [59] généralise ce résultat au cas vectoriel (voir page 115).

c) Un problème d'extinction en temps fini

Comme autre application, le cas de l'équation (2) avec un terme d'amortissement de la non-linéarité $\nu\frac{|\nabla u|^2}{u}$ où $\nu \in (1,p)$ est traité de façon analogue dans [45] (voir Tayachi [51] où un terme d'amortissement de la forme $|\nabla u|^q$ est considéré). En effet, il est montré dans [45] que l'équation

$$(19) \qquad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u - \nu\frac{|\nabla u|^2}{u} + N(u) \\ u(x,t) \in \mathbb{R}, \ x \in \mathbb{R}^N, \ t > 0 \\ N(u) \sim u^p \text{ quand } u \to +\infty \\ |N(u)| \le C\exp(-\frac{1}{u}) \text{ si } |u| \le 1 \\ 1 < \nu < p, \end{cases}$$

admet une solution explosive en temps fini stable avec des comportements analogues à (16) et (17) (voir Proposition 1 page 133).
Remarque: Signalons que si $\nu \le 1 < p$ dans (19), alors des changements de fonctions évidents ramènent (19) au cas de (2) ou (3), deux cas où l'on dispose déjà de solutions explosives (voir la remarque après Proposition 1 page 133).

Grâce à une transformation du type

$$h(x,t) = \frac{1}{u(x,t)},$$

le résultat pour l'équation (19) donne un résultat d'extinction en temps fini pour le problème suivant:

$$(20) \qquad \begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} & = & \Delta h - G(h) & \text{dans} & \Omega \times [0,T) \\ h(x,t) & = & 1 & \text{sur} & \partial\Omega \times [0,T) \end{cases}$$

où Ω est un ouvert borné,

$$G(h) \sim \frac{1}{h^\beta} \text{ quand } h \to 0$$

et $\beta > 0$.

Si h est définie sur $\Omega \times [0,T)$ et

$$\lim_{t\to T} \inf_{x\in\Omega} h(x,t) = 0,$$

alors on dit que h s'éteint en temps fini.

L'équation (20) constitue un modèle de reconnexion d'un vortex avec la paroi dans un semi-conducteur de type II si $\beta = 1$ (voir Chapman, Hunton et

Ockendon [8]). Elle est également reliée à l'équation de diffusion générée par des phénomènes de polarisation dans des conducteurs ioniques (voir Kawarada [35]).

Quelques critères d'extinction en temps fini pour (20) étaient déjà connus en dimension 1 (voir Kawarada [35], Levine [39] (article de revue), [40]). Cependant, peu de choses étaient connues sur le comportement de la solution à l'extinction, sauf en ce qui concerne la localisation des points d'extinction (voir Guo [24], Deng et Levine [10]), ou le taux d'extinction (voir Guo [24], [25], [26]).

Dans [45], une solution stable de (20) s'éteignant en temps fini en un seul point est construite. Son comportement au voisinage du point d'extinction (analogue du temps d'explosion) est décrit avec précision (voir le Théorème de la page 130).

Théorème 4 (Existence d'une solution de (20) s'éteignant en temps fini) *Pour tout $a \in \Omega$, l'équation (20) admet une solution h s'éteignant en temps fini $T > 0$. De plus, $\forall x \in \Omega\backslash\{a\}$, $h(x,t) \to h^*(x)$ quand $t \to T$ et*

$$h^*(x) \sim \left[\frac{(\beta+1)^2|x-a|^2}{8\beta|\log|x-a||}\right]^{\frac{1}{\beta+1}} \quad \textit{quand } x \to a.$$

3 Estimations générales sur les solutions explosives positives de (2)

On se propose maintenant d'affiner les estimations (7) et (8) de Giga et Kohn. Dans ce but, on s'intéresse d'abord au problème de classification des solutions de (6) globales en espace et en temps et uniformément bornées.

Dans [44], le résultat suivant est établi (Théorème 2 page 191):

Théorème 5 (Théorème de Liouville pour (6)) *Soit w une solution de (6) définie pour $(y,s) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$ telle que $\forall (y,s) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$, $0 \le w(y,s) \le C$. Alors, on est nécessairement dans l'un des cas suivants:*

i) $w \equiv 0$,

ii) $w \equiv \kappa$ où $\kappa = (p-1)^{-\frac{1}{p-1}}$,

iii) $\exists s_0 \in \mathbb{R}$ tel que $w(y,s) = \varphi(s-s_0)$ où

$$\varphi(s) = \kappa(1+e^s)^{-\frac{1}{p-1}}.$$

Remarque: Remarquons que φ est une connexion dans L^∞ des deux points critiques de (6): 0 et κ. En effet,

$$\dot\varphi = -\frac{\varphi}{p-1} + \varphi^p,\ \varphi(-\infty) = \kappa,\ \varphi(+\infty) = 0.$$

Remarque: Il suffit d'avoir une solution de (6) définie sur $(-\infty, s^*)$ pour avoir un théorème de classification (voir Corollaire 2 page 191).

À travers la transformation (5), ce Théorème a comme corollaire le résultat suivant (voir Corollaire 3 page 191):

Corollaire 1 *Soit u une solution de (2) définie pour $(x,t) \in \mathbb{R}^N \times (-\infty, T)$ telle que $\forall (x,t) \in \mathbb{R}^N \times (-\infty,T)$, $0 \le u(x,t) \le C(T-t)^{-\frac{1}{p-1}}$. Alors,*
soit $u \equiv 0$,
soit $\exists T^* \ge T$ tel que $u(x,t) = \kappa(T^*-t)^{-\frac{1}{p-1}}$.

La preuve du Théorème 5 s'appuie fondamentalement sur les points suivants:

1) une classification des comportements linéaires de $w(s)$ quand $s \to -\infty$ dans $L^2_\rho(\mathbb{R}^N)$ ($L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^N)$) où $\rho(y) = \frac{e^{-\frac{|y|^2}{4}}}{(4\pi)^{N/2}}$,

2) l'usage des transformations géométriques

$$w(y,s) \to w_{a,b}(y,s) = w(y + ae^{\frac{s}{2}}, s+b)$$

pour $a \in \mathbb{R}^N$ et $b \in \mathbb{R}$,

3) un critère d'explosion en temps fini au voisinage du point critique κ de la fonctionnelle d'énergie associée à (6):

Si w est solution de (6) définie pour tout temps $s \geq -\log T$ et que pour un certain $s_0 \geq -\log T$, $\int w(y,s_0)\rho(y)dy > \int \kappa\rho(y)dy$, alors $w(s)$ explose en temps fini.
(Proposition 3.5 page 205).

À l'aide d'un argument de compacité, on obtient dans [44] les estimations uniformes suivantes sur les solutions positives de (2) (Théorème 1 page 189)

Théorème 6 (Estimations optimales à l'ordre 0 sur $u(t)$ à l'explosion) *On suppose que Ω est un domaine convexe borné de classe $C^{2,\alpha}$ dans $\mathbb{R}^N$ ou que $\Omega = \mathbb{R}^N$. On considère $u(t)$ une solution de l'équation (2) explosant en temps fini T. Si de plus, $u(0) \geq 0$ et $u(0) \in H^1(\Omega)$, alors,*

$$(T-t)^{\frac{1}{p-1}} \|u(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \to \kappa$$

$$\text{et } (T-t)^{\frac{1}{p-1}+1}\|\Delta u(t)\|_{L^\infty} + (T-t)^{\frac{1}{p-1}+\frac{1}{2}}\|\nabla u(t)\|_{L^\infty} \to 0 \text{ quand } t \to T.$$

De façon équivalente, pour tout $a \in \Omega$,

$$\|w_a(s)\|_{L^\infty} \to \kappa \text{ et } \|\Delta w_a(s)\|_{L^\infty} + \|\nabla w_a(s)\|_{L^\infty} \to 0 \text{ quand } s \to +\infty.$$

Le Théorème 6 combiné avec des estimations a priori des solutions de (6) dans $W^{3,\infty}(\mathbb{R}^N)$ a permis dans [46] d'affiner les résultats à l'ordre un dans le cas $\Omega = \mathbb{R}^N$ (Théorème 1 page 231):

Théorème 7 (Estimations uniformes optimales à l'ordre un sur les solutions positives de (2)) *Il existe des constantes positives C_1, C_2 et C_3 telles que pour toute solution positive de (2) explosant en temps fini vérifiant $u(0) \in H^1(\mathbb{R}^N)$ et pour tout $\epsilon > 0$, il existe $t_0(\epsilon) < T$ tel que*
i) $\forall t \in [t_0(\epsilon), T)$,

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_{L^\infty} &\leq \left(\kappa + \left(\frac{N\kappa}{2p} + \epsilon\right)\frac{1}{|\log(T-t)|}\right)(T-t)^{-\frac{1}{p-1}}, \\ \|\nabla^i u(t)\|_{L^\infty} &\leq C_i \frac{(T-t)^{-(\frac{1}{p-1}+\frac{i}{2})}}{|\log(T-t)|^{i/2}} \end{aligned}$$

pour $i = 1,2,3$,
ii) $\forall s \geq -\log(T - t_0(\epsilon))$, $\forall a \in \mathbb{R}^N$,

$$\|w_a(s)\|_{L^\infty} \leq \kappa + \left(\frac{N\kappa}{2p} + \epsilon\right)\frac{1}{s}, \ \|\nabla^i w_a(s)\|_{L^\infty} \leq \frac{C_i}{s^{i/2}}.$$

Remarque: Dans le cas $N = 1$, Herrero et Velázquez [28] (Filippas et Kohn [11] aussi) ont prouvé des estimations reliées au Théorème 7, grâce à une propriété de Sturm utilisée en premier par Chen et Matano [9] (le nombre d'oscillations en espace est une fonction décroissante du temps).
Remarque: Il existe dans [44] et [46] des versions des Théorèmes 6 et 7 valables pour une suite de solutions de (2) et qui donnent de la compacité (Théorème 1' page 190 et Théorème 1' page 232).

Le Théorème 6 nous permet de comparer les tailles relatives des termes de diffusion (Δu) et de réaction (u^p) dans (2) ponctuellement en espace-temps. En effet, on démontre dans [44] le Théorème de localisation suivant (Théorème 3 page 192):

Théorème 8 (Comparaison avec l'équation différentielle ordinaire) *On suppose que Ω est un domaine convexe et borné de classe $C^{2,\alpha}$ ou $\Omega = \mathbb{R}^N$, et que $u_0 \in H^1(\Omega)$. Alors, $\forall \epsilon > 0$, $\exists C_\epsilon > 0$ tel que $\forall t \in [\frac{T}{2}, T)$, $\forall x \in \Omega$,*

$$|u_t - u^p| \leq \epsilon u^p + C_\epsilon.$$

Ainsi, la solution de l'équation aux dérivées partielles (2) est comparable uniformément et globalement en espace-temps à une solution de l'équation différentielle ordinaire (localisée par définition)

$$u' = u^p. \tag{21}$$

Ce Théorème constitue ainsi une justification a posteriori du changement de variables (5) qui a permis toute l'étude de (2). En effet, le choix de (5) était en quelque sorte motivé par la recherche d'une comparaison de $u(x,t)$ à $\kappa(T-t)^{-\frac{1}{p-1}}$ qui est justement la solution de (21) qui explose au temps T.
Remarque: De multiples conséquences découlent de ce théorème.
Par exemple (Corollaire 1 de [44], page 188):

Corollaire 2 *On suppose que Ω est un domaine convexe et borné de classe $C^{2,\alpha}$ ou $\Omega = \mathbb{R}^N$. Alors, pour toute solution positive u de (2) qui explose en temps fini T et qui vérifie $u(0) \in H^1(\Omega)$, pour tout $\epsilon_0 > 0$, il existe $t_0(\epsilon_0, u_0) < T$ tel que pour tous $a \in \Omega$ et $t \in [t_0, T)$, si $u(a,t) \leq (1-\epsilon_0)\kappa(T-t)^{-\frac{1}{p-1}}$, alors a n'est pas point d'explosion de u.*

4 Existence de profil à l'explosion pour les solutions de (2)

Grâce aux estimations de Théorème 7, on démontre dans [46] un Théorème de classification des profils dans la variable $\frac{y}{\sqrt{s}}$, qui sépare l'espace en partie singulière (là où il y a explosion) et partie régulière dans le cas non dégénéré (Théorème 2 page 234).

Théorème 9 (Classification des profils à l'explosion) *Il existe $k \in \{0, 1, ..., N\}$ et une matrice $N \times N$ orthogonale Q tels que $w(Q(z)\sqrt{s}, s) \to f_k(z)$ uniformément sur tout compact $|z| \leq C$, où $f_k(z) = (p-1+\frac{(p-1)^2}{4p}\sum_{i=1}^{N-k}|z_i|^2)^{-\frac{1}{p-1}}$ si $k \leq N-1$ et $f_N(z) = \kappa = (p-1)^{-\frac{1}{p-1}}$.*

Remarque: Ce résultat a été prouvé aussi par Velázquez dans [55]. Cependant, grâce aux techniques uniformes de [46], on peut montrer que la vitesse de convergence est indépendante du point d'explosion considéré, alors qu'elle en dépend dans le résultat de [55].

Un des problèmes intéressants qui en découle est de relier toutes les notions de profils connues: profil pour $|y|$ borné, $|z| = \frac{|y|}{\sqrt{s}}$ borné ou $x \simeq 0$. On démontre dans [46] que ces notions sont équivalentes dans le cas d'une solution qui explose en un point de façon non dégénérée (cas générique), ce qui clarifie de nombreux points évoqués dans des travaux précédents. On a finalement le Théorème suivant (Théorème 3 page 234).

Théorème 10 (Équivalence des comportements explosifs en un point) *Soit $u(t)$ une solution de (2) définie sur $\mathbb{R}^N \times [0,T)$, et $a \in \mathbb{R}^N$. On a l'équivalence des trois comportements suivants de $u(t)$ et de $w_a(s)$ (définie en (5)):*

i) $\forall R > 0, \ \sup_{|y|\le R} \left| w_a(y,s) - \left[\kappa + \frac{\kappa}{2ps}(N - \frac{1}{2}|y|^2)\right]\right| = o\left(\frac{1}{s}\right)$ *quand* $s \to +\infty$,

ii) $\forall R > 0, \ \sup_{|z|\le R} \left| w_a(z\sqrt{s},s) - f_0(z)\right| \to 0$ *quand* $s \to +\infty$ *avec* $f_0(z) = (p-1+\frac{(p-1)^2}{4p}|z|^2)^{-\frac{1}{p-1}}$,

iii) $\exists \epsilon_0 > 0$ *tel que pour tout* $|x-a| \le \epsilon_0$, $u(x,t) \to u^*(x)$ *quand* $t \to T$ *et* $u^*(x) \sim \left[\frac{8p|\log|x-a||}{(p-1)^2|x-a|^2}\right]^{\frac{1}{p-1}}$ *quand* $x \to a$.

Dans ce cas, a un point d'explosion isolé de $u(t)$.

Remarque: Grâce aux estimations uniformes utilisées dans la preuve de ce théorème, on peut prouver que les vitesses de convergence dans chaque expression *i*), *ii*) ou *iii*) dépend de la vitesse de convergence dans les deux autres et d'une borne sur $\|u_0\|_{C^2(\mathbb{R}^N)}$ (et non sur u_0). Les estimations de Velázquez [55] permettent aussi d'avoir de résultat d'équivalence, mais les convergences dépendent du point d'explosion considéré.

La thèse est organisée en deux parties:

Première partie: Existence et stabilité de solutions explosives pour des équations de type chaleur et description précise de leur profil à l'explosion.
Organisée en quatre articles [47], [48], [59] et [45] (dont trois en commun avec Frank Merle), elle reprend les résultats de la section 2 de cette introduction.

Deuxième partie: Estimations générales des solutions positives explosives de l'équation de la chaleur non linéaire et notions de profils à l'explosion.
Elle englobe les résultats des sections 3 et 4 de l'introduction, sous la forme de trois articles écrits en collaboration avec Frank Merle ([43], [44] et [46]).

Bibliographie

[1] Ball, J., *Remarks on blow-up and nonexistence theorems for nonlinear evolution equations,* Quart. J. Math. Oxford 28, 1977, pp. 473-486.

[2] Bebernes, J., et Eberly, D., Mathematical problems from combustion theory. *Applied Mathematical Sciences*, 83. Springer-Verlag, New York, 1989.

[3] Bebernes, J.W., et Kassoy, D.R., *A mathematical analysis of blowup for thermal reactions—the spatially nonhomogeneous case*, SIAM J. Appl. Math. 40, 1981, pp. 476-484.

[4] Berger, M., et Kohn, R., *A rescaling algorithm for the numerical calculation of blowing-up solutions*, Comm. Pure Appl. Math. 41, 1988, pp. 841-863.

[5] Bricmont, J., et Kupiainen, A., "Renormalization group and nonlinear PDEs", in *Quantum and non-commutative analysis (Kyoto, 1992)*, Math. Phys. Stud., 16, Kluwer, Dordrecht, 1993, pp. 113-118.

[6] Bricmont, J., et Kupiainen, A., *Universality in blow-up for nonlinear heat equations,* Nonlinearity 7, 1994, pp. 539-575.

[7] Bricmont, J., Kupiainen, A., et Lin, G., *Renormalization group and asymptotics of solutions of nonlinear parabolic equations,* Comm. Pure Appl. Math. 47, 1994, pp. 893-922.

[8] Chapman, S.J., Hunton, B.J., et Ockendon, J.R., *Vortices and Boundaries*, Quart. Appl. Math. à paraître.

[9] Chen, X., Y., et Matano, H., *Convergence, asymptotic periodicity, and finite-point blow-up in one-dimensional semilinear heat equations*, J. Differential Equations 78, 1989, pp. 160-190.

[10] Deng, K., et Levine, H.A., *On the blow-up of u_t at quenching*, Proc. Am. Math. Soc. 106, 1989, pp. 1049-1056

[11] Filippas, S., et Kohn, R., *Refined asymptotics for the blowup of $u_t - \Delta u = u^p$,* Comm. Pure Appl. Math. 45, 1992, pp. 821-869.

[12] Filippas, S., et Merle, F., *Modulation theory for the blowup of vector-valued nonlinear heat equations*, J. Differential Equations 116, 1995, pp. 119-148.

[13] Filippas, S., et Liu, W. X.,*On the blowup of multidimensional semilinear heat equations*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 10, 1993, pp. 313-344.

[14] Fisher, R.A., *The advance of advantageous genes*, Ann. of Eugenics 7, 1937, pp. 355-369.

[15] Friedman, A. *Partial differential equations*, Holt, Rinehart and Winston, Inc., New York-Montreal, Que.-London, 1969.

[16] Friedman, A., *Remarks on nonlinear parabolic equations*, Proc. of Sympos. Appl. Math., vol. 17, 1965, pp. 3-23, AMS.

[17] Friedman, A., et McLeod, B., *Blow-up of positive solutions of semilinear heat equations*, Indiana Univ. Math. J. 34, 1985, pp. 425-447.

[18] Fujita, H., *On the blowing-up of solutions of the Cauchy problem for* $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. I 13, 1966, pp. 109-124.

[19] Galaktionov, V., A., Kurdyumov, S., P., et Samarskii, A., A., *On approximate self-similar solutions for some class of quasilinear heat equations with sources*, Math. USSR-Sb 52, 1985, pp. 155-180.

[20] Galaktionov, V., A., et Vazquez, J., L., *Regional blow-up in a semilinear heat equation with convergence to a Hamilton-Jacobi equation*, SIAM J. Math. Anal., 24, 1993, pp. 1254-1276.

[21] Giga, Y., et Kohn, R., *Asymptotically self-similar blowup of semilinear heat equations,* Comm. Pure Appl. Math. 38, 1985, pp. 297-319.

[22] Giga, Y., et Kohn, R., *Characterizing blowup using similarity variables,* Indiana Univ. Math. J. 36, 1987, pp. 1-40.

[23] Giga, Y., et Kohn, R., *Nondegeneracy of blow-up for semilinear heat equations,* Comm. Pure Appl. Math. 42, 1989, pp. 845-884.

[24] Guo, J., *On the quenching behavior of the solution of a semilinear parabolic equation*, J. Math. Anal. Applic. 151, 1990 pp 58-79.

[25] Guo, J., *On the quenching rate estimate*, Quart. Appl. Math. 49, 1991, pp. 747-752.

[26] Guo, J., *On the semilinear elliptic equation* $\Delta w - \frac{1}{2} y.\nabla w + \lambda w - w^{-\beta} = 0$ *in* $\mathbb{R}^n$, Chinese J. Math. 19, 1991, pp. 355-377.

[27] Henry, D., *Geometric theory of semilinear parabolic equations*, Lecture Notes in Mathematics, 840. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1981.

[28] Herrero, M.A, et Velázquez, J.J.L., *Blow-up behavior of one-dimensional semilinear parabolic equations,* Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 10, 1993, pp. 131-189.

[29] Herrero, M.A, et Velázquez, J.J.L., *Flat blow-up in one-dimensional semilinear heat equations,* Differential Integral Equations 5, 1992, pp. 973-997.

[30] Herrero, M.A, et Velázquez, J.J.L., *Some results on blow up for semilinear parabolic problems*, Degenerate diffusions (Minneapolis, MN, 1991), IMA Vol. Math. Appl., 47, Springer, New York, 1993, pp. 105-125.

[31] Kapila, A.K., *Reactive-diffusion system with Arrhenius kinetics: dynamics of ignition*, SIAM J. Appl. Math. 39, 1980, pp. 21-36.

[32] Kaplan, S., *On the growth of solutions of quasi-linear parabolic equations*, Comm. Pure Appl. Math. 16, 1963, pp. 305-330.

[33] Kassoy, D., et Poland, J. *The thermal explosion confined by a constant temperature boundary. I. The induction period solution*, SIAM J. Appl. Math. 39, 1980, pp. 412-430.

[34] Kassoy, D., et Poland, J. *The thermal explosion confined by a constant temperature boundary. II. The extremely rapid transient*, SIAM J. Appl. Math. 41, 1981, pp. 231-246.

[35] Kawarada, H., *On solutions of initial boundary value problem for* $u_t = u_{xx} + \frac{1}{1-u}$, RIMS Kyoto Univ. 10, 1975, pp. 729-736.

[36] Lacey, A.A., *Mathematical analysis of thermal runaway for spatially inhomogeneous reactions*, SIAM J. Appl. Math. 43, 1983, pp. 1350-1366.

[37] Levermore, C., D., et Oliver, M.,*The complex Ginzburg-Landau equation as a model problem*, Dynamical systems and probabilistic methods in partial differential equations (Berkeley, 1994), Lectures in Appl. Math., 31, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996, pp. 141-190.

[38] Levine, H., *Some nonexistence and instability theorems for solutions of formally parabolic equations of the form* $Pu_t = -Au + F(u)$, Arch. Rat. Mech. Anal. 51, 1973, p. 371-386.

[39] Levine, H.A., *Advances in quenching*, Nonlinear diffusion equations and their equilibrium states, 3 (Gregynog, 1989), pp. 319-346.

[40] Levine H.A., *Quenching, nonquenching, and beyond quenching for solutions of some parabolic equations,* Annali Mat. Pura. Appl. 155, 1989, pp. 243-260.

[41] McKean, H.P., *Application of a Brownian motion to the equation of Kolmogorov-Petrovskii-Piskunov*, Comm. Pure Appl. Math. 28, 1975, pp. 323-331.

[42] Merle, F., *Solution of a nonlinear heat equation with arbitrary given blow-up points,* Comm. Pure Appl. Math. 45, 1992, pp. 263-300.

[43] Merle, F., et Zaag, H., *Estimations uniformes à l'explosion pour les équations de la chaleur non linéaires et applications*, Séminaire EDP, 1996-1997, École Polytechnique, pp. XIX-1 XIX-8.

[44] Merle, F., et Zaag, H., *Optimal estimates for blow-up rate and behavior for nonlinear heat equations*, Comm. Pure Appl. Math. 51, 1998, pp. 139-196.

[45] Merle, F., et Zaag, H., *Reconnection of vortex with the boundary and finite time quenching*, Nonlinearity 10, 1997, pp-1497-1550.

[46] Merle, F., et Zaag, H., *Refined uniform estimates at blow-up and applications for nonlinear heat equations*, Geom. Funct. Anal., à paraître.

[47] Merle, F., et Zaag, H. *Stabilité du profil à l'explosion pour les équations du type* $u_t = \Delta u + |u|^{p-1}u$, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 322, 1996, pp. 345-350.

[48] Merle, F., et Zaag, H., *Stability of the blow-up profile for equations of the type* $u_t = \Delta u + |u|^{p-1}u$, Duke Math. J. 86, 1997, pp. 143-195.

[49] Nagasawa, M., *A limit theorem of a pulse-like wave form for a Markov process*, Proc. Japan Acad. 44, 1968 pp. 491-494

[50] Pazy, A. *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, Applied Mathematical Sciences, 44. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1983.

[51] Tayachi, S., *Solutions autosimilaires d'équations semi-linéaires paraboliques avec terme de gradient non linéaire*, Thèse de doctorat, Université Paris-nord.

[52] Velázquez, J.J.L., *Blow up for semilinear parabolic equations*, Recent advances in partial differential equations (El Escorial, 1992), RAM Res. Appl. Math., 30, Masson, Paris, 1994, pp. 131-145.

[53] Velázquez, J.J.L., *Classification of singularities for blowing up solutions in higher dimensions*, Trans. Amer. Math. Soc. 338, 1993, pp. 441-464.

[54] Velázquez, J.J.L., *Estimates on the* $(n-1)$*-dimensional Hausdorff measure of the blow-up set for a semilinear heat equation*, Indiana Univ. Math. J. 42, 1993, pp. 445-476.

[55] Velázquez, J.J.L., *Higher-dimensional blow up for semilinear parabolic equations*, Comm. Partial Differential Equations 17, 1992, pp. 1567-1596.

[56] Weissler, F.B., *Local existence and nonexistence for semilinear parabolic equations in* L^p, Indiana Univ. Math. J. 29, 1980, pp. 79–102.

[57] Weissler, F.B., *Single point blow-up for a semilinear initial value problem*, J. Differential Equations, 55, 1984, pp. 204-224.

[58] Williams, F., *Combustion theory*, Addison-Wesley, Reading MA, 1983.

[59] Zaag, H., *Blow-up results for vector valued nonlinear heat equations with no gradient structure*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 15, 1998, à paraître.